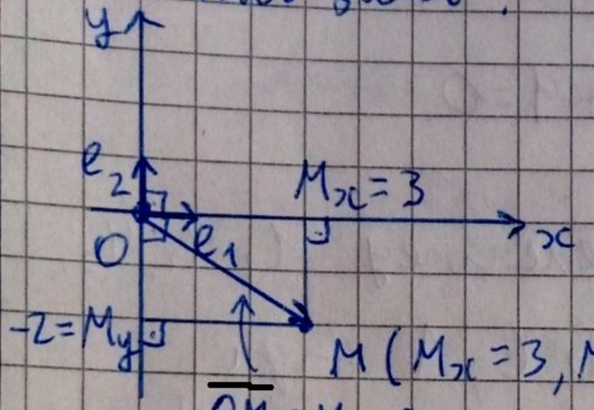
Прямокутна декартова система координат на площині:

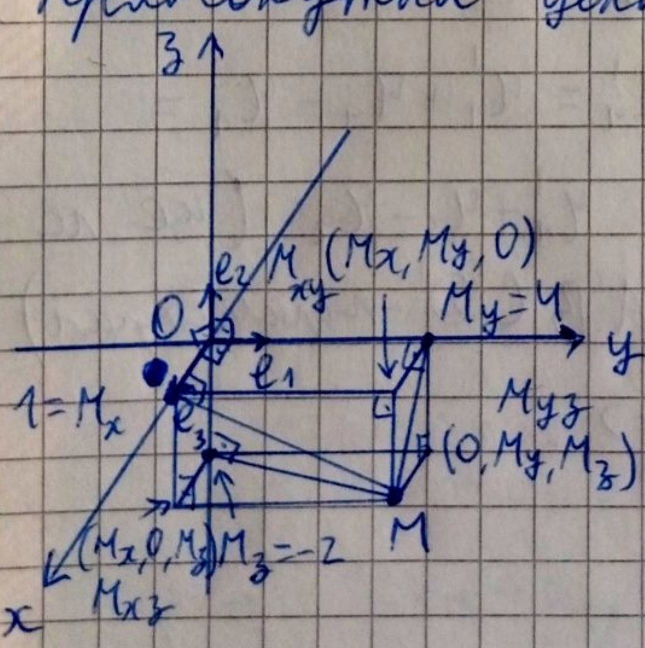


$e_1 \perp e_2$, $|e_1|=|e_2|=1$ — напрямні вектори осей Ox і Oy.

$\overline{OM} = M_x e_1 + M_y e_2$

Тут паралелограм (OM_xMM_y) розкладення афінної системи перетворюється на прямокутник, тому координати $M(M_x, M_y)$ — проєкції (зі знаком) ортогональні M на Ox і Oy відп.

Прямокутна декартова с.к. у просторі:



$e_1 \perp e_2$, $e_1 \perp e_3$, $e_2 \perp e_3$, $|e_1|=|e_2|=|e_3|=1$.

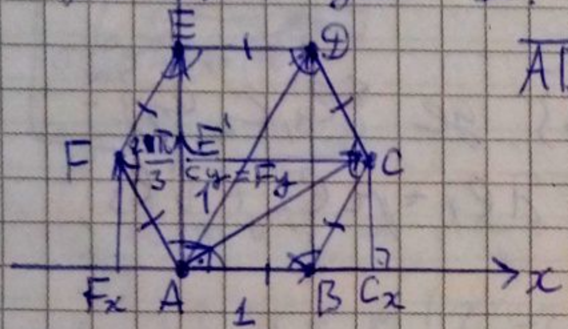
Координати $M(M_x, M_y, M_z)$ — її ортогональні проєкції на Ox, Oy, Oz відп.

При цьому утворюється прямокутний паралелепіпед $OM_xM_{xy}M_yM_zM_{xz}MM_{yz}$.

$(M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}$ — ортог. пр. M на Oxy, Oxz, Oyz відп.)

45. ABCDEF – правильний шестикутник. Знайти координати його вершин у ~~[illegible]~~ прямокутній

декартовій системі з початком у A, осями, що напрямлені уздовж $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, приймаючи сторону шестикутника за 1.



$\overline{AB} \perp \overline{AE}$, тому система прямокутна.

Якщо прийняти сторону за 1, $AB = 1$, $AE = 2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Довжини базисних векторів повинні бути 1.

Отже, координати у цій системі – це коорд. у системі $\{A, \overline{AB}, \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AE}}_{\overline{AE'}}\}$. Або: довжини (зі знаком) ортогональних проекцій точки на Ox і Oy відп.

$\overline{AA} = 0$; $A(0, 0)$ (початок координат).

$\overline{AB} = 1 \cdot \overline{AB} + 0 \cdot \overline{AE'}$: $B(1, 0)$. Проекції: $B_x = B = 1$, $B_y = 0$.

$\overline{AC} = \overline{AC_x} + \overline{AC_y} \ominus$

$AC_x = AB + BC_x = 1 + 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$, $AC_y = \frac{1}{2} AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

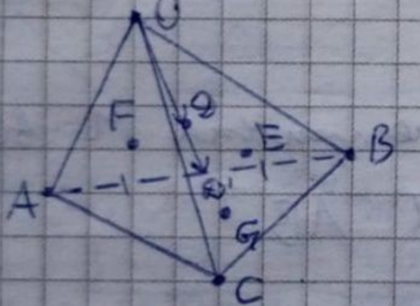
$\ominus\ \frac{3}{2}\overline{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AE'}$: $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AE} = \overline{AB} + \sqrt{3}\,\overline{AE'}$: $D(1, \sqrt{3})$. $D_x = B$, $D_y = E$.

$\overline{AE} = 0 \cdot \overline{AB} + \sqrt{3} \cdot \overline{AE'}$: $E(0, \sqrt{3})$

$\overline{AF} = \overline{AF_x} + \overline{AF_y} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AE'}$: $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

58. $OABC$ – тетраедр., D, E, F, G – точки перетину медіан OAB, OBC, OAC, ABC відповідно. Знайти координати D, E, F, G у аф. с.к. $\{O, \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}$.



Якщо D' – середина AB:

$$\overline{OD} = \frac{2}{3}\overline{OD'} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}) = \frac{1}{3}\cdot\overline{OA} + \frac{1}{3}\cdot\overline{OB} + 0\cdot\overline{OC} : D\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right).$$

Ан-no:

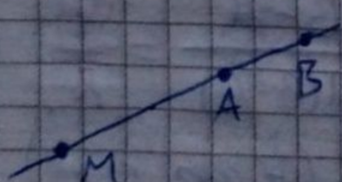
$$\overline{OE} = 0\cdot\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC} : E\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$\overline{OF} = \frac{1}{3}\cdot\overline{OA} + 0\cdot\overline{OB} + \frac{1}{3}\cdot\overline{OC} : F\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right).$$

І як у 20:

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}\cdot\overline{OA} + \frac{1}{3}\cdot\overline{OB} + \frac{1}{3}\cdot\overline{OC} : G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

59. $A(1,2,3)$, $B(7,2,5)$ (у деякій аф.с.к.) Знайти $M \in$ прямої AB : B і M по різні сторони від A, $AM = 2AB$.

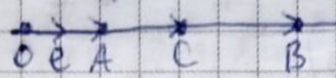


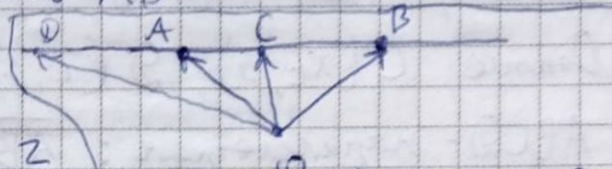
$\overline{AM}$ і $\overline{AB}$ – протилежно напрямлені, тому $\overline{AM} = -2\overline{AB} =$
$= -2(7-1, 2-2, 5-3) = -2(6, 0, 2) = (-12, 0, -4)$.
Тому $M = A + \overline{AM} = (1, 2, 3) + (-12, 0, -4) = (-11, 2, -1)$.

80. $A(2)$, $B(7)$, $C(4)$ (точки на прямій, коорд. – у деякій аф. с.к.?)

1) Відношення, у якому C ділить $\overline{AB}$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{4-2}{7-4} = \frac{2}{3}.$$





2) D, що ділить $\overline{AB}$ у відн. $-\frac{2}{3}$

$$D = \frac{A - \frac{2}{3}B}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2 - \frac{2}{3}7}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{1}{3}} = -8$$

тут A, B, D – єдина аф. координата або радіус-вектор

3. Середину E відрізка $\overline{CD}$

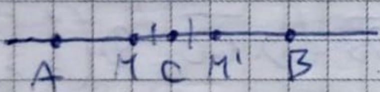
$$E = \frac{C+D}{2} = \frac{4-8}{2} = -2.$$

4 Відношення, у якому E ділить $\overline{AB}$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{-2-2}{7-(-2)} = \frac{-4}{9}.$$

81. M ділить $\overline{AB}$ у відн. λ, M' симетрична M відн. середини AB. У якому відн. ділить M' AB?

$$M = \frac{A+\lambda B}{1+\lambda}$$



$$C = \frac{A+B}{2}.$$

Симетричність: $\overline{CM} = -\overline{CM'}$

$$M - C = -(M' - C)$$

$$M + M' - 2C = 0$$

$$M' = 2C - M = A + B - \frac{A+\lambda B}{1+\lambda} = \frac{\lambda A + B}{1+\lambda} =$$

$$= \frac{A + \frac{1}{\lambda}B}{\frac{1}{\lambda}+1},$$ тобто відношення $\frac{1}{\lambda}$.

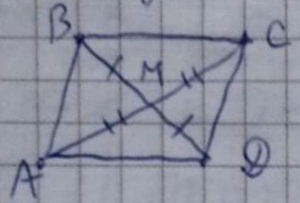
Або: $$\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} = \frac{\frac{\lambda A+B}{1+\lambda} - A}{B - \frac{\lambda A+B}{1+\lambda}} = \frac{\lambda A + B - (1+\lambda)A}{(1+\lambda)B - \lambda A - B} = \frac{B-A}{\lambda(B-A)} = \frac{1}{\lambda}.$$

90. $A(2,3)$, $M(1,-2)$ – середина AB. Знайти B ($\forall$ аф. с.к.)

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow$$

$$(x_B, y_B) = 2(x_M, y_M) - (x_A, y_A) = 2(1, -2) - (2, 3) = (0, -7).$$

92. $ABCD$ – паралелограм, $A(-4,-7)$, $B(2,6)$, $M(3,1)$ – точка перетину діагоналей. Знайти C, D ($\forall$ аф. с.к.)

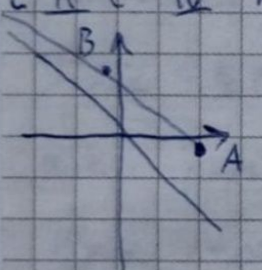


З попер. задачі:

$$C = 2(3,1) - (-4,-7) = (10,9);$$

$$D = 2(3,1) - (2,6) = (4,-4).$$

97. $A(9,-1)$, $B(-2,6)$, C – точка перетину AB з бісектрисою II і IV коорд. кутів. У якому відношенні C ділить $\overline{AB}$? (декартова с.к.).



$C(x,-x)$. Якщо вона ділить $\overline{AB}$ у відн. λ, то

$C\left(\frac{9-2\cdot\lambda}{1+\lambda}, \frac{-1+6\cdot\lambda}{1+\lambda}\right)$, тобто

$$\frac{9-2\lambda}{1+\lambda} = -\frac{-1+6\lambda}{1+\lambda}$$

$$9-2\lambda = 1-6\lambda$$

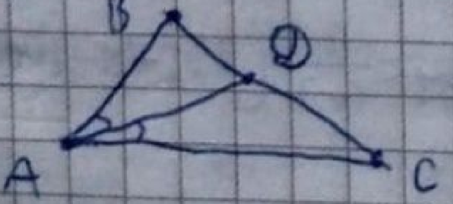
$$4\lambda = -8$$

$\lambda = -2$,

$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$. Відстань $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$.

(і взагалі для $a = (x_a, y_a)$ $|a| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$).

100. $A(4,1)$, $B(7,5)$, $C(-4,7)$. Знайти довжину бісектриси AD $\triangle ABC$ (декартова с.к.).



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}}{\sqrt{(-4-4)^2+(7-1)^2}} =$$

$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Тобто D ділить BC у відн. $\frac{1}{2}$:

$$D = \left(\frac{7 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}}, \frac{5 + \frac{1}{2} \cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} \right) = \left(\frac{5}{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{17}{2}}{\frac{3}{2}} \right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3} \right).$$

$$AD = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{17}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 196} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

Якщо C ділить $\overline{AB}$ у відн. λ $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda\right)$:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$