Форми на многовиді

M – k-гл. многовид, $k \geqslant 1$, $\dim M = n$.

<u>def.</u> r-гладкою l-формою на M ($r = \overline{0,k-1}$, $l \in \mathbb{Z}_+$) зветься r-гладке $(l,0)$-тензорне поле $\alpha : M \to TM^l_0$ на M.

<u>Rem.</u> Тобто $\forall p \in M$ $\alpha_p : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \to \mathbb{R}$ – l-лінійна форма:

$$\alpha_p(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, v_l) = \lambda \alpha_p(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_l) + \mu \alpha_p(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_l)$$

$\forall i = \overline{1,l}$, $v_1, \ldots, v_i, w_i, \ldots, v_l \in T_pM$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (при $l = 0$ $\alpha_p \in \mathbb{R}$, тобто $\alpha \in C^r(M)$ – ф-ція). У лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ на U:

$$\alpha|_U = \alpha_{i_1 \ldots i_l} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_l}, \text{ де } \alpha_{i_1 \ldots i_l} \in C^r(U) \ \forall i_1, \ldots, i_l = \overline{1,n}$$

Тоді $\forall v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $p \in U$, якщо $v_i = v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,l}$, то:

$$\alpha_p(v_1, \ldots, v_l) = \alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) dx^{i_1}(v_1) \ldots dx^{i_l}(v_l) = \alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) v_1^{i_1} \ldots v_l^{i_l}.$$

Зокрема, $\alpha_{i_1 \ldots i_l}(p) = \alpha_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right)$.

<u>Ex.</u> $\forall f \in C^{r+1}(M)$ $df : p \mapsto d_pf$ – r-гл. 1-форма, і локально $df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Rem. Ч-на l-форми на M утворюють вект. простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^4(M)$. Будемо його позначати $\mathcal{X}^{l,4}(M)$.

Рн. Нехай $\alpha \in \mathcal{X}^{l,4}(M)$. Визначимо відображення

$$\alpha : \underbrace{\mathcal{X}^4(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^4(M)}_{l} \to C^4(M) \ : \alpha(X_1, \ldots, X_l)(p) := \alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_l)_p)$$

$\forall X_1, \ldots, X_l \in \mathcal{X}^4(M)$, $p \in M$. Це відображення l-лінійне відн. множення на ф-ції з $C^4(M)$ (у т.ч. константи $\in \mathbb{R}$), тобто є l-лінійною формою на модулі $\mathcal{X}^4(M)$ над $C^4(M)$.

▷ l-лінійність випливає з побудови: $\forall i = \overline{1,l}$, $X_1, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, X_l \in \mathcal{X}^4(M)$, $f, g \in C^4(M)$, $\forall p \in M$:

$$\alpha(X_1, \ldots, fX_i + gY_i, \ldots, X_l)(p) = \alpha_p((X_1)_p, \ldots, f(p)(X_i)_p + g(p)(Y_i)_p, \ldots, (X_l)_p) =$$

$$= f(p)\alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_i)_p, \ldots, (X_l)_p) + g(p)\alpha_p((X_1)_p, \ldots, (Y_i)_p, \ldots, (X_l)_p) =$$

$$= (f\alpha(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_l) + g\alpha(X_1, \ldots, Y_i, \ldots, X_l))(p).$$

Це дійсно відображення у $C^4(M)$, бо, якщо у довільних лок. координатах $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\quad X_i|_U = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,l}$ і $\alpha|_U = \alpha_{i_1 \dots i_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l}$, то з формули у топці випливає

$$\alpha(X_1, \dots, X_l)|_U = \alpha_{i_1 \dots i_l} X_1^{i_1} \dots X_l^{i_l} \in C^\infty(U). \blacktriangle$$

Rem. Виявляється, що відображення з попер. Рr. однозначно визначає форму α, тобто побудована відповідність

$$\mathfrak{X}^{l,\infty}(M) \to \left\{ \begin{matrix} l\text{-лінійні форми} \\ \text{на модулі } \mathfrak{X}^\infty(M) \text{ над } C^\infty(M) \end{matrix} \right\}$$

є лінійним ізоморфізмом векторних просторів над $\mathbb{R}$ і модулів над $C^\infty(M)$ (де лінійна структура на множині справа вводиться очевидним чином). Ідея: якщо дана l-лінійна форма α на $\mathfrak{X}^\infty(M)$, то $\forall\, p \in M$ $\forall\, v_1, \dots, v_l \in T_pM$ продовжуємо їх полями $X_1, \dots, X_l \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ (тобто $\forall\, i = \overline{1,l}$ $(X_i)_p = v_i$) і покладемо $\alpha_p(v_1, \dots, v_l) = (\alpha(X_1, \dots, X_l))(p)$. Тоді $p \mapsto \alpha_p$ дасть потрібну форму з $\mathfrak{X}^{l,\infty}(M)$. Або у лок. коорд.:

$\alpha_{i_1 \dots i_l} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right)$ (тут потрібно буде продовжити на M локально задані базисні поля). Далі будемо вважати цей ізоморфізм встановленим і за необхідності визначати також форми дією на вект. полях.

Ex. $\forall\ f \in C^{r+1}(M),\ X \in \mathcal{X}^r(M),\ p \in M$

$$df(X)(p) = d_p f(X_p) = X_p(f) = X(f)(p),$$

тобто $df(X) = X(f)$.

Rem. Аналогічно можна встановити ізоморфізм між $C^r(M)$-модулями r-гладких (l,m)-тензорних полів на M і $(l+m)$-лінійними відображеннями від l вект. полів і m форм!

def.2. r-гладке (l,m)-тензорне поле на M – це $(l+m)$-лінійне відносно множення на ф-ції з $C^r(M)$ відображення

$$T: \underbrace{\mathcal{X}^r(M) \times \ldots \times \mathcal{X}^r(M)}_{l} \times \underbrace{\mathcal{X}^r(M)^* \times \ldots \times \mathcal{X}^r(M)^*}_{m} \to C^r(M),$$

де $\mathcal{X}^r(M)^* := \mathcal{X}^{1,r}(M)$ – модуль r-гл. 1-форм на M.

Rem. В силу сказаного вище, $\mathcal{X}^{1,r}(M)$ ізоморфний модулю

$C^\infty(M)$ - лінійних функціоналів $\mathfrak{X}^\infty(M) \to C^\infty(M)$, звідси таке позначення.

<u>Зат.</u> Раніше ми ототожнювали (через канонічний ізоморфізм) $T_pM^l_1$ з простором векторзначних l-лінійних форм на T_pM. Аналогічно будується ізоморфізм модулів ч-гл. $(l,1)$-тенз. полів T і l-лінійних відн. множення на ф-ції з $C^\infty(M)$ відображень $T: \underbrace{\mathfrak{X}^\infty(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^\infty(M)}_{l} \to \mathfrak{X}^\infty(M)$:
$\forall\, X_1, \ldots, X_l \in \mathfrak{X}^\infty(M),\ \alpha \in \mathfrak{X}^\infty(M)^*$

$$\alpha(\underset{\uparrow}{T}(X_1, \ldots, X_l)) = \underset{\uparrow}{T}(X_1, \ldots, X_l, \alpha)$$

у новому сенсі — у сенсі <u>def. 2</u>

Зокрема, $(1,1)$-тенз. поля - це оператори $\mathfrak{X}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^\infty(M)$

<u>Впр.</u> Довести, що це лін. ізоморфізм (вект. просторів над $\mathbb{R}$ і модулів над $C^\infty(M)$).

<u>def.</u> Нехай M, N - k-гл. многовиди, $k \geq 1$, $F \in C^k(M,N)$. Кодиференціалом (pullback) F у точці $p \in M$ зветься

відображення l-лінійних форм ($\forall\, l \in \mathbb{N}$), що спряжене (дуальне) до d_pF, тобто

$$F_p^*: T_{F(p)}N^l_0 \to T_pM^l_0 : \forall \alpha \in T_{F(p)}N^l_0,\ v_1, \dots, v_l \in T_pM$$

$$(F_p^*\alpha)(v_1, \dots, v_l) := \alpha(d_pF(v_1), \dots, d_pF(v_l)).$$

Rem. Оскільки d_pF лінійне, а α l-лінійна, $F_p^*\alpha$ дійсно l-лінійна. Крім того, $\forall\, \alpha, \beta \in T_{F(p)}N^l_0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ з def. легко вивести, що

$$F_p^*(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda F_p^*\alpha + \mu F_p^*\beta,$$

тобто саме F_p^* - лінійне відображення.

def. Кодиференціалом F зветься $F^*: \mathcal{T}^{l,r}(N) \to \mathcal{T}^{l,r}(M)$:

$$(F^*\alpha)_p := F_p^*\alpha_{F(p)} \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{T}^{l,r}(N),\ p \in M \ (\text{тут } l \in \mathbb{N},\ r = \overline{0, k-1}).$$

Rem. Щоб знайти $F^*\alpha$, достатньо знати $\alpha|_{F(M)}$.

Впр. Перевірити, що F^* дійсно переводить $\mathcal{T}^{l,r}(N)$ у $\mathcal{T}^{l,r}(M)$ і що якщо локально $\alpha = \alpha_{a_1 \dots a_l} dy^{a_1} \otimes \dots \otimes dy^{a_l}$, то Чи буде воно лінійним?

$$F^*\alpha = \frac{\partial F^{a_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial F^{a_l}}{\partial x^{i_l}} \alpha_{a_1 \dots a_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l}$$ у відп. лок. коорд.

Впр. Показати, що $F^*(df) = d(f \circ F)$ $\forall\, f \in C^{r+1}(N)$.

<u>Rem.</u> З <u>def.</u> тенз. добутку тензорів та полів випливає, що $\forall$ r-гладких (l,m)-тенз. поля T і (s,t)-тенз. поля S на M у сенсі <u>def. 2.</u> (зокрема, для l-форми і s-форми)

$$T\otimes S(X_1,\dots,X_{l+s},\alpha_1,\dots,\alpha_{m+t}) = T(X_1,\dots,X_l,\alpha_1,\dots,\alpha_m)\cdot S(X_{l+1},\dots,X_{l+s},\alpha_{m+1},\dots,\alpha_{m+t}) \quad (\in C^r(M))$$

$\forall X_1,\dots,X_{l+s}\in \mathcal{X}^r(M),\ \alpha_1,\dots,\alpha_{m+t}\in \mathcal{X}^r(M)^*$.

Аналогічний вигляд має й дія на поля й довільного добутку $T_1\otimes\dots\otimes T_s$ (<u>Впр.</u> виписати цю ф-лу хоча б для форм).

Симетричні та зовнішні форми

M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$. Далі за замовчуванням усі форми і поля максимальної гладкості $k-1$; $l \in \mathbb{Z}_+$.

__def.__ Гладка l-форма α на M зветься симетричною (відп., кососиметричною, або зовнішньою), якщо $\forall p \in M$ α_p симетрична (відп., кососиметрична), тобто $\forall v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $\sigma \in S_l$

$$\alpha_p(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(l)}) = \alpha_p(v_1, \ldots, v_l) \ (\text{відп., } \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha_p(v_1, \ldots, v_l)).$$

__Rem.__ Далі ми даватимемо визначення і будуватимемо конструкції для форм на M (або їхніх лок. задань), що аналогічні поняттям для форм на вект. просторі. Доведення їхніх властивостей випливають з відп. властивостей форм на вект. пр-рах (див., наприклад, А.И. Кострикин, Ю.И. Манин, Линейная алгебра и геометрия) або аналогічні.

__Rem.__ З __def.__ (косо)симетричності і альтернативного описy форм на многовиді випливає, що α - симетрична (відп., зовнішня) $\Leftrightarrow \forall$ вект. полів $X_1, \dots, X_\ell$ на M $\forall \sigma \in S_\ell$

$$\alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(\ell)}) = \alpha(X_1, \dots, X_\ell) \ (\text{відп., } \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha(X_1, \dots, X_\ell)).$$

Ex. При $\ell = 2$: $\alpha(Y, X) = \alpha(X, Y)$ (відп., $-\alpha(X, Y)$) $\forall X, Y$.

Рн. Якщо у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\alpha|_U = \alpha_{i_1 \dots i_\ell} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_\ell}$, то α - симетрична (відп., зовнішня) $\Leftrightarrow \forall$ лок. координат $\forall i_1, \dots, i_\ell = \overline{1, n}$ $\forall \sigma \in S_\ell$ $\alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(\ell)}} = \alpha_{i_1 \dots i_\ell}$ (відп., $\operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha_{i_1 \dots i_\ell}$).

▷ Впр. ◁

Ex. При $\ell = 2$: як і у Ex. вище, достатньо виписати умову для єдиної нетривіальної перестановки з S_2: $\forall i, j = \overline{1, n}$ $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (відп., $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$; зокрема, для зовнішньої $\alpha_{ii} = 0$ $\forall i = \overline{1, n}$).

Rem. Взагалі для зовнішньої форми з попер. Рн. випливає, що $\alpha_{i_1 \dots i_\ell} = 0$, якщо якісь два індекси співпадають (і $\alpha(X_1, \dots, X_\ell) = 0$, якщо співпадають два аргументи - з доб.).

Pr. Симетричні і кососим. форми на T_pM утворюють векторні підпростори у $T_pM^l_0$. Сим. та зовнішні форми на M утворюють векторні підпростори (над $\mathbb{R}$) і підмодулі (над $C^{k-1}(M)$) у $\mathcal{X}^{l,k-1}(M)$.

▷ Бо симетричність і кососиметричність зберігаються при лін. комбінаціях (у т.ч. з функціональними коефіцієнтами). ◁

Rem. Ці простори позначаються $S^l(T_pM)$, $\Omega^l(T_pM)$, $S^l(M)$ і $\Omega^l(M)$ відповідно. При цьому 0-форми (тобто скаляри та ф-ції) завжди вважаємо симетричними і кососиметричними, тобто $S^0(T_pM)=\Omega^0(T_pM)=\mathbb{R}$, $S^0(M)=\Omega^0(M)=C^{k-1}(M)$. З def. також маємо $S^1(T_pM)=\Omega^1(T_pM)=T_pM^*$, $S^1(M)=\Omega^1(M)=\mathcal{X}^{k-1}(M)^*$ – усі 1-форми.

def. Симетруванням (відп. альтернуванням) гл. l-форми α наз.

$$\operatorname{Sym}\alpha : X_1,\dots,X_l \mapsto \frac{1}{l!}\sum_{\sigma\in S_l}\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(l)}).$$

$$\left(\text{відп. } \operatorname{Alt}\alpha : X_1,\dots,X_l \mapsto \frac{1}{l!}\sum_{\sigma\in S_l}\operatorname{sign}\sigma\cdot\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(l)}).\right)$$

$\forall\, X_1,\dots,X_l \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$.

Ex. $l=2$: $\mathrm{Sym}\,\alpha(X,Y)=\frac{1}{2}(\alpha(X,Y)+\alpha(Y,X))$, $\mathrm{Alt}\,\alpha(X,Y)=\frac{1}{2}(\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X))$.

Пр. 1. $\forall\, \alpha\in\mathcal{T}^{l,k-1}(M)$ $\mathrm{Sym}\,\alpha\in S^l(M)$, $\mathrm{Alt}\,\alpha\in\Omega^l(M)$.

2. $\alpha\in S^l(M)\Leftrightarrow\alpha=\mathrm{Sym}\,\alpha$; $\alpha\in\Omega^l(M)\Leftrightarrow\alpha=\mathrm{Alt}\,\alpha$.

$\triangleright$ Впр. $\blacktriangle$

Рем. ~~Тобто~~ Крім того, вони, очевидно, лінійні (у т. ч. над $C^{k-1}(M)$) як відображення $\mathrm{Sym}:\mathcal{T}^{l,k-1}(M)\to S^l(M)$, $\mathrm{Alt}:\mathcal{T}^{l,k-1}(M)\to\Omega^l(M)$.

Тобто це проектори (лінійні, ~~зир~~, ідемпотентні: $\mathrm{Sym}^2=\mathrm{Sym}$, ан-но Alt);

Def. Нехай $\alpha\in S^l(M)$ (відп., $\Omega^l(M)$), $\beta\in S^m(M)$ (відп., $\Omega^m(M)$).

Їхнім симетричним (відп., зовнішнім) добутком зветься

$\alpha\beta:=\mathrm{Sym}(\alpha\otimes\beta)$ (відп., $\alpha\wedge\beta=\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)$).

Ex. Для $l=m=1$: $\forall X,Y$

$$\alpha\beta(X,Y)=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta(X,Y)+\alpha\otimes\beta(Y,X))=\frac{1}{2}(\alpha(X)\beta(Y)+\alpha(Y)\beta(X))=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha)(X,Y)$$; ан-но для $\alpha\wedge\beta$ зі знаком $-$:

$$\alpha\wedge\beta=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha).$$

Pr. (властивості симетричного і зовнішнього добутків) Нехай $\alpha, \tilde{\alpha} \in S^l(M)$ (відп., $\Omega^l(M)$), $\beta, \tilde{\beta} \in S^m(M)$ (відп., $\Omega^m(M)$), $\gamma \in S^n(M)$ (відп., $\Omega^n(M)$), $f, g \in C^{k-1}(M)$.

1. $\alpha\beta \in S^{l+m}(M)$ $(\alpha \wedge \beta \in \Omega^{l+m}(M))$.

2. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ $((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))$.

3. $\alpha\beta = \beta\alpha$ $(\alpha\wedge\beta = (-1)^{lm}\beta\wedge\alpha)$.

4. $(f\alpha + g\tilde{\alpha})\beta = f\alpha\beta + g\tilde{\alpha}\beta$, $\alpha(f\beta + g\tilde{\beta}) = f\alpha\beta + g\alpha\tilde{\beta}$.

$((f\alpha + g\tilde{\alpha})\wedge\beta = f\alpha\wedge\beta + g\tilde{\alpha}\wedge\beta$, $\alpha\wedge(f\beta + g\tilde{\beta}) = f\alpha\wedge\beta + g\alpha\wedge\tilde{\beta})$.

▷ **Впр.** або див. книжки з лін. алгебри. △

Rem. Тобто ці добутки перетворюють простори і $C^{k-1}(M)$-модулі $S(M) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} S^l(M)$ і $\Omega(M) := \bigoplus_{l=0}^{\infty} \Omega^l(M)$ відп. на (градуйовані) асоціативні алгебри, що звуться симетричною і зовнішньою алгебрами M відп. Аналогічно для форм у точці.

Rem. В силу асоціативностей (**2.** вище), можемо запису-

вати вирази вигляду $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ або $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_l$ без дужок.
Аналогічно до Ex. вище (де $l=2$):

Впр. $\forall$ 1-форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ $\alpha_1 \ldots \alpha_l = \frac{1}{l!} \sum\limits_{\sigma \in S_l} \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(l)}$ і $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_l = \frac{1}{l!} \sum\limits_{\sigma \in S_l} \operatorname{sign}\sigma \cdot \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(l)}$.

Тв. Нехай $(x^1, \ldots, x^n)$ – лок. координати на U. Тоді $\forall p \in U$ система l-форм $\{dx^{i_1} \ldots dx^{i_l}\}_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_l \leq n}$ (відп. $\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_l}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n}$) утворюють базис $S^l(T_pM)$ (відп. $\Omega^l(T_pM)$). Тому $\forall \alpha \in S^l(M)$ (відп. $\Omega^l(M)$) $\exists!$ розкладення $\alpha|_U$ за цими формами з коефіцієнтами з $C^{k-1}(U)$.

▷ Перевіримо при $l=2$, для більших – **Впр.** Системи з умови тоді мають вигляд $\{dx^i dx^j\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ і $\{dx^i \wedge dx^j\}_{1 \leq i < j \leq n}$ відп. Почнемо з кососиметричних. Отже, нехай $\alpha \in \Omega^2(T_pM)$, $\alpha \in \Omega^2(U)$ або $\alpha \in \Omega^2(M)$. В будь-якому разі її можна розкласти за лок. базисом:

або $\alpha|_U$

$$\alpha = \alpha_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \left[\begin{array}{l}\text{впорядкуємо індекси за зростанням,}\\ \text{викинувши } \alpha_{ii}=0 \text{ і згрупувавши за парами } i<j\end{array}\right] =$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\alpha_{ij}\, dx^i \otimes dx^j + \alpha_{ji}\, dx^j \otimes dx^i\right) = \left[\begin{array}{l}\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}\\ \text{за кососим.}\end{array}\right] =$$

$$= \sum_{i<j} \alpha_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Ex.}\\ \text{вище}\end{array}\right] = \sum_{i<j} 2\alpha_{ij}\, dx^i \wedge dx^j =$$

Тобто розкладення існує. Воно єдине, бо його коеф. однозначно визначені коефіцієнтами розкладення за базисом $\{dx^i \otimes dx^j\}$.

Зокрема, $\{dx^i \wedge dx^j\}_{i<j}$ – базис $\Omega^2(T_pM)$.

Так само для симетричної α на T_pM, на U або на M!

або $\alpha|_U$

$$\alpha = \alpha_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\, dx^i \otimes dx^i + \sum_{1\le i<j\le n} \left(\alpha_{ij}\, dx^i \otimes dx^j + \alpha_{ji}\, dx^j \otimes dx^i\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\alpha_{ji} = \alpha_{ij}\\ \text{за симетр.}\end{array}\right] = \sum_i \alpha_{ii}\, dx^i \otimes dx^i + \sum_{i<j} \alpha_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Ex.}\\ \text{вище}\end{array}\right] =$$

$$= \sum_i \alpha_{ii}\, dx^i dx^i + \sum_{i<j} 2\alpha_{ij}\, dx^i dx^j =$$

Знову ж це єдине розкл., тому $\{dx^i dx^j\}_{i\le j}$ – базис $S^2(T_pM)$. ▲

Cor. / Ex. $\dim S^l(T_pM) = C^l_{n+l-1}$, $\dim \Omega^l(T_pM) = C^l_n$ (зокрема, 0 при $l>n$). При $l=2$ це $\frac{n(n+1)}{2}$ і $\frac{n(n-1)}{2}$ відп.

Д-т Продовжимо викладки з попер. доведення. Для кососим.:

$= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\alpha_{ij}\, dx^i\wedge dx^j + \alpha_{ij}\, dx^i\wedge dx^j\right) = \left[\begin{array}{l}\text{кососим. } \alpha_{ij} \text{ і}\\ \wedge\text{: для 1-форм}\\ \alpha\wedge\beta = -\beta\wedge\alpha\end{array}\right] = \sum_{i<j}$

$\left(\alpha_{ij}\, dx^i\wedge dx^j + (-\alpha_{ji})(-dx^j\wedge dx^i)\right) = \left[\begin{array}{l}\text{"розгруповуємо" назад}\\ \text{і додаємо члени з } \alpha_{ii}=0\end{array}\right] =$

$= \alpha_{ij}\, dx^i\wedge dx^j.$

У цій сумі кожен з індексів i, j змінюється від 1 до n. Це вже не розкл. за базисом, бо система $\{dx^i\wedge dx^j\}_{i,j=1}^n$ лін. залежна.

Для симетричних ан-но (з симетричності α_{ij} і $\alpha\beta=\beta\alpha$):

$= \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}\, dx^i dx^i + \sum_{1\le i<j\le n} \left(\alpha_{ij}\, dx^i dx^j + \alpha_{ji}\, dx^j dx^i\right) = \alpha_{ij}\, dx^i dx^j,$

де так само кожний з $i, j = \overline{1,n}$.

Впр. Це вірно і для загального l: якщо $\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_l}\, dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_l}$ (у точці або на коорд. околі) і α - сим. (відп. кососиметрична), то $\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_l}\, dx^{i_1}\ldots dx^{i_l}$ (відп. $\alpha = \alpha_{i_1\ldots i_l}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}$).

Rem. Зокрема, коеф. $\alpha_{i_1\ldots i_l} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_l}}\right)$ для таких сум.

Rem. Будемо позначати $\underbrace{dx^i \ldots dx^i}_{m} =: (dx^i)^m$. Тоді, зокрема, для симетричної 2-форми: $\alpha = \sum_i \alpha_{ii}(dx^i)^2 + 2\sum_{i<j} \alpha_{ij} dx^i dx^j$.

Наприклад, при $n=2$: $\alpha = \alpha_{11}(dx^1)^2 + 2\alpha_{12}dx^1dx^2 + \alpha_{22}(dx^2)^2$.

Рп. Якщо α - симетрична (відп., зовнішня) n. l-форма на N, то $\forall F \in C^k(M,N)$ $F^*\alpha$ - сим. (відп., зовн.) n. l-форма на M.

▷ З def.: F^* зберігає властивості симетрії. △

Rem. Аналогічно поняття (косо)симетричності можна ввести для $(l,1)$-тензорних полів (векторзначних форм) і $(0,l)$-тенз. полів (полівекторних).

Rem. Отже, $\dim \Omega^l(T_pM) = C_n^l$, зокрема, 0 при $l>n$ і 1 при $l=n$. Тобто $\forall \omega \in \Omega^n(M)$ $\forall$ лок. коорд. $(x^1,\ldots,x^n)$ на U $\omega|_U = f\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ для деякої $f\in C^{k-1}(U)$.

Перейдемо до певних коорд. $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$ на $\tilde{U}$ $(U\cap\tilde{U}\neq\emptyset)$.

Тоді $\forall i = \overline{1,n}$ $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j$

$\omega|_{U\cap\tilde{U}} = f\left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} d\tilde{x}^{i_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}} d\tilde{x}^{i_n}\right) = \left[\begin{matrix}\text{розписуємо в суму} \\ \text{за власт. } \wedge \text{ і прибираємо} \\ \text{нулі}\end{matrix}\right] =$

$= f\sum_{\sigma\in S_n} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{\sigma(n)}} d\tilde{x}^{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^{\sigma(n)} = \left[\begin{matrix}\text{кососимет-} \\ \text{ричність } \wedge\end{matrix}\right] = f\Big(\sum_{\sigma\in S_n} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{\sigma(1)}} \cdots$

$\cdots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{\sigma(n)}} \operatorname{sign}\sigma\Big) d\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^n = f\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right)_{i,j=1}^n d\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^n.$

Визначник тут – це якобіан відобр. переходу від нових координат до старих. Позначимо його $J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})$, де (U,φ), $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ – карти, що відп. нашим системам лок. координат. Отже, $\omega|_{\tilde{U}} = \tilde{f}\, d\tilde{x}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{x}^n$ де $\tilde{f}|_{U\cap\tilde{U}} = f\cdot J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})$ (точніше, $f\cdot J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})\circ\tilde{\varphi}$, бо це ф-зія на $U\cap\tilde{U}$)

Згадаємо ф-лу заміни координат в інтегралі Рімана:

$$\int\limits_{\varphi(D\cap U\cap\tilde{U})} (f\circ\varphi^{-1})\, dx^1\ldots dx^n = \int\limits_{\tilde{\varphi}(D\cap U\cap\tilde{U})} (f\circ\tilde{\varphi}^{-1})\,|J(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})|\, d\tilde{x}^1\ldots d\tilde{x}^n.$$

Тут $D\subset M$ – така, що ці інтеграли $\exists$ (див. нижче), а відобр. переходу $\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ – і є заміна координат. Щоб звільнитися від модуля, будемо у таких випадках розглядати лише атласи з $J>0$. Коли це можливо?