Ex 1. Для кривої $\gamma \in C^k((a,b), M)$ і $t_0 \in (a,b)$:

$$d_{t_0}\gamma : \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}}}{T_{t_0}(a,b)} \to T_{\gamma(t_0)} M$$

Перший з цих просторів ототожнюємо з $\mathbb{R}$ як вище:

$v \leftrightarrow v \frac{\partial}{\partial t} = \mu'(0)$, де $\mu(t) = t_0 + vt$, $\mu(0) = t_0$.

Тоді $d_{t_0}\gamma(v) = (\gamma \circ \mu)'(0) = v\,\gamma'(t_0)$.

2. Для ф-цій $f \in C^k(M)$, $p \in M$:

$$d_p f : T_p M \to \underset{\substack{\updownarrow \\ \mathbb{R}}}{T_{f(p)} \mathbb{R}}$$

Тепер другий простір ототожнюємо з $\mathbb{R}$. В силу лінійності тоді $d_p f \in T_pM^*$ - лін. функціонал на T_pM.

Локально для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ тоді $d_p f(v) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = v(f)$

3. Для к-ч $\varphi : M \to \mathbb{R}^N$, $p \in M$ знову ототожнюємо:

$$d_p \varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^N \leftrightarrow \mathbb{R}^N$$

Для лок. коорд. $(u^1, .., u^n)$ в околі P тоді $\forall i = \overline{1,n}$

$$d_P\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}(P)\frac{\partial}{\partial x^a} = \varphi_{u^i}(P) \quad \text{(при ототожненні)}$$

у позначеннях, що ми вводили вище. Тут вже необов'язково $N \geq n$ і необов'язково виконується умова регулярності, але в будь-якому разі

$$d_P\varphi(T_PM) = \operatorname{span}\{\varphi_{u^i}(P)\}_{i=1}^n.$$

Якщо ж умова регулярності виконується, то справа буде $T_P(M,\varphi)$ і $d_P\varphi : T_PM \to T_P(M,\varphi)$ – лін. ізоморфізм, що встановлює описану вище відповідність. Зокрема, згідно з означенням, $\forall \gamma \in C^\infty((a,b),M)$ з $P = \gamma(t_0)$

$$d_P\varphi(\gamma'(t_0)) = (\varphi\circ\gamma)'(t_0).$$

Отже, всі $T_P(M,\varphi)$ для занурень $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+q}$ – це ізоморфні образи "абстрактного" дотичного простору T_PM.

<u>Rem.</u> Нехай (U, φ) – якась карта в околі $p \in M$ (тобто $p \in U$) з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$. Зокрема, $x^i \in C^k(U)$ – ф-ції на U, $i = \overline{1,n}$. Їх можна диференціювати так само, як і ф-ції на M у напрямках векторів $v \in T_pM$, а також знаходити диференціал (взагалі $\forall$ відкр. $V \subset M$ $\forall p \in V$ $\exists$ канонічний ізоморфізм між T_pV і T_pM, бо карти M в околі p відповідають карти V – <u>Впр.</u>). Для фіксованої точки далі позначатимемо $dx^i := d_p x^i \in T_pU^* \cong T_pM^*$, $i = \overline{1,n}$. Зокрема, $\forall\, i, j = \overline{1,n}$ $\quad dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \delta^i_j$.

<u>Cor.</u> $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ – це базис T_pM^*, дуальний до базиса $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ T_pM.

<u>Rem.</u> Зокрема, $\forall f \in C^k(M)$, $v \in T_pM$ якщо $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$d_pf(v) = v(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i(v),$$

бо $dx^i(v) = dx^i\left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v^j\, dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v^j \delta^i_j = v^i$. Тому

$$d_pf = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i$$ – розкладення d_pf за цим базисом.

Тензори в точці

Нехай M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$, $l, m \in \mathbb{Z}_+$

__def.__ l-коваріантним і m-контраваріантним тензором у точці $p \in M$ ((l,m)-тензором, тензором валентності (l,m)) зветься $(l+m)$-лінійне відображення

$$T: \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \times \underbrace{T_pM^* \times \ldots \times T_pM^*}_{m} \to \mathbb{R}$$

__Rem__ Тобто $\forall\, v_1, \ldots, v_l \in T_pM$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T_pM^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$\forall\, i = \overline{1,l}$, $w_i \in T_pM$

$$T(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, \alpha_m) = \lambda T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, \alpha_m) + \mu T(v_1, \ldots, w_i, \ldots \alpha_m)$$

і $\forall\, j = \overline{1,m}$, $\beta_j \in T_pM^*$

$$T(v_1, \ldots, \lambda \alpha_j + \mu \beta_j, \ldots, \alpha_m) = \lambda T(v_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m) + \mu T(v_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \alpha_m).$$

__Rem.__ Очевидно, лінійність зберігається при лінійних комбінаціях відображень: якщо T, S – (l,m)-тензори, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то

$\lambda T + \mu S : (v_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \lambda T(v_1, \ldots, \alpha_m) + \mu S(v_1, \ldots, \alpha_m)$ –

тех (l,m)-тензор.

Спч. (l,m)-тензори у p утворюють векторний простір.

Позн. Він позначається $T_pM^l_m$ або $\underbrace{T_pM^* \otimes \ldots \otimes T_pM^*}_{l} \otimes \underbrace{T_pM \otimes \ldots \otimes T_pM}_{m}$

(Детальніше про конструкцію тензорного добутку векторних просторів див., наприклад, А.И. Кострикин, Ю.И. Манин, Линейная алгебра и геометрия).

Ex. $T_pM^0_0$ традиційно ототожнюють з $\mathbb{R}$ (лін. відображення $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) – скаляри.

$T_pM^1_0$ – лінійні функціонали $\alpha : T_pM \to \mathbb{R}$, тобто $\alpha \in T_pM^*$ (1-форми).

$T_pM^l_0$ – l-лінійні $\alpha : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \to \mathbb{R}$ (l-форми).

$T_pM^0_1$ – лінійні $T_pM^* \to \mathbb{R}$, тобто елементи двічі спряженого простору $T_pM^{**} \simeq T_pM$: при цьому канонічному ізоморфізмі вектору $v \in T_pM$ відповідає функціонал від 1-форм $v : T_pM^* \to \mathbb{R} : \quad v(\alpha) := \alpha(v)$.

$T_pM^1_1$ – білінійні $A : T_pM \times T_pM^* \to \mathbb{R}$. Цей простір канонічно ізоморфний простору лінійних операторів на T_pM: оператору $A : T_pM \to T_pM$ відповідає білінійне $A(v, \alpha) := \alpha(A(v))$ $\forall\, v \in T_pM,\ \alpha \in T_pM^*$. Впр. Це ізоморфізм.

$T_pM^l_1$ – $(l+1)$-лінійні $T : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \times T_pM^* \to \mathbb{R}$. Ан-ко операторам, цей простір ізоморфний простору векторзначних l-лінійних форм $\underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{l} \to T_pM$: якщо T – така форма, то відповідний $T \in T_pM^l_1$ задається умовою
$T(v_1, \ldots, v_l, \alpha) := \alpha(T(v_1, \ldots, v_l))$ $\forall\, v_1, \ldots, v_l \in T_pM,\ \alpha \in T_pM^*$

Впр. Це ізоморфізм.

def. Нехай $T \in T_pM^l_m$, $S \in T_pM^r_s$. Їхнім тензорним добутком зветься $T \otimes S \in T_pM^{l+r}_{m+s}$, що визначений умовою
$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_{l+r}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+s}) := T(v_1, \ldots, v_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \cdot S(v_{l+1}, \ldots, v_{l+r}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+s})$
$\forall\ v_1, \ldots, v_{l+r} \in T_pM,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+s} \in T_pM^*$.

Rem. З $\underset{(l+m)-}{\text{лінійності}}$ $\underset{(r+s)\text{ - лінійності}}{T \text{ і } S}$ випливає $\underset{(l+r+m+s)-}{\text{лінійність}}$ $T \otimes S$, тобто це дійсно $(l+r, m+s)$ - тензор.

Pr. $\forall$ тензорів T, S, R відповідних валентностей і $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\lambda T + \mu S) \otimes R = \lambda\, T \otimes R + \mu\, S \otimes R$$

$$T \otimes (\lambda S + \mu R) = \lambda\, T \otimes S + \mu\, T \otimes R$$

$$(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$$

▷ Впр. △

Rem Тобто $\otimes$ білінійний та асоціативний. Зокрема, тому його можна $\underset{\text{(не розставляючи дужки)}}{\text{ітерувати}}$, розглядаючи добутки вигляду $T_1 \otimes \ldots \otimes T_r$.

Тенз. добуток $\otimes$ перетворює пряму суму $\bigoplus\limits_{l,m=0}^{\infty} T_p M^l_m$ на асоціативну (градуйовану) алгебру (векторний простір з білінійним добутком) - тензорну алгебру $T_p M$.

Rem. Нехай $(x^1, \ldots, x^n)$ - лок. координати в околі p (тобто $\exists$ карта (U, φ), $p \in U$, з такими лок. коорд.). Тоді $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ -

базис T_pM, а $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ - дуальний до нього базис T_pM^*. Розглянемо добутки вигляду $dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \in T_pM^l_m$,

де $i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_m = \overline{1,n}$ - усі можливі набори індексів. За <u>def.</u> тенз. добутку, $\forall\, v_1, \dots, v_l \in T_pM$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in T_pM^*$

$$dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} (v_1, \dots, v_l, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = dx^{i_1}(v_1) \cdot \dots \cdot dx^{i_l}(v_l) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}(\alpha_1)}_{\alpha_1\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}(\alpha_m)}_{\alpha_m\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\right)} \ \textcircled{=}$$

$\leftarrow$ згідно з побудовою ізоморфізма $T_pM^{**} \simeq T_pM$

Якщо $v_i = v_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i = \overline{1,l}$, і $\alpha_i = \alpha_{ij}\, dx^j$, $i = \overline{1,m}$, то це дорівнює (за дуальністю базисів)

$\textcircled{=}\ v_1^{i_1} \dots v_l^{i_l} \alpha_{1 j_1} \dots \alpha_{m j_m}$.

<u>Тв.</u> $\left\{dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\right\}_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_m = 1}^{n}$ - базис $T_pM^l_m$.

$\triangleright$ Доведемо, що $\forall\, T \in T_pM^l_m$ $\exists!$ розкладення T за цією системою:

$$T = T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l}\, dx^{i_1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}} \qquad (*)$$

! Якщо розкл. (*) існує, то $\forall$ набору $i_1,\dots,i_l, j_1,\dots,j_m=\overline{1,n}$ підставимо у T відповідні базисні елементи:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{i_l}}, dx^{j_1},\dots,dx^{j_m}\right) = T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, \underset{\delta^{i_1}_{i_1}}{\underset{\shortparallel}{dx^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)}}\dots\underset{\delta^{j_m}_{j_m}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}(dx^{j_m})}} =$$

$= T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}$, тобто коефіцієнти у (*) визначені однозначно.

$\exists$ Тепер для $T\in T_pM^l_m$ покладемо $T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l} := T\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots, dx^{j_m}\right)$ $\forall\, i_1,\dots,j_m=\overline{1,n}$. Тоді в силу полілінійності T $\forall\, v_1,\dots,v_l\in T_pM$, $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in T_pM^*$ з розкладеннями як у попередньому Lem.:

$$T(v_1,\dots,\alpha_m) = \underset{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}}{\underset{\shortparallel}{v_1^{i_1}}}\dots\underset{dx^{j_m}}{\underset{\shortparallel}{\alpha_{m j_m}}}\, T\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\dots,dx^{j_m}\right) = [\text{попер. Lem}] =$$

$$= T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, dx^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}(v_1,\dots,\alpha_m),$$

тобто дійсно $T = T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, dx^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_m}}$ – вірне (*). ▲

Сл. $\dim T_pM^l_m = n^{l+m}$, де $n=\dim M$.

Rem. Коефіцієнти $T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}$ у (*) називають компонентами тензора T (що відповідають $(x^1,\dots,x^n)$).

Rem. Нехай T має розкл. (*) і нехай $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ - інші лок. координати в околі p. Тоді $\{d\tilde{x}^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{j_m}}\}$ - тенс базис $T_pM^l_m$. Компоненти T у ньому:

$$\tilde{T}^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l} = T\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i_1}},\dots,d\tilde{x}^{j_m}\right) \overset{(*)}{=} T^{s_1\dots s_m}_{k_1\dots k_l}\, dx^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i_1}}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial}{\partial x^{s_m}}\left(d\tilde{x}^{j_m}\right).$$

Cor. (тензорний закон перетворення)

$$\tilde{T}^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l} = T^{s_1\dots s_m}_{k_1\dots k_l}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial\tilde{x}^{i_1}}(p)\dots\frac{\partial x^{k_l}}{\partial\tilde{x}^{i_l}}(p)\,\frac{\partial\tilde{x}^{j_1}}{\partial x^{s_1}}(p)\dots\frac{\partial\tilde{x}^{j_m}}{\partial x^{s_m}}(p) \quad (**)$$

$\forall\, i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_m=\overline{1,n}$

Rem. За допомогою (**) можна визначити (l,m)-тензор у p як відображення з множини карт в околі p у $\mathbb{R}^{n^{l+m}}$ (набір компонент) ан-но def. дотичного вектора {(**) узагальнює правило заміни координат з цього def.}.

Тензорні розшарування і тензорні поля

M - k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

Def. (l,m)-тензорним розшаруванням M зветься (формальне) об'єднання $TM^l_m := \bigcup_{p\in M} T_pM^l_m$. Зокрема, $TM := TM^0_1$ зветься дотичним розшаруванням M.

Rem. Ел-ти TM^l_m зручно записувати у вигляді пар:

$$TM^l_m = \{(p,T) \mid p\in M, T \in T_pM^l_m\}$$

Позначимо через $\pi: TM^l_m \to M: (p,T) \mapsto p$ т.зв. канонічну проекцію.

Rem. Нехай $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ - атлас (з гладкої структури) M і $\forall \alpha \in A$ $\varphi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ - відповідні лок. координати. Тоді $\forall$ $(p,T) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ (тобто такого, що $p \in U_\alpha$) T має розклад $(*)$ у відп. базисі. Покладемо $\forall \alpha \in A$

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{n+n^{l+m}} : \left(p, T = T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, dx^{i_1}_\alpha \otimes\dots\otimes dx^{i_l}_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}_\alpha}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_m}_\alpha}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \big(\underbrace{\varphi_\alpha(p)}_{\in\mathbb{R}^n},\ \underbrace{(T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l})}_{\in\mathbb{R}^{n^{l+m}}}\big).$$

Це, звісно, бієкція. Розглянемо "відображення переходу": $\forall \alpha, \beta \in A$ таких, що $\varnothing \neq \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ $(\Leftrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing)$

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \underset{\overset{\parallel}{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^{n^{l+m}}}}{\psi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))} \to \underset{\overset{\parallel}{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^{n^{l+m}}}}{\psi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))} :$$

(відкриті у $\mathbb{R}^{n+n^{l+m}}$)

$$\left((x^1, \ldots, x^n), (T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_l})\right) \overset{\psi_\alpha^{-1}}{\mapsto} \Big(\varphi_\alpha^{-1}(x^1, \ldots, x^n), \underset{\overset{\parallel}{\tilde{T}^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_l} dx_\beta^{i_1} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\beta^{j_m}}}}{T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_l} dx_\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}}}\Big) \mapsto$$

$$\overset{\psi_\beta}{\mapsto} \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \ldots, x^n), \left(T^{s_1 \ldots s_m}_{q_1 \ldots q_l} \frac{\partial x_\alpha^{q_1}}{\partial x_\beta^{i_1}}(x^1, \ldots, x^n) \ldots \frac{\partial x_\beta^{j_m}}{\partial x_\alpha^{s_m}}(x^1, \ldots, x^n)\right)_{i_1, \ldots, j_m = 1}^{n}\right)$$

в силу тензорного закону перетворення (**). Цей вираз лінійний за $T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_l}$ і має гладкість $k-1$ за $x^1, \ldots, x^n$, бо містить частинні похідні k-гл. відображень переходу (а також самі ці відображення). Тобто $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ – $(k-1)$-гладкі, і $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ дуже схоже на $(k-1)$-гл. атлас. Але на TM^l_m поки що немає навіть топології!

Рм. Нехай M - деяка множина і $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ - множина пар, що складаються з ел-тів покриття M (тобто $M = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$) і бієкцій $\varphi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Нехай при цьому $\forall\, \alpha, \beta \in A$ таких, що $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ множини $\varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ і $\varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ відкриті у $\mathbb{R}^n$ і $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^k(\varphi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta), \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta))$, де $k \in \mathbb{Z}_+$ або $k = \infty$. Тоді

$$\mathcal{T} := \{U \subset M \mid \forall \alpha \in A \ \ \varphi_\alpha(U \cap V_\alpha) \text{ відкрита в } \mathbb{R}^n\}$$

є топологією на M, і, якщо $(M, \mathcal{T})$ хаусдорфовий і з $(\leq)$ зліченною базою, то M - n-вимірний многовид, а $\mathcal{A}$ - його k-гл. атлас.

▷ Зокрема, з умови випливає, що всі $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ - гомеоморфізми.

Перевіримо, що $\mathcal{T}$ - топологія:

$\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \forall \alpha \in A \ \ \varphi_\alpha\left(\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma\right) \cap V_\alpha\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\alpha(U_\gamma \cap U_\alpha)$ відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

$\{U_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{T} \Rightarrow \forall \alpha \in A \ \ \varphi_\alpha\left(\left(\bigcap_{i=1}^m U_i\right) \cap V_\alpha\right) = \bigcap_{i=1}^m \varphi_\alpha(U_i \cap V_\alpha)$ - відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i \in \mathcal{T}$.

$\forall \alpha \in A \quad \psi_\alpha(Q \cap V_\alpha) = Q$ і $\psi_\alpha(M \cap V_\alpha) = \mathbb{R}^n$ відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow Q, M \in \mathcal{T}$.
Отже, $(M, \mathcal{T})$ - дійсно топ. простір. При цьому $\forall \alpha \in A$
$\forall \beta \in A \quad \psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$ відкр. в $\mathbb{R}^n \Rightarrow V_\alpha$ відкрита. Покажемо,
що $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n$ - гомеоморфізм. Це від, тобто треба показати,
що це неперервне відкрите відображення.
$\forall$ відкр. $U \subset \mathbb{R}^n \ \forall \beta \in A \quad \psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(U) \cap V_\beta) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(U \cap \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta))$,
бо обидві множини складаються з $\psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(x))$ для $x \in U$ таких, що
$\psi_\alpha^{-1}(x) \in V_\beta$. Оскільки $\psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ відкр. в $\mathbb{R}^n$, а $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ - гомео-зм,
$\psi_\alpha^{-1}(U)$ відкрита (в топології M, а отже і в індукованій топ.
V_α). Тобто ψ_α неперервне.
$\forall$ відкр. $U \subset V_\alpha \quad U$ відкр. і в топ. M (бо V_α - відкр.) $\Rightarrow$
$\psi_\alpha(U) = \psi_\alpha(U \cap V_\alpha)$ - відкр. в $\mathbb{R}^n$. Тобто ψ_α відкрите.
Таким чином (за умови хаусдорфовості і ($\le$)зліч. бази)
M - n-вимірний многовид, а A - його атлас з відобр.

переходу $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$. Оскільки вони k-гладкі, A - k-гладкий. $\triangle$

Впр. TM^l_m з топологією з Р4. хаусдорфовий і має $(\leq)$ зліч. базу.

Сот. TM^l_m має структуру $(k-1)$-гладкого $(n+n^{l+m})$ - вимірного многовиду. $\underbrace{\text{, топологія і}}$

Впр. Ця гладка структура не залежить від вибору вихідного атласу M (а лише від $\underbrace{\text{гл. структури}}_{\text{топології та}}$ M).

Rem. Зокрема, TM - $2n$-вимірний мн.

При $M = \mathbb{R}^n$ можна взяти вихідний атлас $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ і відповідне ψ_α встановлює дифеоморфізм (∞-гл.) $T(\mathbb{R}^n)^l_m \cong \mathbb{R}^{n+n^{l+m}}$.

Ан-но для відкритих $U \subset \mathbb{R}^n$: $TU^l_m \cong U \times \mathbb{R}^{n^{l+m}}$ (Впр.)

def. (l,m) - тензорним полем на M (перерізом TM^l_m) зветься $T: M \to TM^l_m$ таке, що $\pi \circ T = id_M$.

Rem. Тобто $\forall\ p \in M \quad T: p \mapsto T_p \in T_pM^l_m$.

Оскільки $T_pM^l_m$ - векторний простір, до перерізів можна застосовувати лінійні операції: якщо T, S – (l,m)-тенз. поля на M, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то

$$(\lambda T + \mu S)_p := \lambda T_p + \mu S_p \in T_p M^l_m$$

визначає (l,m)-тенз. поле $\lambda T + \mu S$ на M. Більш того, $\forall$ ф-ції $f: M \to \mathbb{R}$ можна визначити (l,m)-тенз. поле fT умовою

$$(fT)_p := f(p) T_p \in T_p M^l_m.$$

<u>Сл.</u> (l,m)-тензорні поля на M утворюють векторний простір над $\mathbb{R}$ і модуль над кільцем $\mathbb{R}^M$ функцій на M.

<u>Рет.</u> Коли поле $T: M \to TM^l_m$ є гладким відображенням?

Запишемо його лок. представлення у парі карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ з нашого опису TM^l_m. Для цього $\forall p \in U_\alpha$ розкладемо T_p за відповідним базисом:

$$T_p = T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l}(p)\, dx^{i_1}_\alpha \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}_\alpha}.$$

Отримаємо ф-ції $T^{j_1 \dots j_m}_{i_1 \dots i_l} : U_\alpha \to \mathbb{R}$, $i_1, \dots, j_m = \overline{1,n}$. При цьому

$$(\psi_\alpha \circ T \circ \varphi_\alpha^{-1})(x^1,\dots,x^n) = \psi_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\dots,x^n), T_{\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\dots,x^n)}) =$$
$$= T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}(\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\dots,x^n))\, dx_\alpha^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}}) = ((x^1,\dots,x^n),(T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\circ\varphi_\alpha^{-1})(x^1,\dots,x^n)).$$

<u>Сл.</u> $\forall r = \overline{0,k-1}$ (l,m)-тенз. поле $T: M \to TM^l_m \in r$-гладке

$\Leftrightarrow \forall$ карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ з лок. коорд. $(x^1_\alpha,\dots,x^n_\alpha)$ усі т. зв.

локальні компоненти T - ф-ції $T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l} \in C^r(U_\alpha)$; $i_1,\dots,j_m = \overline{1,n}$.

<u>Rem.</u> Зокрема, 0-гладкі поля - неперервні.

<u>Rem.</u> $T|_{U_\alpha} = T^{j_1\dots j_m}_{i_1\dots i_l}\, dx_\alpha^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}}$ - рівність полів на U_α.

Тут $dx_\alpha^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}}: p\in U_\alpha \mapsto dx_\alpha^{i_1}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_m}} \in T_pM^l_m$

позначає також лок. поле на U_α. Воно $(k-1)$-гладке (тобто

$\in C^{k-1}(U_\alpha, \pi^{-1}(U_\alpha))$).

<u>Rem.</u> З цього лок. критерію гладкості випливає, зокрема, що

якщо T, S - r-гладкі, $f, g \in C^r(M)$ (зокрема, якщо $f = \lambda \in \mathbb{R}$,

$g = \mu \in \mathbb{R}$ - константи), то й $fT + gS$ - r-гладке.

<u>Сл.</u> r-гладкі (l,m)-тенз. поля на M утворюють

векторний простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^{\kappa}(M)$.

<u>Rem.</u> При $\dim M > 0$ цей простір ∞-вимірний $(\forall\, l, m, \kappa)$.

<u>Rem.</u> TM^{l}_{m} - приклад поняття векторного розшарування.

Детальніше про такі об'єкти див., наприклад, М.М. Постников, Дифференциальная геометрия (Лекции по геометрии, семестр IV), А.С. Мищенко. Векторные расслоения и их применение.

<u>Ex.</u> $\forall f \in C^{k}(M)\ \forall p \in M\ \ d_p f \in T_pM^{*} = T_pM^{1}_{0}$ і локально $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\, dx^i$. Тому $df : p \mapsto d_p f$ визначає $(k-1)$-гладке $(1,0)$-тенз. поле (1-форму), що локально задається $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

def. Нехай T - ч-м. (l,m)-тенз. поле, а S - ч-м. (s,t)-тенз. поле на M. Їх тензорним добутком зветься

$$T\otimes S : M \to TM^{l+s}_{m+t} : p \mapsto (T\otimes S)_p := T_p \otimes S_p$$

Rem $\forall p$ $T_p \otimes S_p \in T_pM^{l+s}_{m+t}$, тому $T\otimes S$ - $(l+s, m+t)$-тенз. поле на M. Наступні властивості випливають з власт. тенз. добутку у точці, або нескладно перевіряються:

Pr. $\forall$ ч-м. тенз. полів T, S, R $\overbrace{\text{відп.}}^{\text{на } M}$ валентностей, $f, g \in C^4(M)$

1. $T\otimes S$ - ч-м. тенз. поле на M.
2. $(fT + gS)\otimes R = f\,T\otimes R + g\,S\otimes R$ (зокрема, для постійних
3. $T\otimes(fS + gR) = f\,T\otimes S + g\,T\otimes R$ $f = \lambda \in \mathbb{R}$, $g = \mu \in \mathbb{R}$).
4. $(T\otimes S)\otimes R = T\otimes(S\otimes R)$.

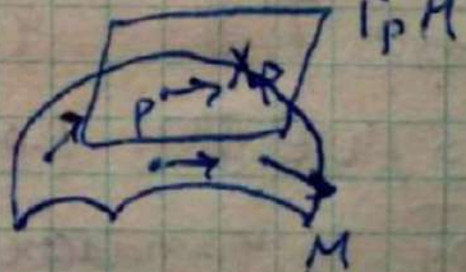
▷ Впр. △

Rem. Асоціативність 4. означає, що тенз. добуток полів можна ітерувати, розглядаючи добутки вигл. $T_1 \otimes \ldots \otimes T_s$ без розставляння дужок. Як і для тензорів у точці, ці власт. означають, що 4-гл. тенз. поля на M для усіх $(l, m) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ (точніше, пряма сума відп. вект. просторів/модулів) утворюють асоціативну (градуйовану) алгебру над $\mathbb{R}$ і над $C^\infty(M)$ – тензорну алгебру M.

Зокрема, "базисні" $\underbrace{\text{тензорні}}^{\text{локальні}}$ поля $\{dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\}$, що використовувались вище, є тензорними добутками (1,0)- і (0,1)-полів на U саме в цьому сенсі.

Властивості векторних полів

M – k-гл. многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.



<u>def.</u> $(0,1)$– тензорне поле на M $X : M \to TM^0_1 =$
$= TM$ зветься векторним полем на M.

Зам. Тобто $X: p \mapsto X_p \in T_pM^0_1 = T_pM$. Для лок. координат $(x^1, \ldots, x^n)$ на U $\forall p \in U$ $X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, де $X^i: U \to \mathbb{R}$ - ф-ції (лок. координати X). Т.ч., $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, де $\frac{\partial}{\partial x^i}$ тепер позначають і поля на U: $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$. $X \in C^r(M, TM)$ (є r-гладким вект. полем) $\Leftrightarrow X^i \in C^r(U)$, $i = \overline{1,n}$ $\forall$ лок. координат. r-гладкі в.п. на M утворюють вект. простір над $\mathbb{R}$ і модуль над $C^r(M)$. Позначатимемо через $\mathfrak{X}^r(M)$. Тут $r = \overline{0,k-1}$.

Озн. Нехай $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $f \in C^l(M)$, де $l = \overline{1,k}$. Похідною f за X (у напрямку X) зветься $X(f): p \in M \mapsto X_p(f) \in \mathbb{R}$.

Зам. Локально (у введених вище позначеннях) $X(f)|_U = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, тому $X(f) \in C^{\min(r, l-1)}(M)$ (3 вірна для конст. $f = \lambda \in \mathbb{R}$ $X(\lambda)=0$). Крім того, в силу властивостей диференціювання за X_p $\forall p \in M$ маємо $\forall f, g \in C^l(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$X(\lambda f + \mu g)(p) = X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g) = (\lambda X(f) + \mu X(g))(p),$$

тобто $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$. У правило Лейбніца:

$X(fg)(p) = X_p(fg) = X_p(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot X_p(g) = (X(f)\cdot g + f\cdot X(g))(p)$.

Тобто $\quad X(fg) = X(f)\cdot g + f\cdot X(g) \qquad (*)$

<u>Сл.</u> Тобто $f \mapsto X(f)$ – лінійне відображення $C^q(M) \to C^{\min(q,k-1)}(M)$, що задовольняє $(*)$. Такі відображення утворюють вект. підпростір у просторі всіх лінійних $C^q(M) \to C^{\min(q,k-1)}(M)$ (підмодуль).

<u>Рем.</u> Виявляється, що диференціювання визначає поле однозначно (так само як диференціювання в точці однозначно визначає дотичний вектор), тобто відображення

$$\mathcal{X}^q(M) \to \left\{\begin{array}{c}\text{лінійні відображення} \\ C^q(M) \to C^q(M), \text{ що задов. } (*)\end{array}\right\}$$

що ставить у відповідність полю X диференціювання $f \mapsto X(f)$ – лінійний ізоморфізм вект. просторів і $C^q(M)$-модулів.

Ідея доведення полягає в тому, що $\forall$ лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U $\quad X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ однозначно визначене ф-ціями $X^i = X(x^i)$, які можна знайти з диференціювання, хоча ф-ції x^i й визначені лише локально.

Def. Нехай гладкість многовиду $k \geq 2$. Дужкою Лі векторних полів $X, Y \in \mathcal{X}^q(M)$, $q \geq 1$, зветься

$$[X,Y] : f \in C^k(M) \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Rem. $X(f), Y(f) \in C^q(M) \Rightarrow [X,Y](f) \in C^{\min(q,q-1)}(M) = C^{q-1}(M)$.

Тобто ми визначили поле $[X,Y] \in \mathcal{X}^{q-1}(M)$ через диференціювання, як пояснювалося у попер. Rem. Це можна зробити в силу:

Твр. $[X,Y] : f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ дійсно задає лінійне $C^q(M) \to C^{q-1}(M)$, що задовольняє (*).

Rem. Часто пишуть $[X,Y] = XY - YX$, де множення означає композицію диференціювань.

Rem. Знайдемо локальне задання дужки Лі у лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U: якщо $[X,Y]|_U = [X,Y]^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $\forall\ i = \overline{1,n}$

$$[X,Y]^i = [X,Y](x^i) = X(Y(x^i)) - Y(X(x^i)) \ominus$$

Нехай $X|_U = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y|_U = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\ominus \; X\Big(Y^j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)}_{\delta^i_j}\Big) - Y\Big(X^j \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)}_{\delta^i_j}\Big) = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(Y^i) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(X^i).$$

Отже, $$[X,Y]\Big|_U = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (**).$$

<u>Впр.</u> Перевірити, що (**) коректно задає у кожній $p \in U$ вектор $$[X,Y]_p = \left(X^j(p)\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(p) - Y^j(p)\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(p)\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$ тобто що виконується правило перетворення координат.

<u>Rem.</u> В силу попер. <u>Впр.</u>, можна визначити $[X,Y] : p \mapsto$ $\mapsto [X,Y]_p$ за допомогою (**), не використовуючи [redacted] диференціювання. З (**) випливає, що це $(k-1)$-гл. поле.

Тоді $\forall f \in C^k(M)$ $\forall$ лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ на U

$$[X,Y](f)\Big|_U = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} = X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) -\right.$$

$$- X^j Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) + Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \ominus$$

Оскільки $\forall\, i, j = \overline{1,n}$

$$X^j Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = [i \leftrightarrow j] = X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \left[\substack{f\in C^r(M)\\ k \geq 2}\right] = X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

тому члени з другими похідними скорочуються:

$$= \left(X(Y(f)) - Y(X(f)) \right)\Big|_u .$$

Тобто ці два def. $[X,Y]$ узгоджені.

Rem. Зокрема, $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \quad \forall\, i,j=\overline{1,n}$ (з будь-якого def.).

Pr. (властивості дужки Лі) $\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}^r(M)$, $f \in C^r(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $[X,Y] = -[Y,X]$ (кососиметричність).
2. $[X+Y,Z] = [X,Z]+[Y,Z]$ і $[X,Y+Z] = [X,Y]+[X,Z]$.
3. $[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)X$ і $[X,fY] = f[X,Y] + X(f)Y$

(зокрема, $[\lambda X, Y] = \lambda[X,Y] = [X,\lambda Y]$).

4. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (тотожність Якобі).

Rem. У 4. вважаємо $r \geq 2$, тому $k \geq 3$.

2. і 3. для λ означають, що $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^r(M) \to \mathfrak{X}^{r-1}(M)$ білінійне. Зокрема, при $k = r = \infty$ дужка Лі задає на

$\mathfrak{X}^\infty(M)$ структуру алгебри (над $\mathbb{R}$), точніше, алгебри Лі в сенсі 1. і 4.

▷ 1. $[Y,X] = YX - XY = -[X,Y]$.

2. $[X+Y,Z] = (X+Y)Z - Z(X+Y) = \left[\begin{matrix}\text{композиція диф.}\\ \text{дистрибутивна}\end{matrix}\right] =$

$= \underline{XZ} + \underline{YZ} - \underline{ZX} - \underline{ZY} = [X,Z] + [Y,Z]$, друге ан-но (або з 1.)

3. $\forall g \in C^k(M)$ $[fX,Y](g) = (fX)(Y(g)) - Y((fX)(g)) \overset{(*)}{=} fX(Y(g)) -$
$- Y(f)X(g) - fY(X(g)) = (f[X,Y] - Y(f)X)(g)$, друге ан-но.

4. $[[X,Y],Z] = [X,Y]Z - Z[X,Y] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$ (композиція диференціювань асоціативна). Розписуючи так само $[[Y,Z],X]$ та $[[Z,X],Y]$ і приводячі подібні, отримаємо 0 (впр.). ◭

def. Крива $\gamma \in C^{k+1}((a,b),M)$ зветься інтегральною траєкторією (інтегральною кривою) поля $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, якщо $\forall t \in (a,b)$ $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$.

Ex. $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $X_{(x,y)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

Якщо $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ задає інт. траєкторію,

то $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$,

тобто $\gamma(t) = (C_1\cos t + C_2\sin t,\ C_1\sin t - C_2\cos t)$ – кола з центром в $(0,0)$.

Пр. 1 (існування) $\forall X \in \mathcal{X}^r(M)$, $r \geq 1$ $(\Rightarrow k \geq 2)$ $\forall p \in M$ $\exists \varepsilon > 0$, $\gamma \in C^{r+1}((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ такі, що $\gamma(0) = p$ (у такому випадку говорять, що крива проходить через p) і γ – інт. тр. X.

2. (єдиність). Нехай $\gamma, \mu \in C^{r+1}((a,b), M)$ – інт. тр. $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Якщо $\exists\, t_0 \in (a,b)$ таке, що $\gamma(t_0) = \mu(t_0)$, то $\gamma = \mu$.

▷ У лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$ на U будемо шукати γ з лок. заданням $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$. Якщо $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то умова $\gamma' = X_\gamma$ має вигляд

$(\gamma^i)' = X^i(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, $i = \overline{1,n}$ (тут використали лок. задання X^i)

Разом з умовами $\gamma^i(t_0)=x_0^i$, $i=\overline{1,n}$ ($\Leftrightarrow \gamma(t_0)=p$, де $(x_0^1,\dots,x_0^n)$ – координати p) це задача Коші для системи ЗДР 1-го порядку з гладкими X^i. Тоді, зокрема $\exists\, \varepsilon>0$ і $\exists$ розв'язок $\{\gamma^i\in C^{r+1}((-\varepsilon,\varepsilon),\mathbb{R})\}_{i=1}^{n}$ з $\gamma^i(0)=x_0^i$, $i=\overline{1,n}$.

Це доводить <u>1</u>. Властивість <u>2</u>. для кривих $\gamma:(a,b)\to U$ випливає з єдиності розв'язку задачі Коші.

<u>Впр.</u> Вивести звідси <u>3</u>. для загального випадку (використати лему Лебега). ▲

<u>def.</u> $X\in\mathfrak{X}^r(M)$ $(r\geq 1)$ називається повним, якщо $\forall\, p\in M$ $\exists$ інт. тр. $\mathbb{R}\to M$ поля X, що прох. через p (тобто $\exists\, t_0:\ \gamma(t_0)=p$).

<u>Ex.</u> Поле з минулого <u>Ex.</u> повне. $X=\frac{d}{dt}$ – неповне на $(a,b)\subset\mathbb{R}$, якщо $(a,b)\neq\mathbb{R}$: $\forall$ його інт. тр. має вигляд

$\gamma(t)=t+C$ і визначена на $(a-C,\ b-C)\neq\mathbb{R}$.

<u>Впр.</u> Якщо $\operatorname{supp} X := \{p \mid X_p\neq 0\}$ міститься у компактн[illegible]ім $K\subset M$, то X повне.