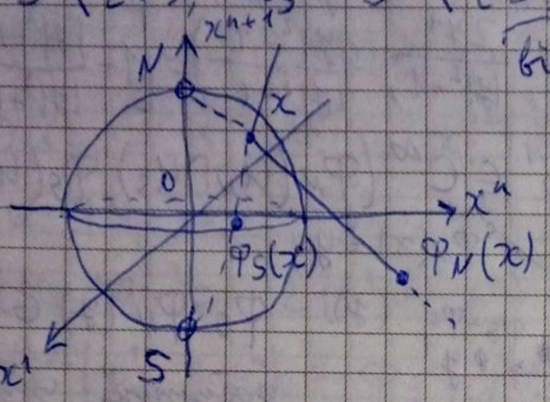
$M = S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i (x^i)^2 = 1\}$

$\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$: $N = (0, \dots, 0, 1)$, $S = (0, \dots, 0, -1)$,

$U_N = S^n \setminus \{N\}$, $\underbrace{U_S = S^n \setminus \{S\}}_{\text{відкриті}}$, φ_N, φ_S – стереогр. проекції;



$\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^n$,

$\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^n$.

Пряма Nx для $x = (x^1, \dots, x^{n+1})$:

$$y^1 = t x^1$$
$$\dots$$
$$y^n = t x^n$$
$$y^{n+1} = 1 + t(x^{n+1} - 1)$$

$$y^{n+1} = 0 : \quad t = \frac{1}{1 - x^{n+1}}$$

$\varphi_N(x) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\right)$ – неперервне, від U_N в $\mathbb{R}^n$.

Ан-но, $\varphi_S(x) = \left(\frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}}\right)$ – неперервне, від U_S в $\mathbb{R}^n$.

Обернене: нехай $\varphi_N(x) = y$, тобто

$$(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\right)$$

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 = \frac{1}{(1 - x^{n+1})^2} \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = [x \in S^n] = \frac{1 - (x^{n+1})^2}{(1 - x^{n+1})^2} = \frac{1 + x^{n+1}}{1 - x^{n+1}}$$

$$|y|^2 (1 - x^{n+1}) = 1 + x^{n+1}$$

$$x^{n+1} = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \qquad (\in [-1, 1))$$

$1 - x^{n+1} = \frac{2}{|y|^2 + 1}$, $x^i = y^i (1 - x^{n+1})$, $i = \overline{1, n}$, тобто

$\varphi_N^{-1}(y) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}\right)$ – неперервне $\mathbb{R}^n \to U_N$

Ан-но, $\varphi_S^{-1}(y) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2 + 1}, \frac{1 - |y|^2}{|y|^2 + 1}\right)$ – непер. $\mathbb{R}^n \to U_S$.

Отже, φ_N, φ_S – гомеоморфізми, $\mathcal{A}$ – атлас, S^n – n-вим. многовид.

Відображення переходу: $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N \cap U_S) \to \varphi_S(U_N \cap U_S)$:

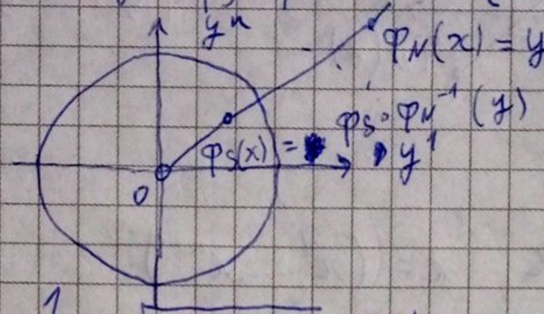
$U_N \cap U_S = S^n \setminus \{N, S\}$,

$\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\quad \forall\, y \neq 0$; $\quad y = (y^1, \dots, y^n)$

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \varphi_S\left(\frac{2y^1}{|y|^2+1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right) = \left[1 + \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} = \frac{2|y|^2}{|y|^2+1}\right] =$$

$$= \left(\frac{y^1}{|y|^2}, \dots, \frac{y^n}{|y|^2}\right).$$ Тому $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} \in C^\infty(\varphi_N(U_N \cap U_S), \varphi_S(U_N \cap U_S))$

Це інверсія:



$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y) \in Oy$, і добуток їхніх модулів:

$$|\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(y)|\,|y| = \frac{1}{|y|^2}\sqrt{\sum_i (y^i)^2} \cdot |y| = 1.$$

$(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})^{-1} = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ – те ж відображення, тож C^∞

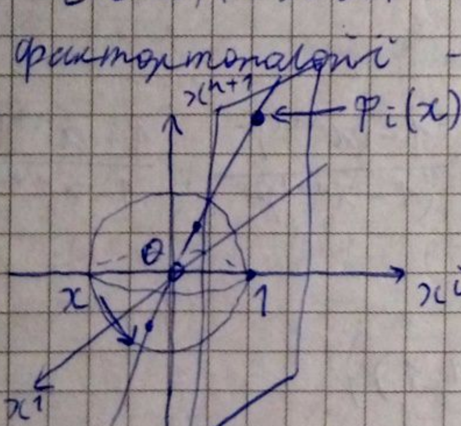
Отже, $\mathcal{A}$ – ∞-ж., задає ∞-гладку структуру на S^n.

$\mathbb{R}P^n = \{(x^1 : \dots : x^{n+1})\}$, де $(x^1, \dots, x^{n+1}) \neq 0$, ~~що те ж, що з 0~~

$(x^1 : \dots : x^{n+1}) = \{(\lambda x^1, \dots, \lambda x^{n+1}) \mid \lambda \neq 0\}$ – пряма в $\mathbb{R}^{n+1}$ (без 0),

$(x^1 : \dots : x^{n+1}) = (y^1 : \dots : y^{n+1}) \iff \exists\, \lambda \neq 0 : y^i = \lambda x^i,\ i = \overline{1, n+1}$,

$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$; $U_i = \{(x^1 : \dots : x^{n+1}) \mid x^i \neq 0\}$ – відкр., у фактортопології – прямі $\{x^i = 0\}$ $\not\subset$.



$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$: $\varphi_i(x^1 : \dots : x^{n+1})$ – точка перетину відп. прямої і гіперплощини $\{x^i = 1\}$ (без координати 1);

$\lambda x^i = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x^i}$.

$$\varphi_i(x^1 : \dots : x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$ – біє, неперер.

Обернене: нехай $\varphi_i(x) = y$, тобто

$$(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i}\right),$$

$(x^1, \dots, x^{n+1})$ треба відновити з точністю до множення на $\lambda \neq 0$. Наприклад, при $x^i = 1$:

$(x^1:\ldots:x^{n+1}) = \varphi_i^{-1}(y^1,\ldots,y^n) = (y^1:\ldots:y^{i-1}:1:y^i:\ldots:y^n)$,
це неперервне $\mathbb{R}^n \to U_i$. Отже, φ_i – гомеоморфізми, $\mathbb{R}P^n$ – n-вим. многовид, $\mathcal{A}$ – атлас. Відобр. переходу: $\forall i, j$

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$

$U_i \cap U_j = \{(x^1:\ldots:x^{n+1}) \mid x^i \neq 0, x^j \neq 0\}$. Нехай $i < j$.

$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(y^1,\ldots,y^n) \mid y^{j-1} \neq 0\}$ – відкр.

$\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(y^1,\ldots,y^n) \mid y^{i} \neq 0\}$ – відкр.

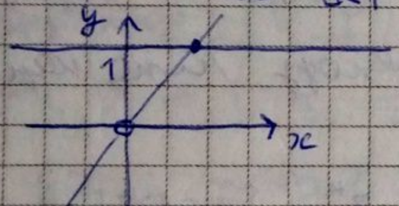
$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y^1,\ldots,y^n) = \varphi_j(y^1:\ldots:y^{i-1}:1:y^i:\ldots:y^{j-1}:\ldots:y^n) =$$

$$= \left(\frac{y^1}{y^{j-1}},\ldots,\frac{y^{i-1}}{y^{j-1}},\frac{1}{y^{j-1}},\frac{y^i}{y^{j-1}},\ldots,\frac{y^{j-2}}{y^{j-1}},\frac{y^j}{y^{j-1}},\ldots,\frac{y^n}{y^{j-1}}\right)$$ – ∞-гладке.

Ан-но $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$.

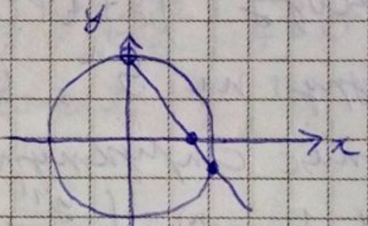
Отже, $\mathcal{A}$ – ∞-гл., задає стр. ∞-гл. многовида на $\mathbb{R}P^n$.

Що таке $\mathbb{R}P^1$?



$(x:y)\quad y \neq 0$

$\xmapsto{\varphi_2} \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \xmapsto{\varphi_N^{-1}}$



$$\left(\frac{2\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}, \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\right) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$(1:0) \mapsto (0,1)$ – вірна та ж формула!

Отже, побудували бієкцію $F : \mathbb{R}P^1 \to S^1$.

Введено атласи на $\mathbb{R}P^1$ і S^1 як вище. Тоді в парі (U_2, φ_2) і (U_N, φ_N) лок. задання $\varphi_N \circ F \circ \varphi_2^{-1} : u \mapsto u$ за побудовою (бо там $F = \varphi_N^{-1} \circ \varphi_2$). Воно ∞-гл. в обидві боки. Залишилося перевірити для якоїсь пари карт в околах $(1:0)$ і $(0,1)$, скажімо, (U_1, φ_1) і (U_S, φ_S):

$$(\varphi_S \circ F \circ \varphi_1^{-1})(u) = \varphi_S(F(1:u)) = \left[\begin{array}{ll} \varphi_S\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right), & u \neq 0 \\ \varphi_S(0,1), & u = 0 \end{array}\right. =$$

$$= \left[1 + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{2}{1+u^2}\right] = u.$$ Теж ∞-гл. в обидва боки.

Отже, F – дифеоморфізм.