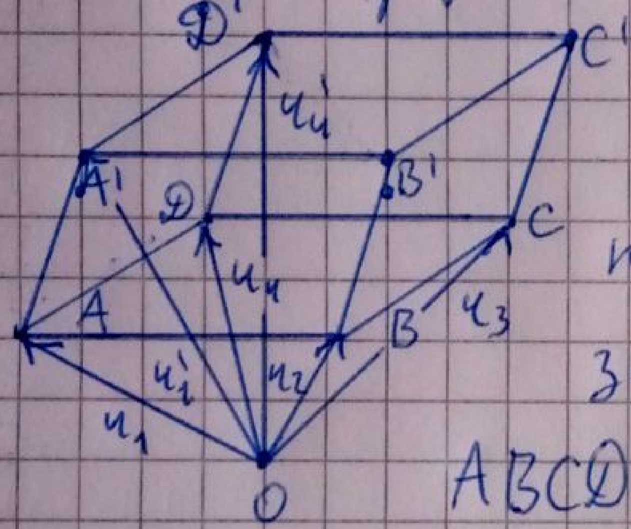
$\underline{33}$ $ABCDA'B'C'D'$ – паралелепіпед, r_1, r_2, r_3, r_1' – радіуси-вектори A, B, C, A' відп.

Знайти радіуси-вектори D, B', C', D'.



Використаємо (або повторимо) розв'язок задачі $\underline{32}$:

$ABCD$ – паралелограм $\Rightarrow r_4 = r_1 + r_3 - r_2$,

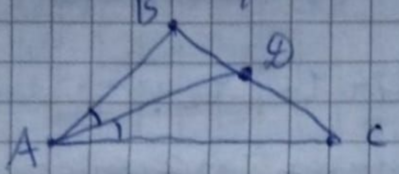
$ABB'A'$ – паралелограм $\Rightarrow$ ...

$ADD'A'$ – паралелограм $\Rightarrow r_4' = r_1' + r_4 - r_1 =$

$= r_1' + \cancel{r_1} + r_3 - r_2 - \cancel{r_1} = r_1' + r_3 - r_2$ (це ж випливає з того, що $A'BCD'$ – паралелограм)

$BCC'B'$ – паралелограм $\Rightarrow$ ...

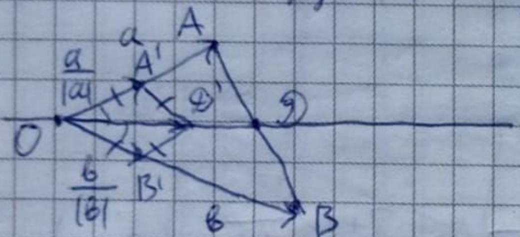
37. AD – бісектриса внутрішнього кута A трикутника ABC. Виразити $\overline{AD}$ через $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.



D ділить BC у відношенні $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}$ $\left(\text{бо } \frac{BD}{DC} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}\right)$.

З 34., $$\overline{AD} = \frac{\overline{AB} + \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}\overline{AC}}{1 + \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}} = \frac{|\overline{AC}|\overline{AB} + |\overline{AB}|\overline{AC}}{|\overline{AC}| + |\overline{AB}|}.$$

22. З точки O виходять $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$. Знайти який-небудь вектор, що іде по бісектрисі $\angle AOB$.



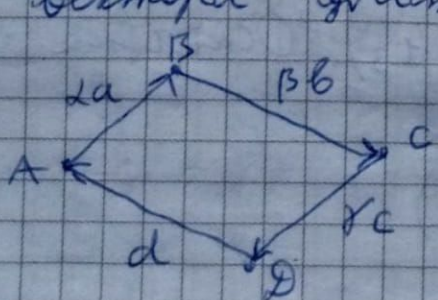
Звичайно, можна взяти $\overline{OD}$ – бісектрису кута O в ΔOAB. За 37., $\overline{OD} = \frac{|b|a + |a|b}{|a| + |b|}$.

Але можна взяти і будь-який кратний, наприклад, $|b|a + |a|b$, або, якщо поділити на $|a||b|$:
$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$ – це діагональ $\overline{OD'}$ ромба $OA'D'B'$, сторони якого $\overline{OA'}$ і $\overline{OB'}$ співнапрямлені з $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ відповідно, але мають довжини 1 (утворюються з a і b нормуванням).

27. Дані вектори своїми координатами в деякому базисі:

$a = (1, 5, 3)$, $b = (6, -4, -2)$, $c = (0, -5, 7)$, $d = (-20, 27, -35)$.

Знайти α, β, γ такі, що $\alpha a, \beta b, \gamma c, d$ утворюють замкнену ламану, якщо початок кожного наступного вектора сумістити з кінцем попереднього.



Це замкнена ламана $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha a - \beta b + \gamma c + d = 0$
(див. 7.)

Тобто:

$$0 = (\alpha, 5\alpha, 3\alpha) + (6\beta, -4\beta, -2\beta) + (0, -5\gamma, 7\gamma) + (-20, 27, -35) =$$

$$= (\alpha + 6\beta - 20,\ 5\alpha - 4\beta - 5\gamma + 27,\ 3\alpha - 2\beta + 7\gamma - 35);$$

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta - 20 = 0 \\ 5\alpha - 4\beta - 5\gamma + 27 = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 7\gamma - 35 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 20 - 6\beta;$$

$$\begin{cases} 100 - 30\beta - 4\beta - 5\gamma + 27 = 0 \\ 60 - 18\beta - 2\beta + 7\gamma - 35 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -34\beta - 5\gamma + 127 = 0 \\ -20\beta + 7\gamma + 25 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot 5 \end{array} \right. +$$

$$-238\beta - 100\beta + 889 + 125 = 0$$

$$338\beta = 1014$$

$$\beta = 3;\quad \alpha = 20 - 18 = 2;\quad -60 + 7\gamma + 25 = 0 \Rightarrow \gamma = 5$$

28(г). Чи є трійка векторів a, b, c лінійно залежною (компланарною)? Якщо так, представити c як лінійну комбінацію a і b.

$a = (6, 4, 2)$, $b = (-9, 6, 3)$, $c = (-3, 6, 3)$

$\{a, b, c\}$ звуться лінійно залежними, якщо $\exists\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, хоча б одне з яких ненульове ($\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 0$) такі, що $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$; лінійно незалежними у протил. випадку.

Геометрично лін. залежність означає компланарність: вектори паралельні деякій площині (а для двох векторів — колінеарність).

Будемо шукати λ, μ, ν: $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$.

$$\begin{cases} 6\lambda - 9\mu - 3\nu = 0 \\ 4\lambda + 6\mu + 6\nu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu + 3\nu = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2\lambda - 3\mu - \nu &= 0 \\ 2\lambda + 3\mu + 3\nu &= 0 \end{aligned}$$

Два останніх рівн. пропорційні (це вже означає лін. залежність). З перших двох, додаючи: $4\lambda + 2\nu = 0$, $\nu = -2\lambda$, тоді $0 = 2\lambda - 3\mu - \nu = 4\lambda - 3\mu$, $\mu = \frac{4}{3}\lambda$.

Тобто $(\lambda, \frac{4}{3}\lambda, -2\lambda)$ є розв'язком системи $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, ненульовим при $\lambda \neq 0$.

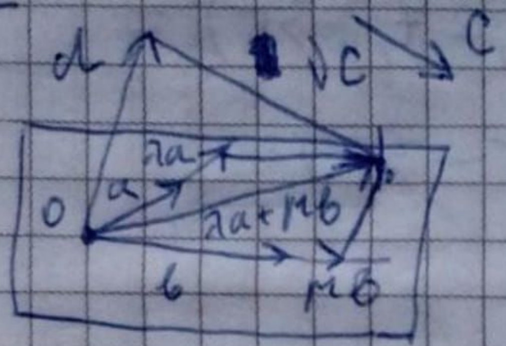
Наприклад, для $\lambda = 3$: $(\lambda, \mu, \nu) = (3, 4, -6)$,

$3a + 4b - 6c = 0$, тому

$$c = \frac{1}{6}(3a + 4b) = \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b$$

($\{a, b\}$ неколінеарні, тому утворюють базис площини, якій $\parallel a, b, c$, тому c можна через них виразити).

31. Дані вектори $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, -2, 1)$, $c = (4, 0, 3)$, $d = (16, 10, 18)$. Знайти проекцію d на площину, що визначена a і b, якщо напрям проектування паралельний c.



$$d + \nu c = \lambda a + \mu b$$

$$\lambda(1,2,3) + \mu(2,-2,1) - \nu(4,0,3) = (16,10,18)$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu - 4\nu = 16 \\ 2\lambda - 2\mu = 10 \\ 3\lambda + \mu - 3\nu = 18 \end{cases}$$

$$\lambda - \mu = 5$$

До першого додаємо друге, до третього – друге, поділене на 2!

$$\begin{cases} 3\lambda - 4\nu = 26 & \cdot 4 \\ 4\lambda - 3\nu = 23 & \cdot 3 \end{cases}$$

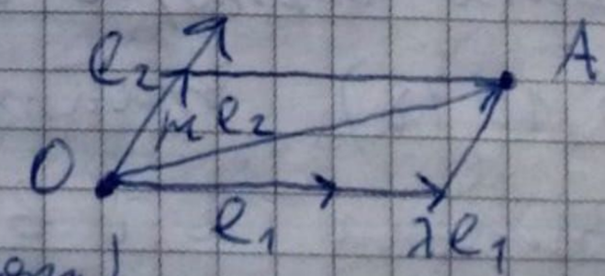
Віднімемо: $-16\nu + 9\nu = 104 - 69 = 35$, $\nu = -5$.

Проекція: $d + \nu c = (16, 10, 18) - 5(4, 0, 3) =$
$= (-4, 10, 3)$

AD, BC – основи

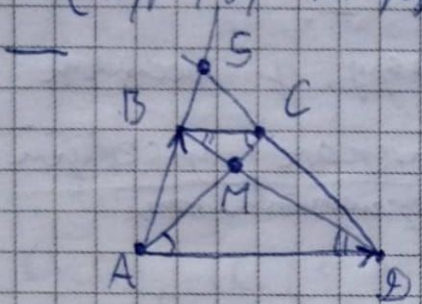
49. ABCD – трапеція, $\frac{AD}{BC} = 3$. У афінній системі координат $\{A, \overline{AD}, \overline{AB}\}$ знайти координати A, B, C, D, точки M перетину діагоналей, точки S перетину AB і CD.

Афінна система координат:
$\{O, e_1, e_2\}$, де O – точка,
$\{e_1, e_2\}$ – базис (2 неколінеарних вектори)



$\forall A$ розкладемо її радіус-вектор за цим базисом:
$\exists!\ \lambda, \mu:\ \overline{OA} = \lambda e_1 + \mu e_2$. Тоді (λ, μ) – координати
A у цій афінній с.к.

Ап-то у просторі: $\{O, e_1, e_2, e_3\}$, де $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис (некомпланарні). $\forall A\ \overline{OA} = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$, (λ, μ, ν) – координати A



$\Delta ADM \sim \Delta CBM$: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} = \frac{AD}{CB} = 3$

Тобто $\frac{\overline{BM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{1}{3}$, M ділить $\overline{BD}$ і $\overline{CA}$ у відн. $\frac{1}{3}$,

Або: $\frac{\overline{DM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = 3$, M ділить $\overline{DB}$ і $\overline{AC}$ у відн. 3.

$\Delta ADS \sim \Delta BCS$: $\frac{AS}{BS} = \frac{DS}{CS} = \frac{AD}{BC} = 3$.

Тобто $\overline{AB} + \overline{BS} = \overline{AS} = 3\overline{BS}$, $\overline{AB} = 2\overline{BS}$, B ділить AS у відн. 2;
$\frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = -3$, S ділить AB у відн. -3;

Координати:

$\overline{AA} = 0 = 0 \cdot \overline{AD} + 0 \cdot \overline{AB}$: $A(0,0)$.

$\overline{AB} = 0 \cdot \overline{AD} + 1 \cdot \overline{AB}$: $B(0,1)$

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AD} + 1 \cdot \overline{AB}$: $C\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

$\overline{AD} = 1 \cdot \overline{AD} + 0 \cdot \overline{AB}$: $D(1,0)$

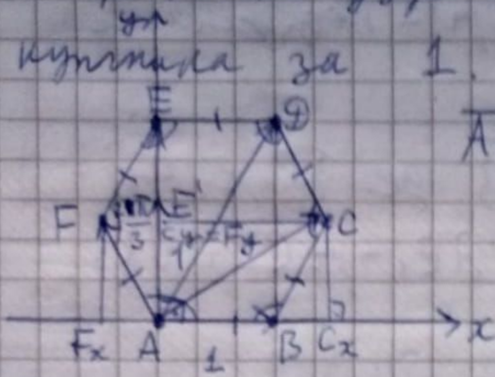
$\overline{AM} = [\text{ф-ла з } \underline{34}] = \frac{\overline{AD} + 3\overline{AB}}{1+3} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AD} + \frac{3}{4}\overline{AB}$: $M\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$,

$\overline{AS} = \overline{AB} + \overline{BS} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} = 0 \cdot \overline{AD} + \frac{3}{2}\overline{AB}$: $S\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Або за ф-лою з $\underline{34}$: $\overline{AS} = \frac{\overline{AA} - 3\overline{AB}}{1-3} = \frac{3}{2}\overline{AB}$.

45. ABCDEF – правильний шестикутник. Знайти координати його вершин у ~~[illegible]~~ прямокутній

декартовій системі з початком у A, осями, що напрямлені уздовж $\overline{AB}, \overline{AE}$, приймаючи сторону шестикутника за 1.



$\overline{AB} \perp \overline{AE}$, тому система прямокутна.

Якщо прийняти сторону за 1, $AB = 1$, $AE = 2\cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Довжини базисних векторів повинні бути 1.

Отже, координати у цій системі – це коорд. у системі $\{A, \overline{AB}, \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AE}}_{\overline{AE'}}\}$. Або: довжини (зі знаком) проекцій ортогональних точки на O_x і O_y відп.

$\overline{AA} = 0$; $A(0,0)$ (початок координат).

$\overline{AB} = 1\cdot\overline{AB} + 0\cdot\overline{AE'}$: $B(1,0)$. Проекції: $B_x = B = 1$, $B_y = 0$.

$\overline{AC} = \overline{AC_x} + \overline{AC_y} =$

$AC_x = AB + BC_x = 1 + 1\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$, $AC_y = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

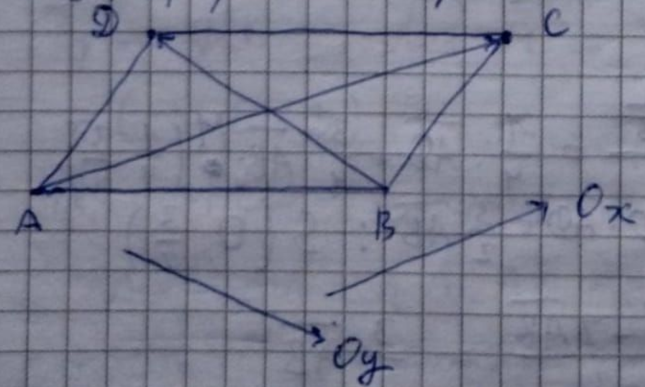
$= \frac{3}{2}\overline{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AE'}$: $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AE} = \overline{AB} + \sqrt{3}\,\overline{AE'}$: $D(1, \sqrt{3})$. $D_x = B$, $D_y = E$.

$\overline{AE} = 0\cdot\overline{AB} + \sqrt{3}\cdot\overline{AE'}$: $E(0, \sqrt{3})$

$\overline{AF} = \overline{AF_x} + \overline{AF_y} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AE'}$: $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

50. ABCD – паралелограм. У деякій афінній с.к. $A(-1,3)$, $B(2,1)$, AC паралельна O_x, BD – O_y. Знайти C, D.

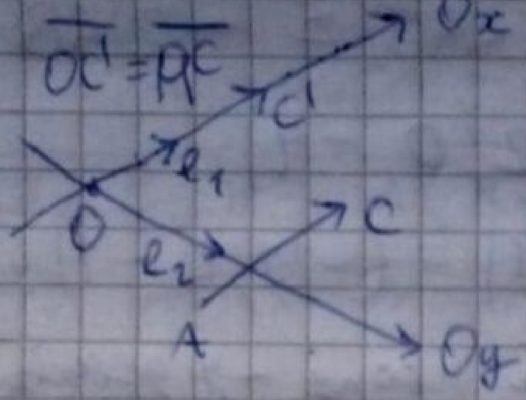


Шукаєм $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$

$\overline{AC} = (x_C - (-1), y_C - 3)$ (це так $\forall$ афінній с.к.)

$\overline{AC} \parallel O_x$: $y_C - 3 = 0$, $y_C = 3$. $\boxed{\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = \overline{OB} - \overline{OA}}$

$\overline{OC'} = \overline{AC}$



$$\overline{AC} = \overline{OC'} = \lambda \cdot e_1 + \underline{0} \cdot e_2$$

Ан-но, $\overline{BD} = (x_D - 2, y_D - 1) \parallel O_x \Rightarrow x_D - 2 = 0,\ x_D = 2.$

Отже, $C(x_C, 3)$, $D(2, y_D)$.

ABCD - паралелограм: $\overline{AB} = \overline{DC}$:

$(2-(-1), 1-3) = (x_C - 2, 3 - y_D)$

$x_C - 2 = 3,\ x_C = 5;\ 3 - y_D = -2,\ y_D = 5.$

Отже, $C(5, 3)$, $D(2, 5)$