Домашнє завдання до заняття 16.09.24

(1.6 лек.) Довести, що сімейство підмножин (відкритого або замкненого) круга на площині, що складається з усіх його діаметрів і центра, є базою деякої топології.

(4.F) Назвемо підмножину A метричного простору (X, ρ) *обмеженою*, якщо відстані між його точками обмежені зверху: існує таке $d > 0$, що $\rho(x, y) < d$ для будь-яких $x, y \in A$. Довести, що A обмежена тоді й тільки тоді, коли міститься у деякій відкритій кулі $B_\varepsilon(x)$.

(4.32(1)) Нехай ρ_1 і ρ_2 – метрики на одній й тій самій множині X. Довести, що їх сума $\rho_1 + \rho_2$ і максимум $\max\{\rho_1,\, \rho_2\}$ – теж метрики на X (ці операції розуміємо у поточковому сенсі, тобто $(\rho_1 + \rho_2)(x, y) = \rho_1(x, y) + \rho_2(x, y)$ для будь-яких $x, y \in X$, і аналогічно для максимума).

Додаткові задачі (не оцінюються)

(3.6) Довести, що усі можливі нескінченні арифметичні прогресії утворюють базу деякої топології на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$.

(3.7) Довести за допомогою топології з попередньої задачі, що множина простих чисел нескінченна (підказка: показати, що у іншому випадку одноточкова множина $\{1\}$ була б відкритою у цій топології).

(4.6) Інфімум чисел d з формулювання задачі **4.F**, або, що те ж саме,

$$\sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$$

зветься *діаметром* множини A. Як пов'язані діаметр A і радіус ε кулі $B_\varepsilon(x) \supset A$ з задачі **4.F**?

(4.32(2)) Чи будуть для метрик ρ_1 і ρ_2 на множині X метриками також їхні добуток $\rho_1\,\rho_2$, мінімум $\min\{\rho_1,\, \rho_2\}$ та частка $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ (якщо покласти $\frac{\rho_1}{\rho_2}(x, x) = 0$ для кожної $x \in X$)?