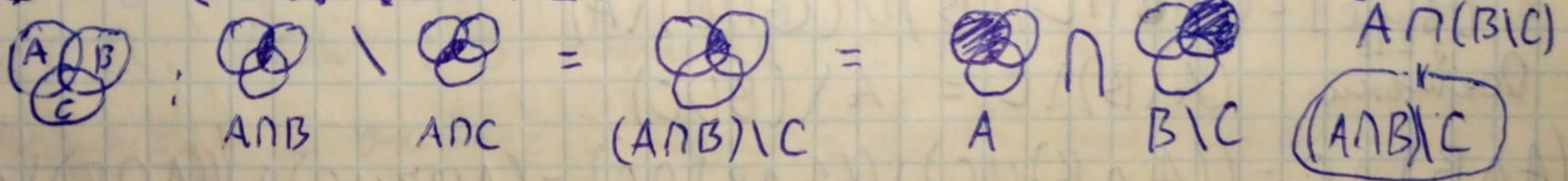
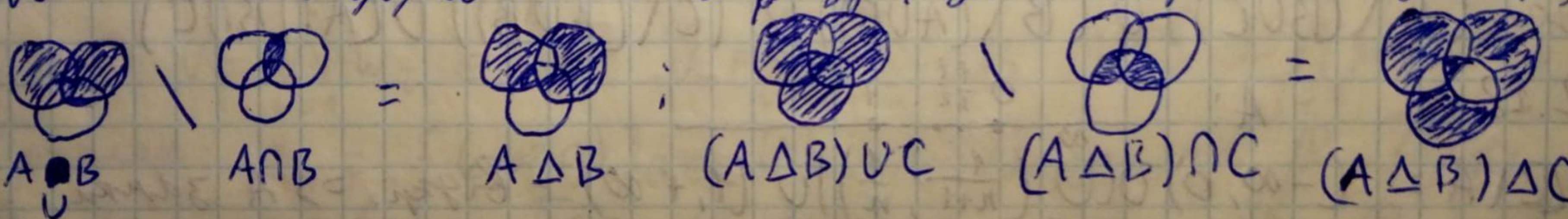
1.13. $x \in (A\cap B)\setminus(A\cap C) \Leftrightarrow (x\in A\cap B)\wedge(x\notin A\cap C) = (x\in A \wedge$
$\wedge\, x\in B)\wedge(x\notin A \vee x\notin C) = \underbrace{(x\in A\wedge x\in B\wedge x\notin A)}_{\text{неможливо}} \vee (x\in A\wedge x\in B\wedge x\notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\in A\wedge(x\in B)\wedge(x\notin C) \Leftrightarrow x\in A \wedge x \in B\setminus C \Leftrightarrow x\in A\cap(B\setminus C)$.



1.15. $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ – достатньо показати, що обидві множини дорівнюють виразу, що симетричний за A, B, C



$A\Delta(B\Delta C)$ – аналогічно.

Згадаємо, що $A\Delta B = A\setminus B\cup B\setminus A = A\cup B\setminus A\cap B$ (1.14).

Покажемо, що $(A\Delta B)\cup C = (A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\setminus C)$

Вираз справа: $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\setminus C) = (A\cup B\cup C)\cap(X\setminus(A\cap B\cap(X\setminus C))) =$
$= (A\cup B\cup C)\cap((X\setminus A\cap B)\cup(X\setminus\underbrace{(X\setminus C)}_{=C}))) = (A\cup B\cup C\cap X\setminus(A\cap B))\cup$
$\cup\, (\underbrace{(A\cup B\cup C)\cap C}_{=C}) = (A\cup B\cup C\setminus A\cap B)\cup C = (A\cup B\setminus A\cap B)\cup C = (A\Delta B)\cup C.$

$= (A\cup B\setminus A\cap B)\cup(C\setminus A\cap B)\cup C$, але $C\setminus A\cap B\subset C$; $(A\cup B)\setminus C = A\setminus C\cup B\setminus C$

$(A\Delta B)\cap C = (A\setminus B \cup B\setminus A)\cap C = ((A\setminus B)\cap C)\cup((B\setminus A)\cap C) =$

$=$ [див. вище з 1.13] $= ((A\cap C)\setminus B)\cup((B\cap C)\setminus A)$

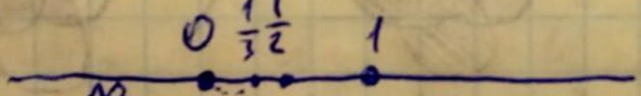
Оскільки $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$,

$(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B)\cup C)\setminus((A\Delta B)\cap C) = (A\cup B\cup C)\setminus(((A\cap B)\setminus C)\cup$

$\cup((A\cap C)\setminus B)\cup((B\cap C)\setminus A))$ – симетричний вираз.

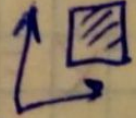
Або $(A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus(A\cup C))\cup(C\setminus(A\cup B))\cup(A\cap B\cap C)$.

2.12 A:



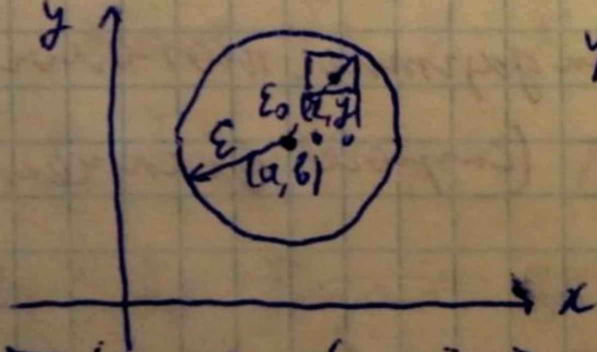
$\mathbb{R}\setminus A = (-\infty,0)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right)\cup(1,+\infty)$ – відкр. => A замкн.

3.Ⓓ Σ^2 – відкриті круги у $\mathbb{R}^2$: 

Σ^∞ – відкриті квадрати у $\mathbb{R}^2$, сторони яких $\parallel O_x$ і O_y : 

Показати, що кожен ел-т Σ^2 – об'єднання ел-тів Σ^∞.

Довільний ел-т Σ^2 має вигляд $U = \{(x,y) \mid \underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2}_{\rho_2((x,y),(a,b))^2} < \varepsilon^2\}$;



Нехай (x_0,y_0) довільна $\in U$ і $\varepsilon_0 = \rho_2((x_0,y_0),(a,b)) = \sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2} < \varepsilon$. Розглянемо ел-т Σ^∞: квадрат з центром (x_0,y_0) і стороною $\sqrt{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)$ (тоді його діагональ – $2(\varepsilon-\varepsilon_0)$). Його можна описати:

$$V := \{(x,y) \mid \underbrace{\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}}_{\rho_\infty((x,y),(x_0,y_0))} < \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\}.$$

Тоді $\forall\ (x,y) \in V$

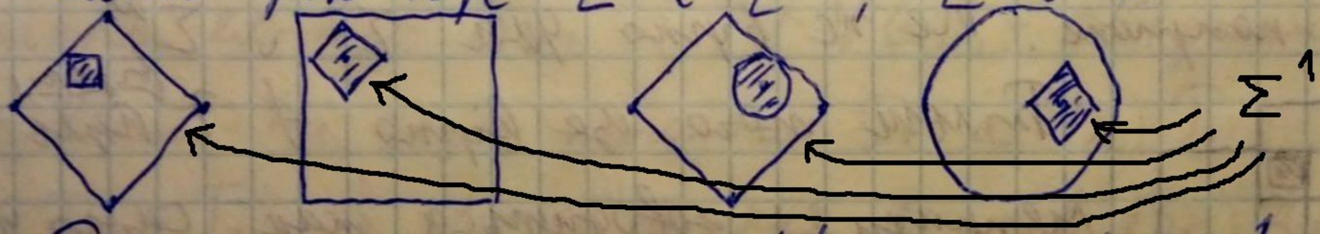
$$\rho_2((x,y),(a,b)) \underset{\text{нерівність трикутника}}{\le} \rho_2((x,y),(x_0,y_0)) + \rho_2((x_0,y_0),(a,b)) =$$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + \varepsilon_0 < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\right)^2} + \varepsilon_0 = \varepsilon-\varepsilon_0+\varepsilon_0 = \varepsilon.$$

Отже, $(x,y) \in U$. Т.ч., $V \subset U$. Зробивши так $\forall (x_0,y_0) \in U$, отримаємо потрібне.

Ан-но, $\forall$ ел-т Σ^∞ - об'єднання ел-тів Σ^2.

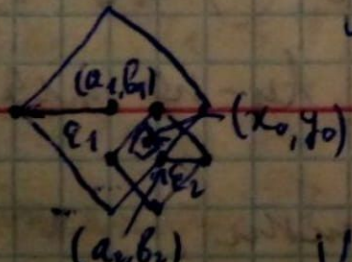
Так само для пар Σ^1 і Σ^∞, Σ^1 і Σ^2.



З.Е. Показати, що перетин $\forall$ 2 ел-тів Σ^1 - це об'єднання ел-тів Σ^1.

$\forall$ 2 ел-ти Σ^1 мають вигляд $U_1 = \{(x,y) \mid \overbrace{|x-a_1|+|y-b_1|}^{\rho_1((x,y),(a_1,b_1))} < \varepsilon_1\}$,

$U_2 = \{(x,y) \mid \underbrace{|x-a_2|+|y-b_2|}_{\rho_1((x,y),(a_2,b_2))} < \varepsilon_2\}$. Нехай $(x_0,y_0) \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, тоді



для $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon_1 - |x_0-a_1| - |y_0-b_1|, \varepsilon_2 - |x_0-a_2| - |y_0-b_2|\}$ покладемо

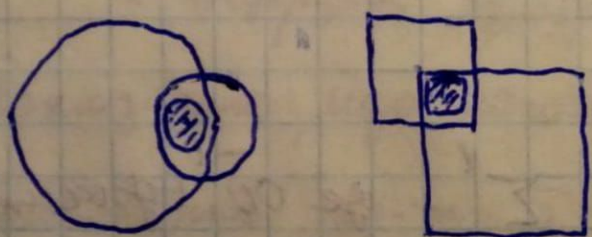
$V := \{(x,y) \mid \rho_1((x,y),(x_0,y_0)) = |x-x_0|+|y-y_0| < \varepsilon_0\} \in \Sigma^1$.

це нерівність трикутника $\S 1$

$\forall\ (x,y) \in V$

$$|x-a_1| + |y-b_1| = |x-x_0+x_0-a_1| + |y-y_0+y_0-b_1| \le |x-x_0| + |y-y_0| + |x_0-a_1| + |y_0-b_1| < \varepsilon_0 + |x_0-a_1| + |y_0-b_1| \le \varepsilon_1 - |x_0-a_1| - |y_0-b_1| + |x_0-a_1| + |y_0-b_1| = \varepsilon_1.$$

Отже, $(x,y) \in U_1$. Т.ч., $V \subset U_1$. Ан-но $V \subset U_2$, $V \subset U_1 \cap U_2$. Звідси випливає потрібне. Те ж вірно для Σ^2 і Σ^∞.



Більше того, це вірно $\forall$ 2 відкр. куль $\forall$ метрики: доводиться так само через нерівність трикутника.

3. F. Показати, що $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^\infty$ - бази і що відповідні топології збігаються.

Для Σ^1: одну з 2-х вимог критерію бази перевірили у 3.E, інша: $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^1((0,0))$ $\{(x,y) \mid |x|+|y| < n\}$. Ан-но для Σ^2, Σ^∞ і множини відкр. куль $\forall$ метрики.

Співпадіння топологій демонстрували у лекції. Також воно випливає з З.Д і наступної задачі.

3.6. Сформулювати необхідну і достатню умову того, що бази B_1 і B_2 задають одну й ту саму топологію.

Використаємо властивість з З.Д:

B_1 і B_2 задають однакові топології $\Leftrightarrow$ $\forall U \in B_1$ – об'єднання ел-тів B_2 і $\forall V \in B_2$ – об'єднання ел-тів B_1.

$\Rightarrow$. Нехай B_1 задає топологію T_1, а B_2 – T_2. $\forall U \in B_1$ $U \in T_1 = T_2 \Rightarrow U$ – об'єднання ел-тів B_2. Ан-но друге.

$\Leftarrow$. $\forall U \in T_1$ – об'єднання ел-тів B_1: $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, де $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset B_1$. За умовою, $\forall \alpha$ $U_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} V_{\alpha\beta}$, де $\{V_{\alpha\beta}\}_{\beta \in B_\alpha} \subset B_2$. Тоді $U = \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B_\alpha}} V_{\alpha\beta} \in T_2$ за побудовою T_2.

Тобто $T_1 < T_2$. Ан-но, $T_2 < T_1$, $T_1 = T_2$.

16.14. Які з просторів задовольняють першій аксіомі зліченності?

1). Дискретний.

Так, $\{\{x\}\}$ - база в $\forall$ точці $x \in X$: $\forall\, U \ni x \quad x \in \{x\} \subset U$, $\{x\}$ - відкр.

2). Антидискретний

Так, $\{X\}$ - його база, отже і база у $\forall$ точці.

3). $\mathbb{R}$ з $\tau = \{(a, +\infty)\}$.

Так, $\forall \; x \in \mathbb{R} \quad B := \{(q, +\infty) \mid \overbrace{q < x}^{q \in \mathbb{Q},}\}$ - база в $\{x\}$: вони відкр. і $\forall$ відкр. $(a, +\infty) \ni x \quad \exists\, q \in \mathbb{Q} : a < q < x$, тому $x \in (q, +\infty) \subset (a, +\infty)$.

4). $\mathbb{R}_{T_1}$, тобто $\mathbb{R}$ з кофінітною топологією.

Ні. Дійсно, нехай для $x \in \mathbb{R} \quad B = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ - зліченна база у x (якщо вона скінченна, все аналогічно). $\forall n \quad x \in U_n$ - відкр. в коф. топ. : $U_n = \mathbb{R} \setminus \{x_{ni}\}_{i=1}^{m_n}$. Тоді $\exists\; y \in \mathbb{R} \setminus (\{x_{ni}\}_{n \in \mathbb{N}, i = \overline{1, m_n}} \cup \{x\})$, бо з $\mathbb{R}$ ми викидаємо лише $\leq$ зліченну підмножину.

$U := \mathbb{R} \setminus \{y\}$ - відкрита, $x \in U$ і $\forall n \quad U_n \not\subset U$ (бо

$y \in U_n$ і $y \notin U$). Тому B – не база в $\{x\}$ ↯.

Отже, у жодній точці $\nexists$ ≤ зліченної бази. Це вірно і $\forall$ незліченної X з кофінітною топ.

4. A. Перевірити, що дискретна метрика на $\forall$ множині X

$\rho: X \times X \to \mathbb{R}_+$: $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ дійсно є метрикою.

Невиродженість $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ і симетричність $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ – з def. Нерівність трикутника: $\forall x, y, z \in X$

Якщо $x = y = z$, то $\rho(x,y) = 0 \leq 0 + 0 = \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Якщо $x = y \neq z$, то $\rho(x,y) = 0 \leq 1 + 1 = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Якщо $x \neq y = z$, то $\rho(x,y) = 1 \leq 1 + 0 = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Якщо $x = z \neq y$, то $\rho(x,y) = 1 \leq 0 + 1 = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

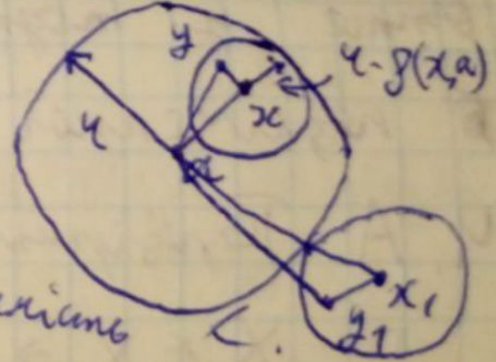
Якщо $x \neq y, y \neq z, x \neq z$, то $\rho(x,y) = 1 \leq 1 + 1 = \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

4. E. $\forall\, x, a \in X$ (де (X, ρ) - МП) $\forall\, r > \rho(x,a)$ (тобто $x \in B_r(a)$)

$$B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a) \text{ і } D_{r-\rho(x,a)}(x) \subset D_r(a).$$

Нехай $y \in B_{r-\rho(x,a)}(x)$. Тоді $\rho(x,y) < r - \rho(x,a)$, отже

$\rho(y,a) \le [\text{нер. } \Delta] \le \rho(y,x) + \rho(x,a) < r - \rho(x,a) + \rho(x,a) = r$,



тобто $y \in B_r(a)$. Ан-но для замкн. куль з $\le$ замість $<$.

4.6. Сформулювати аналогічне твердження для $\rho(x,a) > r$, тобто $x \notin D_r(a)$.

$$B_{\rho(x,a)-r}(x) \cap D_r(a) = \varnothing \quad (\text{і } D_{\rho(x,a)-r}(x) \cap B_r(a) = \varnothing)$$

Дійсно, $\forall\, y \in B_{\rho(x,a)-r}(x)$ $\rho(x,y) < \rho(x,a) - r$, тому

$\rho(x,a) \le [\text{нер. } \Delta] \le \rho(x,y) + \rho(y,a) < \rho(x,a) - r + \rho(y,a)$, тобто

$\rho(y,a) - r > 0$, $y \notin D_r(a)$. Ан-но другий перетин.