Дотичні вектори як диференціювання

M - k-гл. многовид, $k \geq 1$, $\dim M = n$.

<u>def (2).</u> Дотичним вектором (до) M у точці $p \in M$ зветься лінійне відображення (функціонал) $v : C^k(M) \to \mathbb{R}$, що задов. правилу Лейбніца:

$$v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g) \quad \forall f, g \in C^k(M).$$

При цьому $v(f)$ зветься похідною f за v (у напрямку v).

<u>Rem.</u> Нагадаємо, що лінійність (тобто те, що $v \in C^k(M)^*$ - лін. функціонал) означає, що

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \quad \forall f, g \in C^k(M), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

На $C^k(M)^*$ $\exists$ лінійна структура: $\forall v, w \in C^k(M)^*$,

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \in C^k(M)$ $\quad (\lambda v + \mu w)(f) := \lambda v(f) + \mu w(f)$ задає $\lambda v + \mu w \in C^k(M)^*$ (Впр.), причому правило Л. зберігається: якщо тут v, w – дот. в-ри M у p, то $\forall\, f, g \in C^k(M)$

$(\lambda v + \mu w)(fg) = \lambda v(fg) + \mu w(fg) = \lambda v(f) \cdot g(p) + \lambda f(p) \cdot v(g) + \mu w(f) \cdot g(p) + \mu f(p) \cdot w(g) = (\lambda v + \mu w)(f)\, g(p) + f(p) \cdot (\lambda v + \mu w)(g)$.

Сл. Множина дотичних векторів M у p утворює векторний підпростір у $C^k(M)^*$.

def.(2). Вект. пр-р дотичних векторів M у p зветься дотичним простором (до) M у p і позначається T_pM.

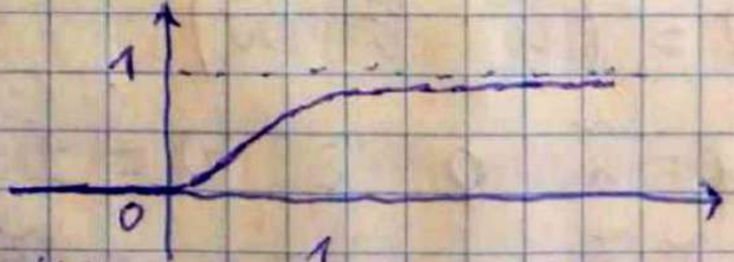
Рк. $\forall\, p \in M$ $\forall$ відкр. $U \ni p$ $\exists$ відкриті V, W : $p \in W$, $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$ і $\exists\, \varphi \in C^k(M)$: $\varphi(M) = [0,1]$, $\varphi(q) = 0 \Leftrightarrow q \in M \setminus V$ та

$\varphi(q) = 1 \iff p \in \overline{W}$.

Rem. Це Рч. вірно й при $k=0$. Такі ф-ції φ іноді звуть гладкими ф-ціями Урисона, бо це ф-ція Урисона пари замкнених множин $\overline{W}$, $M \setminus V$ у загальнотопологічному сенсі.

▷ Почнемо з функції

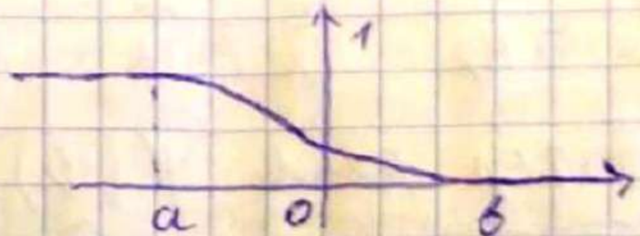
$$\alpha(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t>0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$



Оскільки $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ похідна $\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)^{(k)} = e^{-\frac{1}{t}} P_k\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t \to +0]{} 0$ (де P_k - деякий поліном), $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$. Крім того, $\alpha(+\infty) = 1-0$.

Для $a < b \in \mathbb{R}$ визначимо

$$\beta_{a,b}(t) := \frac{\alpha(b-t)}{\alpha(b-t)+\alpha(t-a)}$$



З властивостей α:

$\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\beta(\mathbb{R}) = [0,1]$, $\beta(t)=0 \iff t \geq b$, $\beta(t)=1 \iff t \leq a$.

Отже, дані p і $U \ni p$. Нехай $(\tilde{U}, \psi)$ - карта M з $p \in \tilde{U}$.

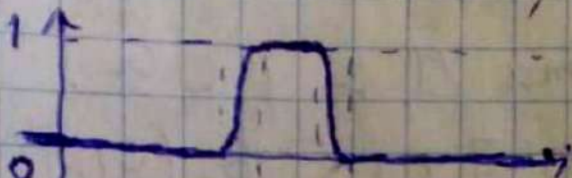
Тоді $\psi(\tilde{U} \cap U)$ - відкр. окіл $\psi(p)$ у $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists\, r>0 : B_r(\psi(p)) \subset$ $\subset \psi(\tilde{U} \cap U)$ (евклідова куля, як завжди, $n = \dim M$).

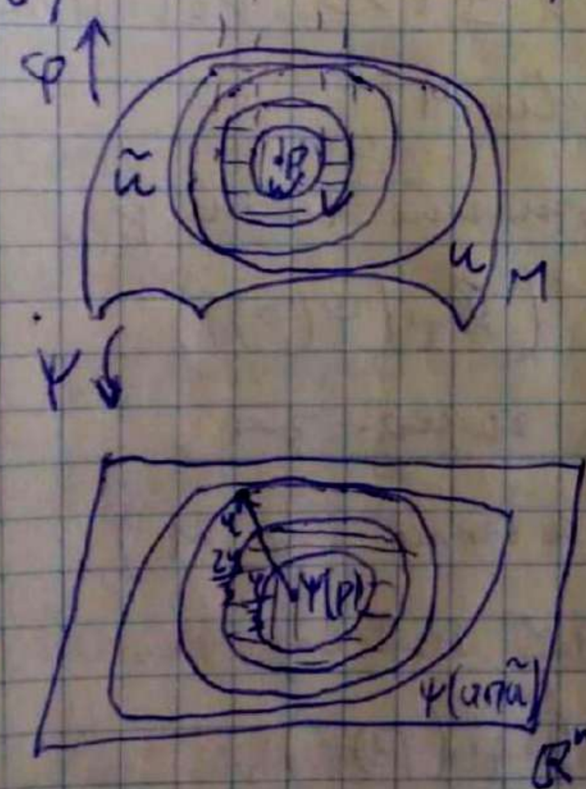
Позначимо $\tilde{B}_{r'}(p) := \psi^{-1}(B_{r'}(\psi(p)))$ - відкритий окіл p, $\tilde{B}_{r'}(p) \subset U \cap \tilde{U}$ $\forall\, r' \in (0, r]$; $\tilde{D}_{r'}(p) := \psi^{-1}(D_{r'}(\psi(p)))$.

Оскільки $D_{r'}(\psi(p))$ - компакт в $\mathbb{R}^n$ і ψ - гомео-зм, $\tilde{D}_{r'}(p)$ - компакт (у індукованій топ. $\tilde{U}$, а отже і у M), в силу хаусдорфовості, $\tilde{D}_{r'}(p)$ - замкнена, тому $\overline{\tilde{B}_{r'}(p)} \subset \tilde{D}_{r'}(p)$ (бо, звичайно, $\tilde{B}_{r'}(p) \subset \tilde{D}_{r'}(p)$).

Доведено обернене включення: $\forall\, q \in \tilde{D}_{r'}(p)$ і

$\forall$ відкр. $\tilde{\tilde{U}} \ni q$ $\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U}$ - відкр. окіл q, тому $\psi(\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U})$ - відкр. окіл $\psi(q) \in D_{r'}(\psi(p))$ у $\mathbb{R}^n$. Оскільки $D_{r'}(\psi(p)) = \overline{B_{r'}(\psi(p))}$, $\psi(\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U}) \cap B_{r'}(\psi(p)) \neq \varnothing$, застосовуючи ψ^{-1}, отримаємо $\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{U} \cap \tilde{B}_{r'}(p) \neq \varnothing$. Оскільки $\tilde{\tilde{U}} \cap \tilde{B}_{r'}(\psi(p))$





$\tilde{\tilde{U}}$ - довільний відкр. окіл q, це і означає $q \in \overline{\tilde{B}_{r'}(p)}$.

Отже, $\forall r' < r$ $\tilde{D}_{r'}(p) = \overline{\tilde{B}_{r'}(p)} \subset \tilde{B}_r(p) \subset U \cap \tilde{U}$.

Покладемо:

$$W := \tilde{B}_{\frac{r}{3}}(p), \quad V := \tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p).$$

За побудовою, вони відкриті, $p \in W$ і $\overline{W} = \tilde{D}_{\frac{r}{3}}(p) \subset \tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p) = V$, $\overline{V} = \tilde{D}_{\frac{2r}{3}}(p) \subset U$.

Нарешті, побудуємо $\varphi : M \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(q) := \begin{cases} \beta_{\frac{r}{3}, \frac{2r}{3}}(|\psi(q) - \psi(p)|), & q \in \tilde{U}, \\ 0, & q \notin \tilde{U} \end{cases}$$

$|\cdot|$ - евкл. норма

Оскільки $\tilde{U}$ і $M\setminus\overline{V}$ утворюють відкр. покриття M, φ k-гладка на $\tilde{U}$ (бо ψ - k-гладкий диффео-зм, а β і $|\cdot|$ - ∞-гладкі) і $\varphi = 0$ на $M\setminus\overline{V}$ за побудовою - тож макс. гладкості k, φ неперервна і k-гладка на M (бо це локальні властивості). З властивостей β випливає, що $\varphi(M) = [0,1]$, $\varphi = 1$ в точності на $\tilde{D}_{\frac{r}{3}}(p) = \overline{W}$ і $= 0$ в точності на $M\setminus\tilde{B}_{\frac{2r}{3}}(p) = M\setminus V$. $\blacktriangle$

__Тв. 1.__ (локальність диференціювання). Нехай $f, g \in C^k(M)$, U відкр. і $f|_U = g|_U$. Тоді $\forall p \in U$ $\forall v \in T_pM$ $v(f) = v(g)$.

$\triangleright$ Застосуємо до p і U попереднє __Тв.__ і отримаємо V, W, φ як у ньому. Тоді ф-ція $h := \varphi(f-g) = 0$, бо $f-g=0$ на U і $\varphi = 0$ на $M \setminus U$. В силу лінійності,

$$0 = v(h) \underset{\text{(правило Лейбніца)}}{=} v(\varphi)\cdot(\underbrace{f(p)-g(p)}_{0}) + \underbrace{\varphi(p)}_{1}\cdot(v(f)-v(g)) \Rightarrow v(f) = v(g). \ \triangleleft$$

Rem. $v(f)=0$ не тільки для $f=0$ (за лінійністю), а й для $\forall$ постійної ф-ції $f=C\in\mathbb{R}$. Дійсно, для $f=g=1$ за пр. Л. $v(1)=v(1\cdot 1)=v(1)\cdot 1+1\cdot v(1)=2v(1) \Rightarrow v(1)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ [лінійність] $\Rightarrow v(C)=C\,v(1)=0$.

Пр.2 Нехай U-відкр., $f\in C^k(U)$. Тоді $\forall\, p\in U\ \exists\ \bar{f}\in C^k(M)$ і відкр. $W\subset U$: $p\in W$ і $f|_W=\bar{f}|_W$.

$\triangleright$ Знову застосуємо Пр. до U і p, візьмемо V,W та φ звідти. Покладемо

$$\bar{f}(q):=\begin{cases}\varphi(q)\cdot f(q), & q\in U\\ 0, & q\in U\end{cases}$$

Помітимо, що $\varphi=0\Rightarrow \varphi f=0$ на $U\setminus V$, зокрема на відкритій $U\setminus\bar{V}$. Оск. $\{U, M\setminus\bar{V}\}$ - відкр. покриття M, φf і 0 неперервні на цих множинах відповідно та рівні на $U\cap(M\setminus\bar{V})=U\setminus\bar{V}$,

$\overline{f}$ коректно визначена і неперервна: $\overline{f} \in C(M)$ (Впр.) Більш того, оск. кожна з φf, 0 k-гл. на відкр. U, $M \setminus \overline{V}$ відп., $\overline{f} \in C^k(M)$, бо гладкість – локальна властивість. При $q \in W$ $\varphi(q) = 1 \Rightarrow \overline{f}(q) = f(q)$ $\triangle$

Rem. Тобто для f ф-ція $\overline{f}$ є її "частковим продовженням" на M: вона $= f$ на, можливо, меншій від нього околі $W \subset U$ її області визн. Покладемо для $v \in T_pM$ $v(f) := v(\overline{f})$. В силу Рч.1., $v(f)$ не залежить від вибору (часткового) продовження $\overline{f}$. При цьому $v: f \in C^k(U) \mapsto v(f)$ задов. def(2), тобто це ел-т T_pU, що відповідає $v \in T_pM$ (Впр.). І навпаки: для $v \in T_pU$ і $f \in C^k(M)$ покладемо $v(f) := v(f|_U)$, де $f|_U \in C^k(U)$. Ця відповідність вза та лінійна (Впр.)

Сөч $\exists$ природній (канонічний) лін. ізоморфізм між T_pM і T_pU $\forall p \in M$ та відкр. $U \ni p$.

Ex.(2) Нехай $p \in M$, (U, φ) - карта з $U \ni p$ і лок. коорд. $(x^1, .., x^n)$. Для $f \in C^\infty(M)$, $i = \overline{1,n}$ покладемо $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ (тобто $\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$) Тоді $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ в силу властивостей частк. похідних.

Pr.3. $\forall p \in M$, карти (U, φ) з $U \ni p$ і лок. коорд. $(x^1, .., x^n)$ та $v \in T_pM$ $\exists! (v^1, .., v^n) \in \mathbb{R}^n$: $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

$\triangleright$! Якщо відомо, що $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $\forall j = \overline{1,n}$ $v(x^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = v^i \delta_i^j = v^j$ однозначно визначає $v^1, .., v^n$ (тут використали Сөч. вище, ототожнивши T_pM і T_pU).

$\exists$. Покладемо тепер $v^i := v(x^i)$, $i = \overline{1,n}$ (знову ототожнивши T_pM і T_pU).

Лем. (Адамар) $\forall f \in C^k(M)\ \exists f_1, \dots, f_n \in C^{k-1}(U)$:

$$f|_U = f(p) + f_i \cdot (x^i - x^i_0),$$

де $(x^1_0, \dots, x^n_0) = \varphi(p)$ – координати точки p.

▷ $\forall (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

$(f\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) - \underbrace{(f\circ\varphi^{-1})(x^1_0, \dots, x^n_0)}_{f(p)} = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big((f\circ\varphi^{-1})(tx^1 + (1-t)x^1_0, \dots, tx^n + (1-t)x^n_0)\Big)dt = (x^i - x^i_0)\int_0^1 \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\dots)\,dt$. Поклавши для $i = \overline{1,n}$ $f_i(q) := \int_0^1 \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\big(t\varphi(q) + (1-t)\varphi(p)\big)\,dt$, $q \in U$, отримаємо потрібне (**Впр.** $f_i \in C^{k-1}(U)$ $\forall i$). ◁ (**Лем.**)

Застосуємо цю **Лем.** (враховуючи ототожнення T_pM і T_pU):

$v(f) = v(f|_U) = [\text{def.}(2.1)] = \underbrace{v(f(p))}_{0,\ \text{бо } f(p)\in\mathbb{R} \text{ – конст.}} + v(f_i)\cdot(\underbrace{x^i(p)}_{x^i_0} - x^i_0) + f_i(p)\cdot(v(x^i) - \underbrace{v(x^i_0)}_{0,\ \text{бо конст.}}) = v^i f_i(p)$. Оскільки f_i – $(k-1)$-гл., для цього доведення формально потрібно $k \geq 2$. **Впр.** Що буде при $k = 1$?

Зокрема, при $v = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $j = \overline{1,n}$:

$\frac{\partial}{\partial x^j}(f) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) f_i(p) = \delta^i_j f_i(p) = f_j(p)$, тобто у заг. вип.

$v(f) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f)$ $\forall f \Rightarrow v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. ▲

<u>Сл.</u> $\forall$ лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ в околі p $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ – базис T_pM. Зокрема, $\dim T_pM = n = \dim M$.

<u>Вп. 4.</u> Нехай $p \in M$, $p \in U \cap \tilde{U}$, де (U, φ), $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – карти з лок. коорд. $(x^1, \ldots, x^n)$ і $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ відп., $v \in T_pM$ – дот. в. і $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$ – його координати розкладення за відп. базисами. Тоді

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) v^j \quad \forall i = \overline{1,n}, \qquad (*)$$

де, як і раніше, $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p))$ – частк. пох. коорд. ф-цій відобр. переходу.

▷ За доведенням Рч.3., $\forall\, i=\overline{1,n}$

$$\tilde{v}^i = v(\tilde{x}^i) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\tilde{x}^i) = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p).$$

(тут ототожнюємо T_pM, T_pU і $T_p\tilde{U}$). ◁

Rem. Ан-но або як наслідок (Впр.): $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}(p)\frac{\partial}{\partial x^j}$, $i=\overline{1,n}$.

Сл. Означення дотичних вектора і простору def (2) з цього розділу і далі раніше def. еквівалентні, тобто $\exists$ природній лін. ізоморфізм

T_pM (у сенсі def (2)) $\leftrightarrow$ T_pM (у сенсі def., тобто відобр. $\{$карти в околі $p\} \to \mathbb{R}^n$, що задов. (*)).

▷ Дійсно, $\forall\, v \in T_pM$ у сенсі def (2) (тобто диференціювання) і карти (U,φ) з $U \ni p$ і лок. коорд. $(x^1,\dots,x^n)$ розкладемо $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ (Рч.3.) і покладемо $v((U,\varphi)) := (v^1,\dots,v^n)$.

В силу Рт.4., при переході до іншої карти вик. (*), тому отримаємо $v \in T_pM$ у сенсі def. У навпаки, $\forall v \in T_pM$ у сенсі def. диференціювання $v : C^k(M) \to \mathbb{R}$; $f \mapsto v(f)$ у сенсі раніше def. задов. def.(2). При цьому якщо $v((U,\varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$ для карти в околі p з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$, то $\forall i = \overline{1,n}$ $v(x^i) = v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = v^j \delta^i_j = v^i$, тому така відповідність — обернена до раніше побудованої. Тому це біє. Вона лінійна за побудовою (Вж) ▲

Rem $\frac{\partial}{\partial x^i}$ тоді відповідають раніше побудовані $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = \overline{1,n}$

Rem. Раніше було встановлено, що $\forall$ гл. кривої $\gamma \in C^k((a,b), M)$, $: \gamma(t_0) = p$, $t_0 \in (a,b)$ вектор $\gamma'(t_0) \in T_pM$ дає у сенсі def(2) відобр. $\gamma'(t_0) : C^k(M) \to \mathbb{R} : f \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0)$.

Звичайно, його можна взяти за def. $\gamma'(t_0)$ у сенсі def.(2). , безпосередньо перевіривши виконання умов (Впр.), і так само маємо $T_pM = \{\gamma'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b), M) : \gamma(t_0) = p\}$.

Впр. Аналогічно до попереднього Cor. показати еквівалентність між раніше запропонованим третім означенням дот. вектора

(def.(3). Будемо називати кр. криві $\gamma \in C^k((a,b), M)$ і $\mu \in C^k((c,d), M)$ еквівалентними у $p \in M$, якщо $\exists\, t_0 \in (a,b)$, $s_0 \in (c,d)$ такі, що $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$ і $\forall f \in C^k(M)$ $(f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$. Клас екв-сті кр. кривих у p назвемо дотичним вектором M у p.)

і def(2). :

1. Показати, що це дійсно відн. екв-сті.

2. Ввести на множині класів екв-сті структуру вект. простору.

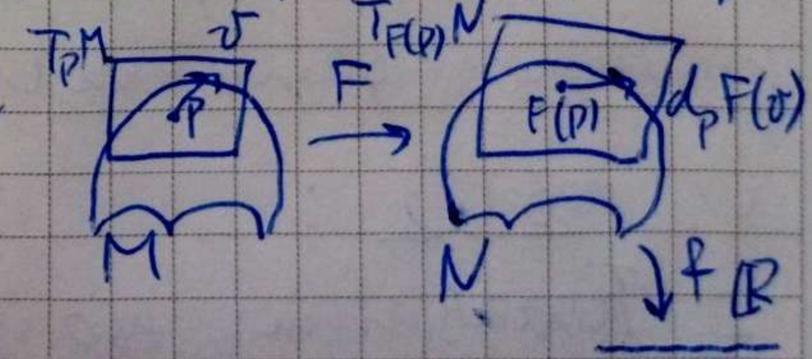
3. Побудувати природний лін.-із-м між цим пр-ром і T_pM у сенсі def. (2).

Впр. Побудувати природний лін. із-м між просторами $T_{(p,q)} M\times N$ і $T_pM \oplus T_qN$ $\forall\ (p,q)\in M\times N$ (у сенсі будь-якого з означень).

def. (2). Нехай M, N — k-гл. многовиди, $F\in C^k(M,N)$ $(k\geq 1)$. Диференціалом F у $p\in M$ зветься

$$d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N : v \mapsto \big(d_pF(v) : f \mapsto v(f\circ F)\big).$$

Rem. Тут $f\in C^k(N) \Rightarrow f\circ F\in C^k(M)$, тому $d_pF(v): C^k(N)\to\mathbb{R}$ коректно визначене.



Впр. Перевірити безпосередньо, що $d_pF(v) \in T_{F(p)}N$ у сенсі def. (2), тобто лінійне й задовольняє правилу Лейбніца, і що $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ лінійне.

Це також випливає зі встановленого раніше і наступного спостереження:

Rem. Представимо $v \in T_pM$ як дотичний до кривої: $v = \gamma'(t_0)$, $\gamma \in C^k((a,b), M)$, $\gamma(t_0) = p$. Тоді $\forall f \in C^k(N)$

$$d_pF(v)(f) = v(f \circ F) = \gamma'(t_0)(f \circ F) = ((f \circ F) \circ \gamma)'(t_0) =$$
$$= (f \circ (F \circ \gamma))'(t_0) = (F \circ \gamma)'(t_0)(f),$$ тобто $d_pF(v) = (F \circ \gamma)'(t_0)$.

Cor. def (2) збігається з раніше даним def. диференціала d_pF, якщо ототожнити T_pM і $T_{F(p)}N$ у сенсі def. (2) і ранішого def. в силу попер. Cor.

(більш точно, диференціали в сенсах цих двох означень комутують з ізоморфізмами з попер. Сон.
Впр. Записати і показати це точно.).
Rem. Звідси ж отримуємо і запис d_pF у лок. базисах.
Впр. Довести ланцюгове правило $d_p(F\circ G) = d_{G(p)}F \circ d_pG$ для $G \in C^k(M,N)$, $F \in C^k(N,L)$, $p \in M$, використавши def.(2).
Rem. d_pF ще позначають $(F_*)_p$, dF_p, $\mathcal{D}F_p$, ...
Впр. Що таке диференціали кривої $\gamma \in C^k((a,b), M)$ і функції $f \in C^k(M) = C^k(M,\mathbb{R})$ з точки зору def.(2)?