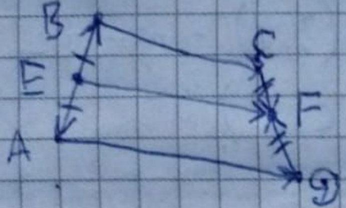
6. ABCD — точки на площині або у просторі, E — середина AB, F — середина CD. Показати, що $\overline{EF} = \frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}$.

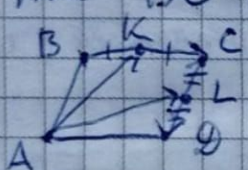


$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CF} = \overline{EA} + \overline{AD} + \overline{DF}$ (ан-но 7)

$\overline{EB} + \overline{EA} = \overline{CF} + \overline{DF} = 0 \Rightarrow 2\overline{EF} = \overline{BC} + \overline{AD}$.

Для трапеції з основами BC і AD: $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$ співнапрямлені, тому $\overline{EF}$ теж їм співнапрямлений і довжина $EF = \frac{1}{2}(BC+AD)$.

8. ABCD — паралелограм, K — середина BC, L — середина CD. Виразити $\overline{BC}$ і $\overline{CD}$ через $\overline{AK}$ і $\overline{AL}$.



Простіше спочатку виразити навпаки:

$\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BK} = -\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{BC}$

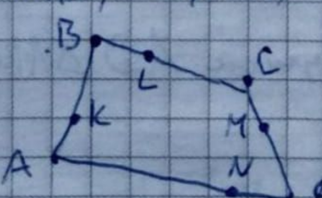
$\overline{AL} = \overline{AD} + \overline{DL} = \overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{CD}$

Домножимо друге на 2 і віднімемо:

$\overline{AK} - 2\overline{AL} = -\frac{3}{2}\overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = -\frac{2}{3}(\overline{AK} - 2\overline{AL}) = -\frac{2}{3}\overline{AK} + \frac{4}{3}\overline{AL}$,

$\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \overline{AK} = -\frac{1}{3}\overline{AK} + \frac{2}{3}\overline{AL} - \overline{AK} = -\frac{4}{3}\overline{AK} + \frac{2}{3}\overline{AL}$.

12. ABCD — чотирикутник, K, L, M, N ділять у відношенні λ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ відповідно.



Для радіусів-векторів:

$r_K = \frac{r_A + \lambda r_B}{1+\lambda}$, $r_L = \frac{r_B + \lambda r_C}{1+\lambda}$, $r_M = \frac{r_C + \lambda r_D}{1+\lambda}$, $r_N = \frac{r_D + \lambda r_A}{1+\lambda}$

$r_K - r_L = \frac{1}{1+\lambda}(r_A + (\lambda-1)r_B - \lambda r_C)$, $r_N - r_M = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda r_A + (1-\lambda)r_D - r_C)$

1) ABCD — паралелограм $\Rightarrow$ KLMN паралелограм

$\overset{=\overline{BA}}{r_A - r_B} = \overset{=\overline{CD}}{r_D - r_C}$, тому

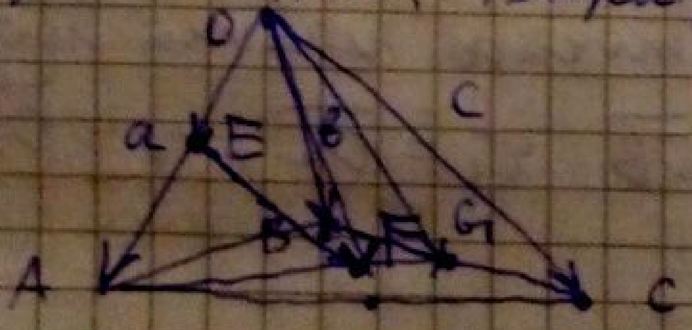
$(r_K - r_L) - (r_N - r_M) = \frac{1}{1+\lambda}((1-\lambda)r_A + (\lambda-1)r_B + (1-\lambda)r_C + (\lambda-1)r_D) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}(r_A - r_B + r_C - r_D) = 0$, тобто $\overline{LK} = r_K - r_L = r_N - r_M = \overline{MN}$, KLMN — парал.

2. $KLMN$ – паралелограм і $\lambda \neq 1$ => $ABCD$ паралелограм.

З формули вище, $\overline{LK} = \overline{MN}$ => $0 = (r_K - r_L) - (r_N - r_M) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}(r_A - r_B + r_C - r_D)$ => $[\lambda \neq 1]$ => $r_A - r_B = r_D - r_C$, $\overline{BA} = \overline{CD}$, $ABCD$ – парал.

При $\lambda = 1$ $KLMN$ завжди парал. (коли це середини сторін)

20. $OABC$ – тетраедр, E – середина $\overline{OA}$, F – точка перетину медіан ABC. Виразити $\overline{EF}$ через $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $c = \overline{OC}$.



$\overline{EF} = \overline{EO} + \overline{OF} = -\overline{OE} + \overline{OF}$

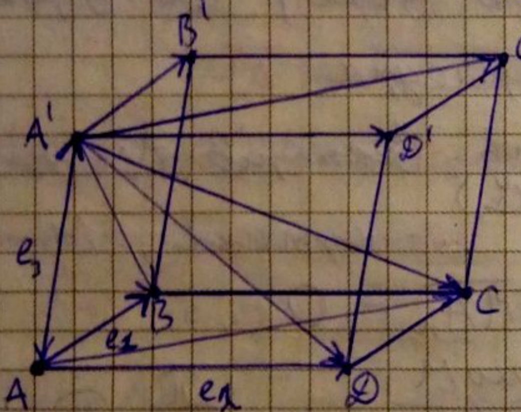
Виразимо ці вектори окремо: $-\overline{OE} = -\frac{1}{2}\overline{OA} = -\frac{1}{2}a$.

Нехай G – середина BC. Тоді

$\overline{OF} = \overline{OA} + \overline{AF} = \left[\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{точки перетину медіан}\end{matrix}\right] = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AG} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\left(\overline{AO} + \overline{OG}\right) = \left[\begin{matrix}\text{розв'язок}\\ \text{задачі 4.}\end{matrix}\right] = \overline{OA} + \frac{2}{3}\left(-\overline{OA} + \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right)\right) = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}$ (див. також 9.).

Отже, $\overline{OF} = \frac{1}{3}(a+b+c)$, отже $\overline{EF} = -\frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$.

25. $ABCDA'B'C'D'$ – паралелепіпед. У базисі $\{e_1 = \overline{AB}, e_2 = \overline{AD}, e_3 = \overline{AA'}\}$ знайти координати $\underbrace{\overline{A'A}, \overline{A'B'}, \overline{A'D'}}_{\text{ребра}}$, $\underbrace{\overline{A'C}}_{\text{діагональ паралелепіпеда}}$, $\underbrace{\overline{A'B}, \overline{A'D}, \overline{A'C'}}_{\text{діагоналі граней}}$.



$\overline{A'A} = -\overline{AA'} = -e_3 = (0,0,-1)$

$\overline{A'B'} = \overline{AB} = e_1 = (1,0,0)$

$\overline{A'D'} = \overline{AD} = e_2 = (0,1,0)$

$\overline{A'C} = \overline{A'A} + \overline{AC} = -\overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AD} = -e_3 + e_1 + e_2 = (1,1,-1)$

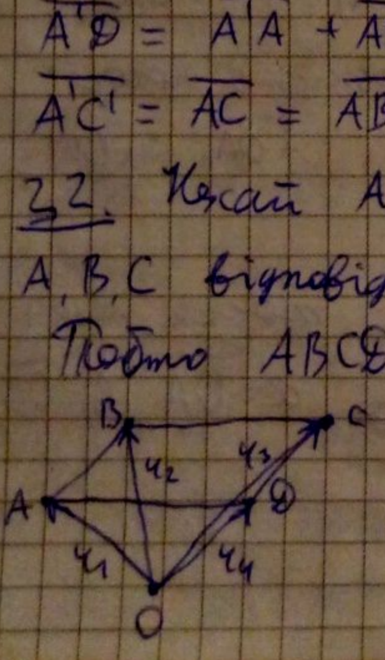
$\overline{A'B} = \overline{A'A} + \overline{AB} = -e_3 + e_1 = (1,0,-1)$

$\overline{A'D} = \overline{A'A} + \overline{AD} = -e_3 + e_2 = (0,1,-1)$

$\overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = e_1 + e_2 = (1,1,0)$.

32. Нехай $ABCD$ – паралелограм, r_1, r_2, r_3 – радіуси-вектори A, B, C відповідно. Знайти r_4 – радіус-вектор D.

Тобто $ABCD$ розташовані на площині або у просторі,



O – якась точка площини або простору, і $r_1 = \overline{OA}$, $r_2 = \overline{OB}$, $r_3 = \overline{OC}$, $r_4 = \overline{OD}$.

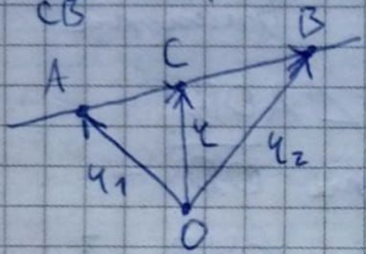
$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -r_1 + r_2,$

$\overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OC} = -\overline{OD} + \overline{OC} = -r_4 + r_3$

$\overline{AB} = \overline{DC}$: $-r_1 + r_2 = -r_4 + r_3 \Rightarrow r_4 = r_1 + r_3 - r_2.$

(або: $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 = 2\overline{OM}$, де M – точка перетину діагона-лей, див. 10.)

34. r_1 і r_2 - радіуси-вектори A і B відповідно, C ділить $\overline{AB}$ у відношенні λ, тобто $C \in AB$ (прямій), і $\frac{AC}{CB} = \lambda$. Знайти радіус-вектор r точки C.



Отже, $r_1 = \overline{OA}$, $r_2 = \overline{OB}$, $r = \overline{OC}$.

$r = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$ $\ominus$ [redacted]

$\overline{AC} = \lambda \overline{CB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = (\lambda+1)\overline{CB} = \frac{\lambda+1}{\lambda}\overline{AC}$ $(\lambda \neq 0)$

$\ominus$ $\overline{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}(-\overline{OA} + \overline{OB}) = \frac{1}{\lambda+1}\overline{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overline{OB} =$

$= \frac{r_1 + \lambda r_2}{1+\lambda}$. (вірно і при $\lambda = 0$: тоді $C = A$ і $r = r_1$)

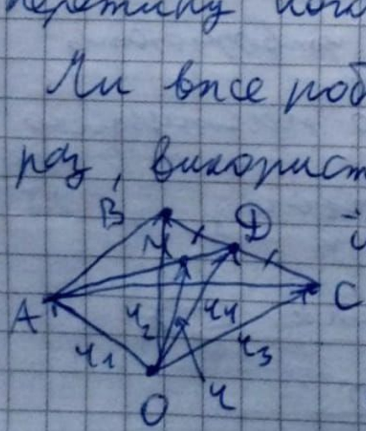
Зокрема, якщо C – середина $\overline{AB}$:

$\lambda = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ (пор. з 4).

$\lambda \geq 0$ – точки AB, $\lambda \in (-1, 0)$ – лівіше A, $\lambda < -1$ – правіше B.
B відповідає $\lambda = \infty$, $\lambda = -1$ – "нескінченно віддалена точка".

35. r_1, r_2, r_3 – радіуси-вектори вершин ΔABC, M – точка перетину його медіан. Знайти радіус-вектор r т. M.

Ми вже робили це у 20. (вектор $\overline{OF}$). Знайдемо це раз, використавши 34.: якщо D – середина BC, то



й [redacted] р. в. $r_4 = \frac{1}{2}(r_2 + r_3)$. Оскільки M ділить $\overline{AD}$ у відн. 2:

$r = \frac{r_1 + 2r_4}{1+2} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$