Домашнє завдання до заняття 09.09.24

(1.13) Довести, що
$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$
для довільних підмножин A, B і C деякої множини X.

(2.6) Нехай (X, Ω) – топологічний простір, а множину Y отримано з X додаванням одного елемента a: $Y = X \cup \{a\}$. Чи є сукупність підмножин
$$\{U \cup \{a\} \mid U \in \Omega\} \cup \{\varnothing\}$$
топологією на Y? Відповідь пояснити.

(2.12) Довести, що множина $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ замкнена у числовій прямій $\mathbb{R}$ (зі стандартною топологією).

Додаткові задачі (не оцінюються)

(1.15) Довести, що
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$
для довільних підмножин A, B і C деякої множини X (*асоціативність симетричної різниці*).

(2.Lx) Розглянемо наступну властивість підмножини F множини натуральних чисел $\mathbb{N}$: існує таке $N \in \mathbb{N}$, що F не містить арифметичних послідовностей довжини більшої за N. Довести, що усі підмножини F з такою властивістю разом з множиною $\mathbb{N}$ утворюють сукупність замкнених множин деякої топології на $\mathbb{N}$. При цьому може бути корисною наступна теорема з комбінаторики:

Теорема ван дер Вардена. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що, якщо множину $\{1, \ldots, N\}$ розбити на дві підножини, то в одній з них існує арифметична прогресія довжини n.