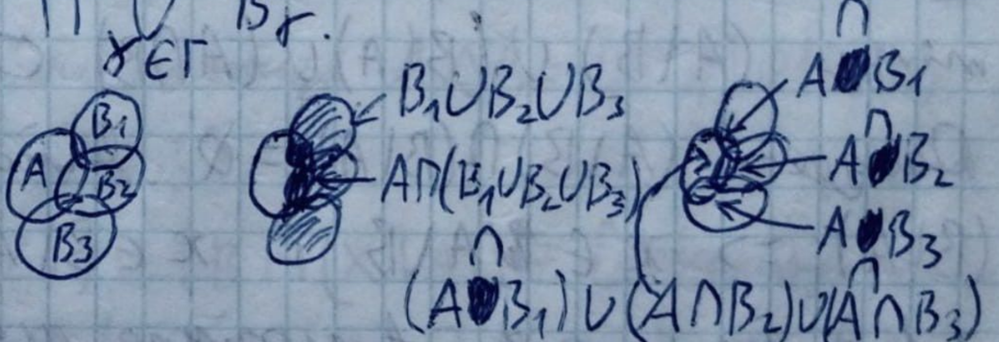
1. N. Нехай A, B_γ – деякі множини (підмножини X), де $\gamma \in \Gamma$ – індексуюча множина (наприклад, при $\Gamma = \mathbb{N}$: $B_1, B_2, \dots$) Тоді

а) $A \cap \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A \cap B_\gamma$ і в) $A \cup \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma = \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A \cup B_\gamma$ (дистрибутивність об'єднань та перетинів).

а) $\underline{\subset}$. Нехай $x \in A \cap \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$. Тоді $x \in A$ $\underline{і}$ $x \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, тобто $\exists\, \gamma_0 \in \Gamma : x \in B_{\gamma_0}$. Отже, $x \in A \cap B_{\gamma_0} \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A \cap B_\gamma$.

$\underline{\supset}$. Нехай $x \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A \cap B_\gamma$. Тоді $\exists\, \gamma_0 \in \Gamma : x \in A \cap B_{\gamma_0}$, тобто $x \in A$ і $x \in B_{\gamma_0} \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \Rightarrow x \in A \cap \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$.

Графічно (при $\Gamma = \{1, 2, 3\}$):



в) Аналогічно.

1.10. Нехай A, B – деякі множини (підмножини X). Тоді

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

і ці три множини попарно не перетинаються, тобто

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$, $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$, $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

(У такому випадку пишуть це $A\cup B = (A\setminus B)\sqcup(B\setminus A)\sqcup(A\cap B)$).

Згадаємо, що $x\in A\setminus B \iff x\in A$ і $x\notin B$, ан-но $B\setminus A$.

<u>$\subseteq$.</u> Нехай $x\in A\cup B$. Тоді $x\in A$ <u>або</u> $x\in B$.

Якщо $x\in A$, то або $x\in B$, і тоді $x\in A\cap B$, або $x\notin B$, і тоді $x\in A\setminus B$.

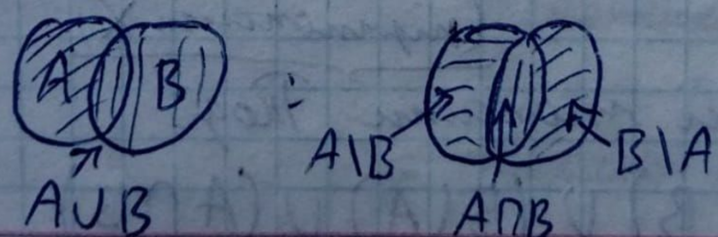
Якщо $x\in B$, то або $x\in A$, і тоді $x\in A\cap B$, або $x\notin A$, і тоді $x\in B\setminus A$.

Отже, $x\in (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$.

<u>$\supseteq$.</u> За означенням, $A\setminus B\subset A\subset A\cup B$, $B\setminus A\subset B\subset A\cup B$, $A\cap B\subset A\cup B$, тому $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)\subset A\cup B$.

Доведемо: $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\varnothing$. Дійсно, припустимо, що $\exists x\in(A\setminus B)\cap(B\setminus A) \Rightarrow x\in A\setminus B$ і $x\in B\setminus A$. З першого, $x\in A$, з другого, $x\notin A$, протиріччя. Аналогічно для інших перетинів.

Графічно:



1.11. Показати, що $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$. Це очевидно з картинки вище. Або:

$x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \setminus B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \overline{(x \in A \wedge x \notin B)} \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Leftrightarrow$

[дистрибутивність] $\Leftrightarrow (x \in A \underset{\text{завжди невірно}}{\wedge} x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B.$

Або (тут A, B – підмножини X): $A \setminus (A \setminus B) = A \cap (X \setminus (A \setminus B)) =$

$= A \cap (X \setminus (A \cap (X \setminus B))) =$ [ф-ли де Моргана] $= A \cap (X \setminus A \cup \underbrace{X \setminus (X \setminus B)}_{B}) =$

$=$ [дистрибутивність, див. 1.N] $= (\underbrace{A \cap (X \setminus A)}_{\varnothing}) \cup (A \cap B) = A \cap B.$

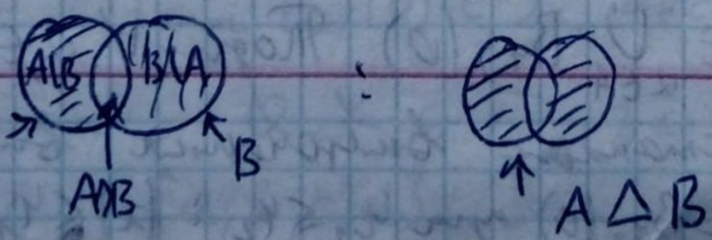
1.14. За означенням, симетрична різниця $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Показати, що $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap (X \setminus B)) \cup (B \cap (X \setminus A)) =$ [дистрибутивність двічі] $= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup (X \setminus A))}_{X} \cap \underbrace{((X \setminus B) \cup B)}_{X} \cap ((X \setminus B) \cup (X \setminus A)) =$

$=$ [ф-ла де М.] $= (A \cup B) \cap (X \setminus (A \cap B)) = A \cup B \setminus A \cap B.$

Або:



2.2 $X = \mathbb{R}^2$. Чи буде топологією на X

$\mathcal{T} := \{\emptyset, X\} \cup \{B_r(0)\}_{r>0}$.

Тут $B_r(x) = \{y \mid |x-y| < r\}$.

Треба перевірити аксіоми.

1. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}$, де A - деяка індексуюча множина. Тобто для кожного $\alpha \in A$ $U_\alpha = B_{r_\alpha}(0)$ для деякого $r_\alpha > 0$ або $U_\alpha = \emptyset$ (такі не впливають на об'єднання) або $U_\alpha = X$ (тоді об'єднання - це $X \in \mathcal{T}$). Отже, достатньо розглянути випадок, коли всі U_α - круги:

$$\bigcup_{\alpha\in A} B_{r_\alpha}(0) = B_{\sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha}(0).$$ (або $= X$, якщо $\sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha = +\infty$).

(можна також брати $\emptyset = B_0(0)$ і $X = B_{+\infty}(0)$, тоді це теж вірно)

Перевіримо: **$\subset$.** Нехай $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} B_{r_\alpha}(0)$. Тоді $\exists\, \alpha_0 \in A$: $x \in B_{r_{\alpha_0}}(0) \subset B_{\sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha}(0)$. Останнє включення випливає з $r_{\alpha_0} \le \sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha$ і $B_{r_1}(0) \subset B_{r_2}(0)$ при $r_1 \le r_2$: $|x| < r_1 \Rightarrow |x| < r_2$.

Це вірно і коли $\sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha = +\infty$: справа буде X.

$\underline{\supset}$. Нехай $x \in B_{\sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha}(0)$, тобто $|x| < \sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha$. За def. супремума, $\exists\, \alpha_0 \in A : |x| < r_{\alpha_0}$, тобто $x \in B_{r_{\alpha_0}}(0) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} B_{r_\alpha}(0)$.

Оскільки $B_{\sup\limits_{\alpha\in A} r_\alpha}(0) \in T$, аксіома $\underline{1}$. виконана.

$\underline{2}$. Нехай $\{U_i\}_{i=1}^n \subset T$. Якщо серед них $\in \varnothing$, то їх перетинеис $\varnothing \in T$, а наявність серед них X не впливає на перетин. Тому можемо вважати $U_i = B_{\varepsilon_i}(0)$, $i = \overline{1,n}$. Тоді

$\bigcap\limits_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(0) = B_{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i}(0)$. Дійсно,

$\underline{\subset}$. $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(0) \Rightarrow \forall i = \overline{1,n}\ x \in B_{\varepsilon_i}(0)$, зокрема, $x \in B_{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i}(0)$ (оскільки цей min - одне з ε_i).

$\underline{\supset}$. $x \in B_{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i}(0) \Rightarrow x \in B_{\varepsilon_i}(0)\ \forall i = \overline{1,n}$, бо $\min\limits_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i \le \varepsilon_i$.

Тому $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n B_{\varepsilon_i}(0)$.

Оскільки $B_{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \varepsilon_i}(0) \in T$, аксіома $\underline{2}$. виконана.

$\underline{3}$. Виконана: $\varnothing, X \in T$ за $\underline{\text{def}}$.

$\underline{2.3.}$ $X = \{a, b, c, d\}$. Які з систем є топологіями?

1). $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b\}\}$.

Так (1., 2., 3. виконуються).

2) $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,d\}\}$.

Ні: $\{a,b\} \cup \{b,d\} = \{a,b,d\} \notin \tau$: 1. не виконується.

3) $\tau = \{\varnothing, X, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$

Ні: $\{a,c,d\} \cap \{b,c,d\} = \{c,d\} \notin \tau$: 2. не виконується.

2.4. $X = \mathbb{R}$. Чи буде топологією $\tau = \{\varnothing\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid |U| = \infty\}$.

Ні. Тут виконуються 1. ($|U_\alpha| = \infty \ \forall \alpha \in A \Rightarrow |\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha| = \infty$) і 3. ($\varnothing \in \tau$; $|\mathbb{R}| = \infty \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau$), але не 2. : наприклад, $U = (-\infty, 0] \in \tau$ і $V = [0, +\infty) \in \tau$, але $U \cap V = \{0\} \notin \tau$.

2.5. $X = \mathbb{R}$. Чи буде топологією $\tau = \{\varnothing\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid |\mathbb{R} \setminus U| < \infty\}$

(порожня і доповнення до скінченних).

Так. Це було в лекції, але можна перевірити ще раз:

1. Нехай $\{U_\alpha\} \subset \tau$. Порожні серед них не впливають на

об'єднання, тому можна вважати, що $\forall \alpha \in A$ $|\mathbb{R} \setminus U_\alpha| < \infty$.

Тоді $|\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha| = |\bigcap\limits_{\alpha \in A} \mathbb{R} \setminus U_\alpha| < \infty \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in T$.

2. Нехай $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subset T$. Якщо серед них $\in \varnothing$, то і переріз буде $\varnothing \in T$. Тому можна вважати, що $|\mathbb{R} \setminus U_i| < \infty$ $\forall i = \overline{1,n}$.

Тоді $|\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i| = |\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbb{R} \setminus U_i| < \infty \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in T$.

3. $\varnothing \in T$, $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}| = |\varnothing| = 0 \Rightarrow \mathbb{R} \in T$.

2.6. Навести приклади множин:

1) одночасно відкритих і замкнених.

$\varnothing$, X для $\forall$ простору,

Будь-яка - в дискретній топології.

2) тих, що не є ні відкритими, ні замкненими.

Будь-яка крім $\varnothing$ і X в антидискретній.

$[0,1)$ в топології прямої:

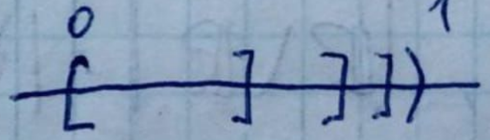
$\forall \varepsilon > 0$ $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset [0,1)$, тому $[0,1)$ – не відкрита.

$\mathbb{R} \setminus [0,1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. $\forall \varepsilon > 0$ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \not\subset \underbrace{[1,+\infty)}_{(-\infty,0)\cup}$,

тому $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ – не відкрита, отже $[0,1)$ не замкнена.

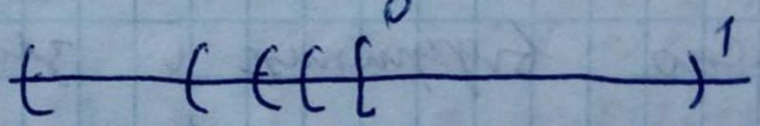
2.11. $[0,1)$ не відкритий і не замкнений (див. попер. задачу), але є об'єднанням замкнених множин і перетином відкритих:

$$[0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$$



$\left(\forall x \in [0,1) \ \exists n: \ x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]\right)$.

$$[0,1) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1\right)$$



($\supset$ вірне, бо $\forall \ x \notin [0,1) \ \exists \ n: x \notin \left(-\frac{1}{n}, 1\right)$).

3.1. Чи можуть різні топології мати одну базу?

Ні, бо базою $\mathcal{B}$ топологія $\mathcal{T}$ визначена однозначно:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \;\middle|\; \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{B} \right\}$$

3.3. Вказати якісь бази 1) Дискретної топології

Одноточкові множини: $\mathcal{B}=\{\{x\}\}_{x\in X}$. Дійсно, вони відкриті, і $\forall\, U\subset X \quad U=\bigcup\limits_{x\in U}\{x\}$.

З іншого боку, $\forall$ бази $\mathcal{B}$ і $\forall x\in X$ $\{x\}$ - відкр., тому $\exists\, V\in\mathcal{B} : x\in V\subset\{x\}$, тобто $\{x\}=V\in\mathcal{B}$.

Тобто це найменша можлива база.

3) Антидискретна.

$\mathcal{B}=\{X\}$.

4) $X=\mathbb{R}$, $T=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{(a,+\infty)\}_{a\in\mathbb{R}}$.

$\mathcal{B}=\{(q,+\infty)\}_{q\in\mathbb{Q}}$. Дійсно, $\forall\,(a,+\infty)\in T\ \forall x\in(a,+\infty)\ \exists\, q\in\mathbb{Q} : a<q<x$, тобто $x\in(q,+\infty)\subset(a,+\infty)$.

3.4 Показати, що будь-яку базу $\mathcal{B}$ стандартної топології $\mathbb{R}$ можна зменшити, тобто $\exists\,\tilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ (строге включення): $\tilde{\mathcal{B}}$ - база.

Оберемо деяку $U\in\mathcal{B}$. Згідно з <u>def.</u> стандартної топології, $\forall x\in U$ $\exists\,\varepsilon>0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset U$. Зменшуючи ε за потреби, можемо вважати, що це включення строге.

Оскільки $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ - відкрита, $\exists\ U_x \in B: x \in U_x \subset$
$\subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$, причому $U_x \neq U$. Отже, $U = \bigcup_{x \in U} U_x$,
де $U_x \in B: U_x \neq U$. Тому U можна викинути:
$\tilde{B} := B \setminus \{U\}$ - теж база, бо будь-яку відкриту можна
представити їх об'єднанням.