Гладкі многовиди і гладкі відображення

Література:

1. М. М. Постников. Гладкие многообразия (Лекции по геометрии, семестр III).

2. М. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс.

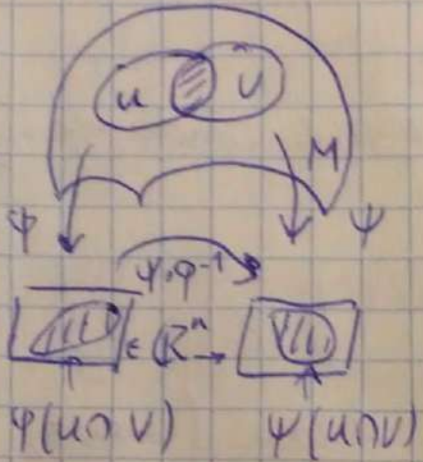
3. М. Хирш. Дифференциальная топология.

def n-вимірним ($n \in \mathbb{Z}_+$) многовидом (топологічним) будемо називати хаусдорфовий з ($\leq$) зліченною базою топологічний простір M такий, що $\forall p \in M$ $\exists$ відкрите $U \ni p_M$ і гомеоморфізм $\Phi: U \to \mathbb{R}^n$ (n наз. вимірністю M: $n = \dim M$)

<u>Rem.</u> $\mathbb{R}^n$ тут можна замінити на відкр. кулю $B^n \subset \mathbb{R}^n$ (або на будь-яку $V \subset \mathbb{R}^n$: V гомеоморфна $\mathbb{R}^n$), отримаємо екв. означення.

<u>def.</u> Пара (U, Φ) з попереднього <u>def.</u> зветься картою M, U - носієм карти (координатним околом), Φ - коорд. відображенням, якщо $\Phi = (x^1, \ldots, x^n)$, $x^i: U \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ звуться локальними координатами, що відповідають цій карті. Набір карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ зветься атласом M, якщо $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = M$

<u>def.</u> Нехай (U, Φ), (V, Ψ) - карти M, $U \cap V \neq \emptyset$. Відображення переходу (заміни координат) від першої карти до другої зветься $\Psi \circ \Phi^{-1}: \Phi(U \cap V) \to \Psi(U \cap V)$



def. Атлас $\mathcal{A}$ зветься k-гладким (де $k \in \mathbb{Z}_+$ або $k = \infty$), якщо $\forall\ (U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ таких, що $U \cap V \neq \emptyset$,

$$\psi\circ\varphi^{-1} \in C^k(\varphi(U\cap V), \psi(U\cap V))$$

Rem. Це буде k-дифеоморфізм відкр. підмножин $\mathbb{R}^n$.

def. Два k-гл. атласи $\mathcal{A}$ і B многовиду M наз. еквівалентними, якщо $A \cup B$ – k-гл. атлас.

Впр. Це відношення еквівалентності.

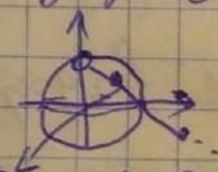
def. k-гладкою структурою на многовиді M зветься клас еквівалентності k-гл. атласів M. Пара $(M, [\mathcal{A}])$ де $[\mathcal{A}]$ – k-гл. структура на многовиді M, зветься k-гладким многовидом

Rem. $\forall$ k-гл. стр. (атлас, многовид) є l-гладкою для $l \leq k$, зокрема $\forall$ многовида $\exists!$ (тривіальна) 0-гл. стр.

$\forall$ атлас - 0-гл. і $\forall$ два еквівалентні.

<u>Ex. 1</u> $\mathbb{R}^n$ - n-вимірний ∞-гл., $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ задає стандартну гладку стр.

<u>2.</u> S^n - n-вимірний ∞-гл.: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, стандартна гл. стр. задається атласом з 2 карт (стереогр. проекції)



<u>3.</u> M, N - k-гладкі многовиди $\Rightarrow$ $M \times N$ - k-гл. многовид (<u>Впр.</u>) Наприклад, n-вимірний тор $T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ - ∞-гладкий (і взагалі $\dim M \times N = \dim M + \dim N$),

<u>4.</u> M - n-вимірний k-гладкий, $U \subset M$ - відкрите $\Rightarrow$ U - n-вимірний k-гладкий многовид (<u>Впр.</u>)

<u>5.</u> $\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (n-вимірний дійсний проективний простір) - простір прямих $\mathbb{R}^{n+1}$, що проходять через 0.

$\mathbb{RP}^n = \{(x^1 : \ldots : x^{n+1})\}$, де $(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = [(x^1, \ldots, x^{n+1})]$.

$(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = (\lambda x^1 : \ldots : \lambda x^{n+1})\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Або: $\mathbb{R}P^n = S^n / \mathbb{Z}_2$:  – простір пар діаметрально протилежних точок S^n.

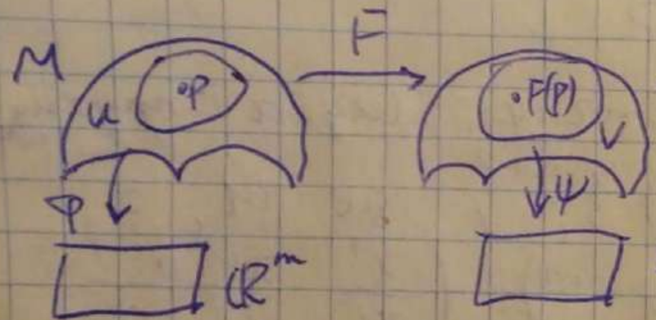
Це n-вимірний ∞-гл. многовид, станд. гладка структура задається атласом $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$, де $U_i = \{(x^1 : \ldots : x^{n+1}) \mid x^i \neq 0\}$, $\varphi_i(x^1 : \ldots : x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \ldots \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \ldots \frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$.

(комплексний проективний простір)

Впр. Перевірити, що це ∞-гл. атлас. Що таке $\mathbb{C}P^n$? Чи є воно гл. многовидом? Якої вимірності?

def. Нехай M, N – k-гл. многовиди. Неперервне $F: M \to N$ наз. k-гладким, якщо $\forall p \in M$ і $\forall$ карт (U, φ) і (V, ψ) із якихось атласів гладких структур M і N відповідно таких, що $p \in U$, $F(p) \in V$ відображення $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ – k-гладке.

Rem. $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ наз. локальним заданням F у відн. парі карт (у відн. локальних координатах). Це відображення підмножин $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$, де $m = \dim M$, $n = \dim N$



(Впр. Яких підмножин?)

Якщо $(x^1, \dots, x^m)$, $(y^1, \dots, y^n)$ – лок. коорд., що відповідають (U, φ) та (V, ψ), то його можна записати у вигляді:

$$y^1 = F^1(x^1, \dots, x^m)$$
$$\dots$$
$$y^n = F^n(x^1, \dots, x^m)$$

Rem. В силу означення гладкої структури, гладкість достатньо перевірити лише для однієї пари карт (U, φ), (V, ψ) в околі кожної $p \in M$ (Впр.)

Множина k-гл. відображень $M \to N$ позначається $C^k(M, N)$. Очевидно,

$C^k(M,N) \subset C^{k-1}(M,N) \subset \ldots \subset C^0(M,N) = C(M,N)$.

Крім того, $F \in C^k(M,N)$, $G \in C^k(L,M)$ $\mapsto$ $F \circ G \in C^k(L,N)$ (Впр.)

Ex. 1. k-гладкі криві $\gamma \in C^k((a,b),M)$, де $(a,b) \subset \mathbb{R}$

2. k-гладкі функції $f \in C^k(M) := C^k(M,\mathbb{R})$.

3. k-дифеоморфізми:

def $F: M \to N$ наз. k-дифеоморфізмом, якщо F-біє, $F \in C^k(M,N)$, $F^{-1} \in C^k(N,M)$. Якщо існує такий диф-зм, M і N наз. k-дифеоморфними ($M \cong N$)

Впр. Це відношення еквівалентності.

Впр. $\forall$ карти (U,φ) (з атласу k-гл. стр. M) $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ - k-дифео-зм

Rem. Зокрема, F - дифеоморфізм $\Rightarrow$ F - гомеоморфізм $\Rightarrow$ $\dim M = \dim N$.

Впр. Якщо $[A]$ і $[B]$ - k-гл. стр. на M, то $id_M: (M,[A]) \to (M,[B])$ - k-дифеоморфізм $\Leftrightarrow$ $[A] = [B]$.

Rem. Якщо розглядати не id_M, а якесь довільне $F: M \to M$ отримаємо означення еквівалентності гладких структур на M.

Дотичний простір і диференціал

Нехай M - k - гладкий многовид, $k \geq 1$, $n = \dim M$.

<u>def</u> Дотичним вектором M в $p \in M$ будемо називати відображення

$$v : \begin{Bmatrix} \text{карти } (U, \varphi) \text{ з} \\ \text{гладкої структури } M \\ \text{такі, що } p \in U \end{Bmatrix} \to \mathbb{R}^n$$

таке, що якщо $v((U,\varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$, а $v((\tilde{U}, \tilde{\varphi})) = (\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$, то $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$\tilde{v}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p)\, v^j \qquad (*)$$

далі не пишемо → $\sum_{j=1}^{n}$

де $(x^1, \dots, x^n)$, $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ - лок. коорд., що відп. (U, φ) і $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ відповідно, а $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) := \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p))$ - часткові похідні відображень переходу.

<u>Rem.</u> Побічно $(\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) = (\tilde{x}^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \tilde{x}^n(x^1, \dots, x^n))$

Rem. 3 (*) викликає що значення v достатньо задати в
(при цьому значення в $\forall$ парі карт узгоджені за правилом (*) – Впр.),
одній карті. Зокрема, якщо це значення $= 0$ в одній карті, воно $= 0$ і $\forall$ іншої (і в цьому випадку пишемо $v = 0$)

def. Лінійні операції над дотичними векторами в p задаються наступним чином:

$$(v + w)((U, \varphi)) := v((U, \varphi)) + w((U, \varphi)),$$

$$(\lambda v)((U, \varphi)) := \lambda \cdot v((U, \varphi)),$$

де v, w – дот. вектори в p, $\lambda \in \mathbb{R}$, (U, φ) – карта з $p \in U$

Rem. В силу лінійності (*) $v + w$ і λv – також дотичні вектори в p (коректно визначені).

Cor. Дотичні вектори в p утворюють векторний простір (підпростір у просторі всіх відображень з множини карт в околі p у $\mathbb{R}^n$)

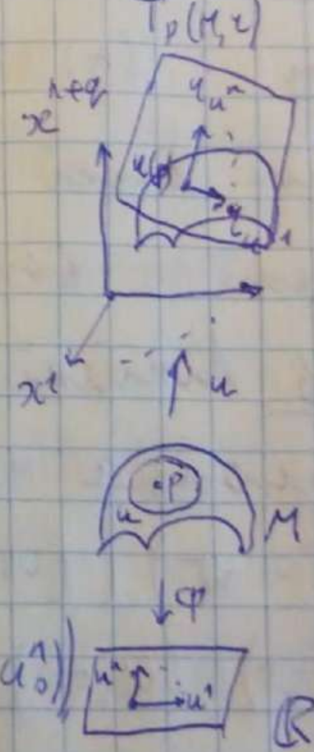
def. Цей простір зветься дотичним простором (до) M у

p і позначається T_pM.

<u>Ex.</u> Нехай $\psi \in C^k(M, \mathbb{R}^{n+q})$, $q \in \mathbb{Z}_+$, $p \in M$, (U,φ) — карта з $p \in U$ і лок. коорд. $(u^1,\dots,u^n)$.

Тоді $id \circ \psi \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$ — лок. задання ψ:

$(u^1,\dots,u^n) \mapsto (x^1(u^1,\dots,u^n),\dots,x^{n+q}(u^1,\dots,u^n))$.



Позначимо

$$\psi_{u^i}(p) := \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}(u_0^1,\dots,u_0^n),\dots,\frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(u_0^1,\dots,u_0^n)\right)$$

де $(u_0^1,\dots,u_0^n) = \varphi(p)$ — координати p ($\psi_{u^i}(p) \in \mathbb{R}^{n+q}$).

Будемо розглядати такі ψ, для яких $\forall p \in M$ і $\forall$ карти (U,φ) в околі p вектори $\{\psi_{u^1}(p),\dots,\psi_{u^n}(p)\}$ лінійно незалежні в $\mathbb{R}^{n+q}$. У цьому випадку ψ зветься регулярним (або занурення), а пара (M,ψ) — підмноговидом у $\mathbb{R}^{n+q}$ (нижче ми дамо відповідні загальні означення). Наприклад, при $n=2, q=1$ ця умова еквівалентна $[r_{u^1}(P), r_{u^2}(P)] \neq 0$. У заг. випадку вона також еквівалентна умові $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}(\varphi(P))\right)_{\substack{a=\overline{1,n+k}\\ i=\overline{1,n}}} = n$ (м-ця Якобі лок. задання r).

Нехай тепер $P \in U \cap \tilde{U}$, де $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ — якась інша карта з лок. коорд. $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$. Тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$r_{\tilde{u}^i}(P) = \frac{\partial(r\circ\tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(P)) = \frac{\partial(r\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(P)) = \begin{bmatrix}\text{похідна}\\ \text{компо-}\\ \text{зиції}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial(r\circ\varphi^{-1})}{\partial u^j}(\varphi(P))\,\frac{\partial(\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(P)) = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{u}^1_0, \dots, \tilde{u}^n_0)\cdot r_{u^j}(P),$$

де $(\tilde{u}^1_0, \dots, \tilde{u}^n_0) = \tilde{\varphi}(P)$ — нові координати P, і $\left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\varphi}(P))\right)_{i,j=1}^{n}$ — м-ця Якобі відобр. переходу $\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ у $\tilde{\varphi}(P)$. Оскільки це відобр. — дифеоморфізм, ця м-ця невироджена. Тому система $\{r_{\tilde{u}^1}(P), \dots, r_{\tilde{u}^n}(P)\}$ також лін. незалежна (тобто умову регулярності достатньо перевірити в одній карті), і лінійна оболонка

$\mathrm{span}\{\varphi_{\tilde{u}^1}(P), \ldots, \varphi_{\tilde{u}^n}(P)\} = \mathrm{span}\{\varphi_{u^1}(P), \ldots, \varphi_{u^n}(P)\}$ — залежить лише від (M, φ) і P. Назвемо цей підпростір $\mathbb{R}^{n+q}$ $T_P(M, \varphi) := \mathrm{span}\{\varphi_{u^i}(P)\}_{i=1}^{n}$ дотичним підпростором (M, φ) у P. Відповідний афінний підпростір, що проходить через $\varphi(P)$, назвемо аф. дотичним підпростором (M, φ) у P. Тоді $\{\varphi_{u^i}(P)\}_{i=1}^{n}$ - його базис.

Для $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$ і кривої $\varphi = \gamma \in C^k((a, b), \mathbb{R}^{n+q})$
$\varphi_t(t_0) = \gamma'(t_0) = ((\gamma^1)'(t_0), \ldots, (\gamma^{n+q})'(t_0))$ - дотичний вектор, і умова регулярності означає $\gamma'(t_0) \neq 0 \ \forall t_0 \in (a, b)$.
Тоді $T_{t_0}((a, b), \gamma)$ - це пряма, натягнута на $\gamma'(t_0)$, а відп. аф. підпростір - дотична до γ у $\gamma(t_0)$.

Зауважимо, що $\varphi_{u^i}(P)$ - це дотичний вектор до кривої $t \mapsto (u_0^1, \ldots, t, \ldots, u_0^n) \xmapsto{\varphi \circ \phi^{-1}} (x^1(u_0^1, \ldots, t, \ldots, u_0^n), \ldots, x^{n+q}(u_0^1, \ldots, t, \ldots, u_0^n))$
(i-тої координатної лінії (M, φ) у відп. лок. коорд.)

у $t_0 = u_0^i$. Нехай тепер $\gamma \in C^k((a,b), M)$ – крива в M. Тоді $\varphi \circ \gamma \in C^k((a,b), \mathbb{R}^{n+q})$ (як композиція гладких) – гл. крива в $\mathbb{R}^{n+q}$. Нехай $\gamma(t_0) = p$. Тоді лок. задання γ: $(\phi \circ \gamma)(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ (воно визначене на $\gamma^{-1}(U) \ni t_0$). Для $t \in \gamma^{-1}(U)$ $(\varphi \circ \gamma)(t) = (\varphi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma)(t) =$

$$= \left(x^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \dots, x^{n+q}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))\right),$$

тому

$$(\varphi \circ \gamma)'(t_0) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}(\gamma^1(t_0), \dots, \gamma^n(t_0))(\gamma^i)'(t_0), \dots, \frac{\partial x^{n+q}}{\partial u^i}(\gamma^1(t_0), \dots, \gamma^n(t_0))(\gamma^i)'(t_0)\right) =$$

$$= (\gamma^i)'(t_0)\, \varphi_{u^i}(p) \in T_p(M, \varphi)$$

Впр. Перевірити, що вірне і обернене включення, тобто

$$T_p(M, \varphi) = \{(\varphi \circ \gamma)'(t_0) \mid \gamma \in C^k((a,b), M) : \gamma(t_0) = p\}.$$

Отже, дотичний підпростір – це множина усіх дотичних векторів до кривих, що проходять через p у M. Відповідно, аф. дот. підпростір – це об'єднання дотичних до цих кривих.

Нехай $v \in T_p(M, \varphi)$. Розкладемо його по двох базисах:

$$v = v^i \varphi_{u^i}(p) = \tilde{v}^i \varphi_{\tilde{u}^i}(p) \ominus$$

З співвідношень вище:

$$\ominus\ \tilde{v}^i \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p)\, \varphi_{u^j}(p)$$

(тут повинно бути $\tilde{\varphi}(p)$, але ми спростимо позначення)

Прирівнюючи коеф. при базисних векторах, отримаємо:

$$v^j = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(p)\, \tilde{v}^i \qquad j = \overline{1, n}$$

У ан-но: $\displaystyle \tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}(p)\, v^i$.

Ми отримали правило (*). Це мотивує наше означення і демонструє, що можна встановити лін. ізоморфізм між T_pM і $T_p(M, \varphi)$ для будь-якого регулярного $\varphi: M \to \mathbb{R}^{n+q}$: якщо (U, φ) – якась карта в околі p з лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$, і $v((U, \varphi)) = (v^1, \dots, v^n)$, то $v \mapsto v^i \varphi_{u^i}(p)$.

Повернемося до загального випадку і розглянемо приклад дотичного вектора:

<u>Ex.</u> Нехай (U, φ) - карта в околі p з лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$. Позначимо $\forall\ i = \overline{1,n}$ через $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ вектор, що ставить у відповідність карті (U, φ) набір $(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (як ми зауважили, значення у будь-якій іншій карті знаходиться тоді зі допоміжного $(*)$).

<u>Rem</u> Якщо тепер $v \in T_pM$ і $v((U, \varphi)) = (v^1, \dots, v^n) = v^1(1, \dots, 0) + \dots + v^n(0, \dots, 1)$, то $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. У якщо $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$, то, розглянувши значення цього вектора в (U, φ), отримаємо $v^1 = \dots = v^n = 0$. Тобто $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ - повна і лін. незалежна в T_pM.

<u>Cor.</u> $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ - базис T_pM. Зокрема, $\dim T_pM = n$.

Rem: У $T_p(M,\mathcal{A})$ вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ відповідає $\varphi_{u^i}(p)$.

def Похідною функції $f \in C^k(M)$ у напрямку вектора $v \in T_pM$ (у точці p) зветься

$$v(f) := v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \in \mathbb{R},$$

де $(x^1, \ldots, x^n)$ - лок. координати деякої карти (U,φ), $p \in U$,

$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (як ми бачили, це $\Leftrightarrow v((U,\varphi)) = (v^1, \ldots, v^n)$),

і $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$ - спрощене позначення.

Рм. Це означення коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

▷ Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ - інша карта з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ і $v = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$. Тоді

$$\tilde{v}^i \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = [(*)] = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i}(p) = \left[\begin{matrix}\text{розписуємо} \\ \text{позначення}\end{matrix}\right] =$$

$$= v^j \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial (f \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}^i}(\tilde{\varphi}(p)) = \left[\begin{matrix}\text{диф.} \\ \text{композиції}\end{matrix}\right] =$$

$$= v^j \frac{\partial (f \circ \cancel{\tilde{\varphi}^{-1}} \circ \cancel{\tilde{\varphi}} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(\varphi(p)) = v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$$ ◭

Rem. Зокрема, $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \delta_i^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

Rem. $\forall\, v \in T_pM$ визначає відображення $C^k(M) \to \mathbb{R}$:
$f \mapsto v(f)$, що має наступні властивості:

1. Лінійність: $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$;
2. Правило Лейбніца: $v(fg) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$;

$\forall\, f, g \in C^k(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Це випливає з def. і власт. частк. похідних.

Можна показати, що між простором таких відображень і T_pM ця відповідність встановлює природній ізоморфізм (тому ще говорять, що дотичний вектор — це диференціювання).

Ex. Якщо $M = \mathbb{R}^n$ або $M = U$ - відкрита підмножина $\mathbb{R}^n$, то $\forall\, p \in M$ у околі p існують глобальні координати $(x^1, \dots, x^n)$ простору і відп. базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ T_pM. Тоді ототожнимо T_pM з $\mathbb{R}^n$: $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \leftrightarrow (v^1, \dots, v^n)$.

Деф. Нехай $\gamma \in C^k((a,b), M)$ – гладка крива в M, $t_0 \in (a,b)$: $\gamma(t_0) = p$. Тоді дотичним вектором γ в t_0 зветься

$$\gamma'(t_0) := (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M,$$

де $(x^1, \ldots, x^n)$ – лок. координати деякої карти (U, φ), $p \in U$,

$(\gamma^1, \ldots, \gamma^n) := \varphi \circ \gamma : \gamma^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ – лок. задання γ

якщо $\gamma'(t_0) \neq 0$, γ наз. регулярною в t_0 (і регулярною, якщо вона рег. в $\forall t_0$)

Рч. Це озн. коректне, тобто не залежить від вибору карти в околі p.

▷ Нехай $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ – інша карта в околі p з лок. коорд. $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$, і $(\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^n) := \tilde{\varphi} \circ \gamma = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$. Тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$(\tilde{\gamma}^i)'(t_0) = \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j} (\varphi(\underbrace{\gamma(t_0)}_{p})) ((\varphi \circ \gamma)^j)'(t_0) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}(p) (\gamma^j)'(t_0)$$

тобто $\gamma'(t_0) : (U, \varphi) \mapsto ((\gamma^1)'(t_0), \ldots, (\gamma^n)'(t_0))$ задовольняє $(*)$ і визначає елемент $T_p M$ з розкладенням по $\frac{\partial}{\partial x^i}$ з деф. ◁

Rem. Для $f \in C^k(M)$ (і довільних лок. коорд. в околі $\gamma(t_0)=p$):

$\gamma'(t_0)(f) = (\gamma^i)'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(t_0)) =$ [похідна композиції] $=$

$= ((f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma))'(t_0) = (f\circ\gamma)'(t_0)$ (тут $f\circ\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}$).

Рг. $T_pM = \{\gamma'(t_0) \mid \gamma\in C^k((a,b),M) : \gamma(t_0)=p\}$.

Rem. Пор. з описом $T_p(M,\mathcal{U})$ вище: вектору $\gamma'(t_0)\in T_pM$ відповідає $(\psi\circ\gamma)'(t_0)\in T_p(M,\psi)$.

▷ Тобто треба довести, що $\forall\, v\in T_pM$ має такий вигляд. Дійсно, нехай (U,φ) - карта в околі p з лок. коорд. $(x^1,..,x^n)$ і $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Покладемо

$\gamma(t) := \varphi^{-1}(x_0^1+v^1t,..,x_0^n+v^nt)$, $\boxed{\gamma\in C^k(\mathbb{R},M)}$

де $(x_0^1,..,x_0^n)=\varphi(p)$. Тоді $\gamma(0)=\varphi^{-1}(\varphi(p))=p$, і

$\gamma'(0) = v^i\frac{\partial}{\partial x^i} = v$ за означенням ($\gamma^i(t) = x_0^i + v^it$). ◁

Rem. Зокрема, T_pM можна природнім чином ототожнити з множиною класів еквівалентності гладких кривах, що проходять через p : ми вважаємо $\gamma \sim \mu$, якщо $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$ і $\forall f \in C^k(M)$ $(f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$.

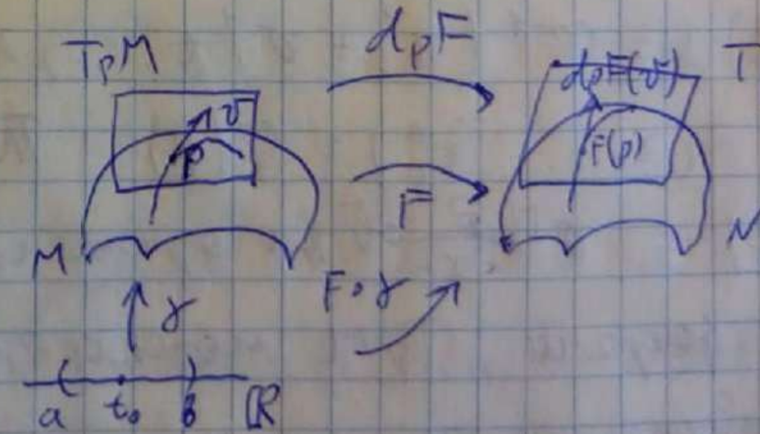
Тобто є 3 способи означення дотичного вектору через лок. координати, через диференціювання і через криві.

__def.__ Нехай M, N - k-гладкі, $F \in C^k(M,N)$, $k \geq 1$. Для $p \in M$ диференціал F у p $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ визначається наступним чином:

$\forall v \in T_pM$ нехай $v = \gamma'(t_0)$, де $\gamma \in C^k((a,b), M)$ з $\gamma(t_0) = p$.

Тоді

$$d_pF(v) := (F \circ \gamma)'(t_0)$$



__Rem.__ γ існує в силу попер. Pr.

Рет. Нехай (U,φ) і (V,ψ) – карти з $p\in U$, $F(p)\in V$ (задана, $p\in U\cap F^{-1}(V)\neq\varnothing$) з лок. коорд. $(x^1,\dots,x^m)$ і $(y^1,\dots,y^n)$ відповідно, $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}=(F^1,\dots,F^n)$ – лок. задання F. Нехай $v=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. За умовою тоді $\forall\, i=\overline{1,n}$ $v^i=(\gamma^i)'(t_0)$, де $(\gamma^1,\dots,\gamma^m)=\varphi\circ\gamma$ – лок. задання γ. Тоді лок. задання $F\circ\gamma$: $\psi\circ F\circ\gamma=(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma)$, тому

$$d_pF(v)=(F\circ\gamma)'(t_0)=((F\circ\gamma)^a)'(t_0)\frac{\partial}{\partial y^a}=\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\cdot(\gamma^i)'(t_0)\frac{\partial}{\partial y^a}=$$

$$=\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\,v^i\frac{\partial}{\partial y^a},$$ де

$$\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p):=\frac{\partial(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})^a}{\partial x^i}(\varphi(p)),$$ i змінюється від 1 до m, а a – від 1 до n. Помітно, що цей вираз не залежить від γ, а оригінальне def. – від координат.

~~Тому~~ Крім того, він лінійний по v^i. Тому:

Cor. $d_pF: T_pM \to T_{F(p)}N$ коректно визначене, лінійне і у базисах $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ і $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ цих просторів має матрицю $\left(\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p)\right)_{\substack{a=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,m}}}$ (м-ця Якобі лок. задання F).

Rem. Пор. з означенням диференціала відобр. підмножин $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{R}^n$ (при цьому для відкритої $U \subset \mathbb{R}^m$ $T_pU \leftrightarrow \mathbb{R}^m$).

Pr. (правило диференціювання композиції, ланцюгове правило)

Для $F \in C^k(M,N)$, $G \in C^k(L,M)$, $\forall p \in L$

$$d_p(F \circ G) = d_{G(p)}F \circ d_pG.$$

▷ $\forall v \in T_pL: \; v = \gamma'(t_0), \; \gamma \in C^k((a,b),L), \; \gamma(t_0) = p:$

$$(d_p(F \circ G))(v) = ((F \circ G) \circ \gamma)'(t_0) = (F \circ (G \circ \gamma))'(t_0) =$$

$$= \left(d_{(G\circ\gamma)(t_0)}F\right)\left((G \circ \gamma)'(t_0)\right) = \left(d_{G(p)}F\right)\left(d_pG(v)\right) \quad ◁$$

Впр. Як виглядає d_pF у термінах диференціювань? Тобто для $v \in T_pM$: $f \in C^k(N)$ $d_pF(v)(f) = ?$