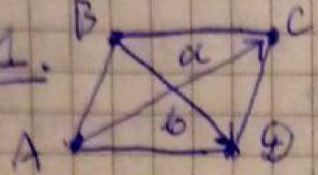
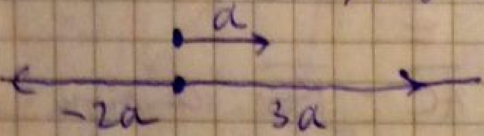
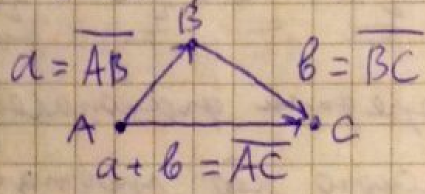
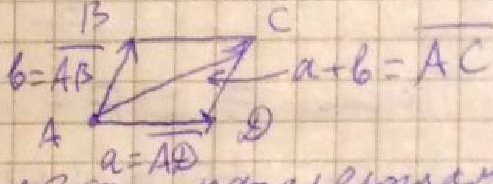
1. 

$\overline{AC} = a$ і $\overline{BD} = b$ – діагоналі паралелограма $ABCD$. Виразити $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ і $\overline{DA}$ через вектори a і b.

Лінійні операції з векторами:

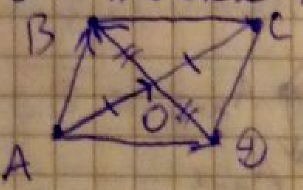




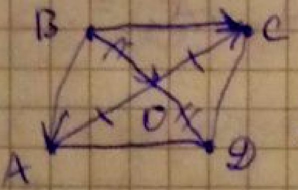


$ABCD$ – паралелограм

O – точка перетину AC і BD: ділить їх навпіл:



$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$



$$\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$$

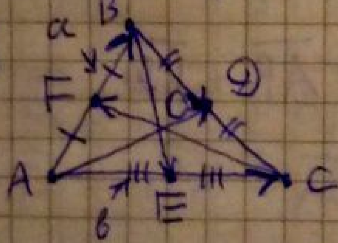
Або: $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = -\overline{AB} + \overline{AC} = -\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right) + a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$

$$\overline{CD} = \begin{bmatrix} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{bmatrix} = -\overline{AB} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

$$\overline{DA} = \begin{bmatrix} BC \parallel AD \\ BC = AD \end{bmatrix} = -\overline{BC} = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$$

Тобто координати в базисі $\{a, b\}$:

$\overline{AB}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{BC}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{CD}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{DA}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

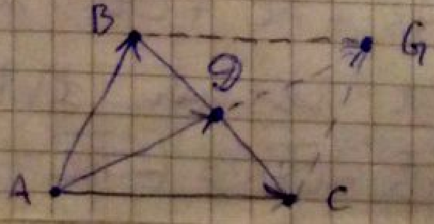
4. 

AD, BE, CF – медіани ΔABC. Представити $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ у вигляді лінійних комбінацій $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

Позначимо $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$, ~~O – точка перетину медіан~~.

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{AB} + \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{AC}) = \overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

Або: добудуємо до паралелограма $ABGC$, D – точка перетину діаг.



$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AG} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$

$\overline{BE} = \overline{BA} + \overline{AE} = -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} = -a + \frac{1}{2}b$

$\overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF} = -\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} = -b + \frac{1}{2}a.$

5. Знайти $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}$ (з попер. задачі).

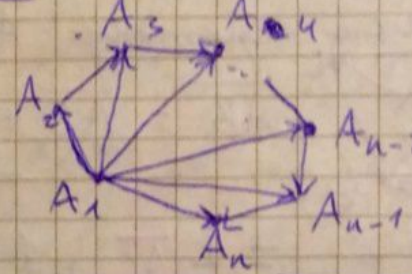
$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - b = 0.$

7. Точки E і F - середини діагоналей $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ чотирикутника ABCD (плоского або просторового). Показати, що

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{CB}}{2}$$

—

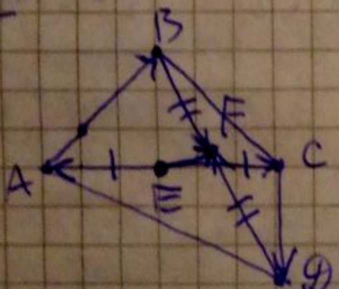
Узагальнимо правило трикутника:



$\overline{A_1A_n} = \overline{A_1A_{n-1}} + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_{n-2}} + \overline{A_{n-2}A_{n-1}} + \overline{A_{n-1}A_n} = \ldots$

$\ldots = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-2}A_{n-1}} + \overline{A_{n-1}A_n}.$

—



$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}$

$\overline{EF} = \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DF}$

Додамо:

$2\overline{EF} = \underbrace{\overline{EA} + \overline{EC}}_{0} + \overline{AB} + \overline{CD} + \underbrace{\overline{BF} + \overline{DF}}_{0} = \overline{AB} + \overline{CD},$

бо $\overline{EA} = -\overline{EC}$, $\overline{BF} = -\overline{DF}$.

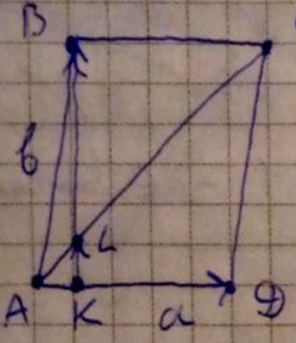
Отже, $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$. Друга рівність аналогічно

або:

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$, тому $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0$ (це вірно для ламаної з $\forall$ кількістю ланок).

Отже, $\overline{AB} + \overline{CD} = -\overline{BC} - \overline{DA} = \overline{CB} + \overline{AD}$, звідси друга рівність

11. $ABCD$ – паралелограм, $\overline{AK} = \frac{1}{5}\overline{AD}$, $\overline{AL} = \frac{1}{6}\overline{AC}$.
Показати, що $\overline{KL}$ і $\overline{LB}$ колінеарні і знайти $\frac{\overline{KL}}{\overline{LB}}$.



Виразимо обидва вектора через деякий базис, скажімо
$a := \overline{AD}$, $b := \overline{AB}$.

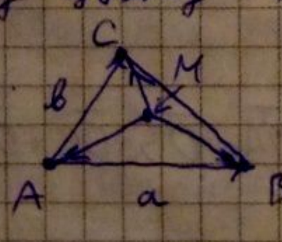
$\overline{KL} = \overline{KA} + \overline{AL} = -\overline{AK} + \overline{AL} = -\frac{1}{5}\overline{AD} + \frac{1}{6}\overline{AC} = -\frac{1}{5}\overline{AD} +$
$+ \frac{1}{6}(\overline{AD} + \overline{AB}) = -\frac{1}{30}\overline{AD} + \frac{1}{6}\overline{AB} = -\frac{1}{30}a + \frac{1}{6}b$,

$\overline{LB} = \overline{LA} + \overline{AB} = -\overline{AL} + \overline{AB} = -\frac{1}{6}\overline{AC} + \overline{AB} = -\frac{1}{6}(\overline{AD} + \overline{AB}) + \overline{AB} =$
$= -\frac{1}{6}\overline{AD} + \frac{5}{6}\overline{AB} = -\frac{1}{6}a + \frac{5}{6}b$.

Бачимо, що $\overline{KL} = \frac{1}{5}\overline{LB}$, тобто вони колінеарні ($\Leftrightarrow$ K, L, B лежать на одній прямій), і $\frac{\overline{KL}}{\overline{LB}} = \frac{1}{5}$.

9. У площині трикутника ABC знайти точку M:
$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$ (більш того, знайти <u>всі</u> такі точки).

Введемо базис $a := \overline{AB}$, $b := \overline{AC}$ і будемо шукати $\overline{AM}$ у цьому базисі: нехай $\overline{AM} = \lambda a + \mu b = \lambda\overline{AB} + \mu\overline{AC}$.

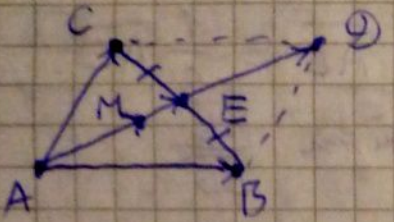


Тоді :

$\overline{MB} = \overline{MA} + \overline{AB} = -(\lambda a + \mu b) + a = (1-\lambda)a - \mu b$
$\overline{MC} = \overline{MA} + \overline{AC} = -(\lambda a + \mu b) + b = -\lambda a + (1-\mu)b$

Отже,
$0 = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = -\lambda a - \mu b + (1-\lambda)a - \mu b - \lambda a + (1-\mu)b =$
$= (1-3\lambda)a + (1-3\mu)b$.

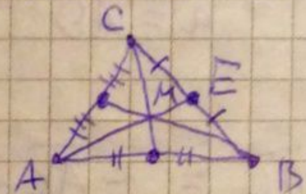
Тобто $1-3\lambda = 1-3\mu = 0$, $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$ (бо a, b неколінеарні):
$\overline{AM} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$ $\Leftrightarrow$ (зокрема, така M існує і єдина)



Добудуємо до паралелограма $ABDC$, його точка перетину діагоналей E — середина BC:

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AE}$.

Тобто M ділить $\overline{AE}$ у відношенні $2:1$ — є точкою перетину медіан ABC:



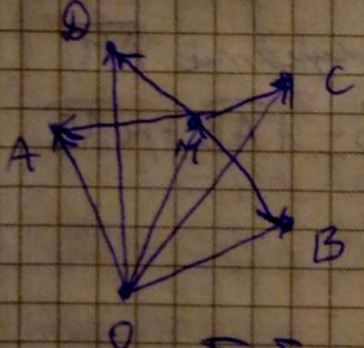
10. = 13. Нехай $ABCD$ — чотирикутник, плаский або просторовий (тетраедр). Знайти M (всі такі, що):

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 0.$$

~~[illegible]~~

Аналогічно до попер. задачі, можна було б виразити ~~MA~~ $\overline{AM}$ через $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ для 4-кутника у площині, через $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ — для тетраедра. Зробимо інакше:

Нехай O — точка у площині $ABCD$ або у просторі.



$\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA} = -\overline{OM} + \overline{OA}$. Ан-но,

$\overline{MB} = -\overline{OM} + \overline{OB}$, $\overline{MC} = -\overline{OM} + \overline{OC}$, $\overline{MD} = -\overline{OM} + \overline{OD}$.

Тоді маємо

$$0 = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = -4\overline{OM} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}.$$

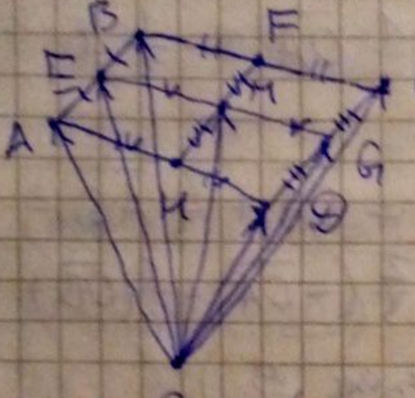
Тобто $\overline{OM} = \frac{1}{4}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$.

Отже, така M існує: достатньо від O відкласти вектор $\frac{1}{4}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$. Чому вона єдина? Що буде, якщо взяти іншу точку O' і M': $\overline{O'M'} = \frac{1}{4}\left(\overline{O'A} + \overline{O'B} + \overline{O'C} + \overline{O'D}\right)$?

$\overline{MM'} = \overline{MO} + \overline{OO'} + \overline{O'M'} = -\frac{1}{4}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right) + \overline{OO'} + \frac{1}{4}\left(\overline{O'A} + \overline{O'B} + \overline{O'C} + \overline{O'D}\right) = \overline{OO'} + \frac{1}{4}\left(-\overline{OA} + \overline{O'A}\right) + \frac{1}{4}\left(-\overline{OB} + \overline{O'B}\right) + \frac{1}{4}\left(-\overline{OC} + \overline{O'C}\right) + \frac{1}{4}\left(-\overline{OD} + \overline{O'D}\right) = \overline{OO'} + \frac{1}{4}\overline{O'O} + \frac{1}{4}\overline{O'O} + \frac{1}{4}\overline{O'O} + \frac{1}{4}\overline{O'O} = 0.$

Тобто $M = M'$, M єдина.

Що це за точка?



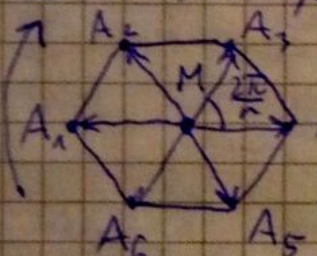
$$\overline{OM} = \frac{1}{4}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{OC}+\frac{1}{2}\overline{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OE}+\overline{OG}\right),$$

де E і G – середини AB і CD відп. (див. задачу 4.) Тоді M – середина EG.

Ан-но, M – середина FH, де F і H – середини BC і AD відп. Зокрема, це точка перетину EG і FH (а також IJ, де I і J – середини AC і BD відп.). Це вірно і для плоского $ABCD$, і для тетраедра.

Це приклад застосування радіусів-векторів. Аналогічно для n точок (задача 4.)

17. Нехай $A_1\ldots A_n$ – правильний n-кутник, M – його центр. Тоді $\overline{MA_1}+\ldots+\overline{MA_n}=0$.



Повернемо площину навколо M на кут $\frac{2\pi}{n}$. Тоді $\overline{MA_1}\to\overline{MA_2}$, $\overline{MA_2}\to\overline{MA_3}$, ..., $\overline{MA_n}\to\overline{MA_1}$, тобто $\overline{MA_1}+\ldots+\overline{MA_n}$ перейде в себе. Тоді він повинен дорівнювати 0.

18. Якщо $A_1\ldots A_n$ – правильний багатокутник, M – його центр, O – довільна точка простору, то $\overline{OM}=\frac{1}{n}\left(\overline{OA_1}+\ldots+\overline{OA_n}\right)$.

З 17. (узагальнення 13. на довільну кількість точок):

$$0=\overline{MA_1}+\ldots+\overline{MA_n}=\overline{OA_1}-\overline{OM}+\ldots+\overline{OA_n}-\overline{OM}=\overline{OA_1}+\ldots+\overline{OA_n}-n\overline{OM}.$$

(тут несуттєво, що $A_1\ldots A_n$ – правильний).