Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

О. Л. Ямпольський

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Вектори, прямі і площини

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів математичних факультетів університетів

Харків – 2020

УДК 514.12(075.8)

Я 93

Рецензенти:

В. О. Горькавий – доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу геометрії і диференціальних рівнянь Фізико-технічного інституту низьких температур імені Б. І. Вєркіна НАН України;

В. Т. Лисиця – кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики та інформатики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № від)

Ямпольський О. Л.

Я 93 Аналітична геометрія. Вектори, прямі і площини : навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії для студентів математичних факультетів університетів / О. Л. Ямпольський. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – 114 с.

Навчальний посібник призначено для самостійної роботи в процесі вивчення основ аналітичної геометрії та лінійної алгебри і розрахований на студентів математичних спеціальностей університетів, зокрема для студентів першого курсу факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Більшість вправ подано з розв'язками і підказками. Додатково в посібник включені деякі застосування методів аналітичної геометрії, а також елементи багатовимірної геометрії.

УДК 514.12(075.8)

Зміст

Вступ

Предметом аналітичної геометрії є класичні об'єкти дослідження елементарної геометрії, такі як прямі на площині і в просторі, площини в просторі, а також геометричні фігури на площині чи в просторі. Методом дослідження є метод координат, що базований на систематичному використанні векторної мови при розв'язанні геометричних задач. Розв'язки задач, що виконані за допомогою векторів, не містять інформації про вимірність простору, в якому власне розв'язувалась задача, і тому дозволяють далекосяжні узагальнення.

Певний клас задач – позиційних – *не потребує* наявності способу виміру довжин відрізків, тобто *метричної структури*. Такі задачі можуть бути розв'язані за наявності афінної системи координат. Це задачі на взаємне розташування точок, прямих і площин.

Інший клас задач – метричних – *потребує* наявності *метричної структури*, що визначається скалярним добутком. За наявності скалярного добутку на площині чи в просторі можна обрати прямокутну декартову систему координат і надати іншого змісту рівнянням прямих і площин, спростити розв'язання позиційних задач, виконати обчислення довжин відрізків, кутів між прямими та площинами в різних комбінаціях, відстаней між точками, прямими і площинами в різних комбінаціях, площ плоских та об'ємів просторових фігур.

Розділ 1 посібника містить основні відомості з векторної алгебри, вводиться поняття базису векторного простору, афінної системи координат. Розв'язуються позиційні задачі взаємного розташування точок, прямих і площин.

Розділ 2 містить розв'язання позиційно-метричних задач для точок, прямих і площин на площині та в просторі з використанням скалярного, векторного та мішаного добутків векторів у декартовій прямокутній системі координат. Визначається метрична форма площини та простору відносно афінної (косокутної) системи координат і описується методика розв'язання деяких метричних задач на площині і в просторі з афінною системою координат.

Розділ 3 містить застосування методів аналітичної геометрії до опису геометричних місць точок, опису рухів (ізометрій) площини та простору (теореми Шаля), обертального руху навколо осі за допомогою кватерніонів, опису опуклих множин та розв'язання задачі лінійного програмування.

Розділ 4 до певної міри є факультативним і містить узагальнення позиційних та метричних задач на випадок афінних просторів вимірності $n > 3$.

Матеріал посібника поданий у вигляді послідовності задач різного ступеня складності. У необхідних місцях надано означення, що використовуються при формульовці задач. Деякі задачі (такі, як теореми Шаля, метричні задачі в багатовимірних просторах та ін.) фактично є нетривіальними теоремами і тому подаються з повними доведеннями. Розв'язки більш простих задач подано для набуття читачем досвіду використання геометричних методів. Велика частина задач подана з підказками та відповідями.

Посібник спрямований перш за все на самостійну роботу в оволодінні методами аналітичної геометрії студентами математичних спеціальностей університетів. Зміст посібника відповідає курсу аналітичної геометрії, що викладається на факультеті математики і інформатики в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна.

Автор висловлює подяку колегам з кафедри фундаментальної математики Є. В. Петрову, О. О. Шугайло та Є. О. Каролінському за критичні зауваження і поради щодо змісту та мети посібника, а також студентам факультету математики і інформатики Г. Рослик та І. Гавриленку за надання акуратних конспектів лекцій.

Розділ 1

Позиційна аналітична геометрія

1.1 Вектори й операції над ними

В широкому розумінні алгебра – це наука про операції над певними об'єктами та про властивості цих операцій. В даному розділі розглядаються операції над векторами, тобто елементи *векторної алгебри*.

Спрямованим відрізком на площині або в просторі називається упорядкована пара точок (A, B). Точка A називається початковою точкою, або *початком* спрямованого відрізка, а точка B – його кінцевою точкою, або *кінцем* спрямованого відрізка. Спрямований відрізок з початком в точці A і кінцем в точці B позначають символом $\overrightarrow{AB}$.

Два спрямовані відрізки називаються *колінеарніми*, якщо вони розташовані на одній або на паралельних прямих.

Нехай l – пряма, $O \in l$. Точка O розбиває l на дві півпрямі. Зафіксуємо точку $A \neq O$ на прямій. *Променем* з початком у точці O називається об'єднання усіх відрізків, що містять точку A і мають спільний кінець у точці O. Спрямований відрізок $\overrightarrow{OA}$ однозначно визначає промінь, що ми позначимо через $ray(\overrightarrow{OA})$.

Нехай $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ – колінеарні спрямовані відрізки, *що лежать на одній прямій*. Ці відрізки називаються *співспрямованими* (позначення $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$), якщо $ray(\overrightarrow{AB}) \supset ray(\overrightarrow{CD})$ або $ray(\overrightarrow{CD}) \supset ray(\overrightarrow{AB})$. У протилежному випадку спрямовані відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються *протилежно спрямованими* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

З аксіом планіметрії відомо, що пряма розбиває площину на дві півплощини. Нехай $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні спрямовані відрізки, *що не лежать на одній прямій*. Вони називаються *співспрямованими*, якщо точки B і D лежать в *одній* півплощині відносно прямої AC і протилежно спрямованими, якщо точки B і D лежать в *різних* півплощинах відносно прямої AC.

Довжиною спрямованого відрізка $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відповідного відрізка $[A, B]$. Довжина спрямованого відрізка $\overrightarrow{AB}$ позначається як $|\overrightarrow{AB}|$.

Два спрямовані відрізки називаються *рівними*, якщо вони співспрямовані і мають однакову довжину.

Геометричним вектором називається сукупність усіх рівних між собою *спрямованих відрізків.* Кожен з таких спрямованих відрізків називається представником вектора. Вектори, на відміну від спрямованих відрізків, будемо позначати малими **напівжирними** літерами латинського алфавіту. Наприклад, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$.

Кожен спрямований відрізок однозначно визначає вектор, і кожен вектор має свого представника з початком у будь-якій точці площини або простору. Висловлювання "*Задати представника вектора в даній точці*" еквівалентне висловлюванню "*Відкласти вектор від даної точки*". Щоб не обтяжувати термінологію, надалі вектор і спрямований відрізок розрізняти не будемо в тому розумінні, що, *говорячи про вектор, щоразу будемо обирати його представника відкладеного від потрібної точки.* Два вектори називаються *колінеарними*, якщо відповідні спрямовані відрізки лежать на одній або на паралельних прямих. Три вектори називаються *компланарними*, якщо відповідні спрямовані відрізки лежать в одній або в паралельних площинах.

1.1.1 Векторний простір, базис векторного простору, координати вектора

Нехай $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ задані вектори. *Сумою* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\mathbf{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\mathbf{b}$ за умови, що вектор $\mathbf{b}$ відкладений від кінця вектора $\mathbf{a}$.

Доповнимо множину спрямованих відрізків "відрізком", початок і кінець якого збігаються. Довжина такого відрізка дорівнює 0, а напрямок – невизначений. Визначимо *нульовий вектор* як "вектор", що представлений у кожній точці нульовим спрямованим відрізком. Позначати нульовий вектор будемо $\mathbf{0}$. Вектор $\mathbf{b}$ називається *протилежним* до вектора $\mathbf{a}$, якщо $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Такий вектор будемо позначати $-\mathbf{a}$. Зрозуміло, що $|-\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|$.

Властивостями додавання векторів, що випливають з означення їхньої суми, є

$$\begin{array}{ll}
\text{комутативність} & \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}; \\
\text{асоціативність} & (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}); \\
\text{існує вектор } \mathbf{0} \text{ такий, що} & \mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \text{ для будь-якого вектора } \mathbf{a}; \\
\text{для будь-якого } \mathbf{a} \text{ існує } -\mathbf{a} \text{ такий, що} & \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}.
\end{array} \tag{1.1}$$

Нехай $\mathbf{a}$ – вектор, λ – дійсне число. *Добутком числа* λ на вектор $\mathbf{a}$ називається вектор $\mathbf{b}$, визначений наступними властивостями

$$\begin{cases}
|\mathbf{b}|=|\lambda||\mathbf{a}|; \\
\mathbf{b}\upuparrows\mathbf{a}, \quad \text{якщо } \lambda>0; \\
\mathbf{b}\uparrow\downarrow\mathbf{a}, \quad \text{якщо } \lambda<0; \\
\mathbf{0}, \quad \text{якщо } \lambda=0.
\end{cases}$$

Для добутку вектора на число вживається позначення $\lambda\,\mathbf{a}$. Якщо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то $\lambda\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$ для будь-якого λ.

Якщо $\mathbf{a}$ – вектор і $\lambda, \mu \in I\!R$, то

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a};\ (\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a};\ \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a};\ 1\mathbf{a} = \mathbf{a}. \tag{1.2}$$

Множина довільної природи, на якій визначені операції додавання і множення на число, що мають властивості (1.1) та (1.2), називається *дійсним*[1] *векторним простором*. Елементи векторного простору називаються *векторами*. Векторний простір будемо позначати літерою $\mathcal{V}$. Векторний простір є узагальненням векторного простору геометричних векторів.

Лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ називається вираз

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n \quad (\lambda_1, \ldots \lambda_n \in I\!R).$$

Лінійна комбінація векторів є вектором. Лінійна комбінація називається *тривіальною*, якщо всі коефіцієнти $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Тривіальна лінійна комбінація завжди дорівнює $\mathbf{0}$. Лінійна комбінація називається *нетривіальною*, якщо хоча б один з коефіцієнтів цієї комбінації *не дорівнює нулю.*

Сукупність векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ називається *лінійно незалежною*, якщо не існує нетривіальної лінійної комбінації цих векторів, що дорівнює $\mathbf{0}$. У іншому випадку ця система називається *лінійно залежною.* Сукупність векторів зазвичай називають *системою.*

1. *Якщо система векторів* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *містить* $\mathbf{0}$*, то вона лінійно залежна. Довести.*

Розв'язок. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Візьмемо будь-яке число $\lambda_1 \neq 0$. Лінійна комбінація

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

не є тривіальною, але дорівнює $\mathbf{0}$. Отже, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ – лінійно залежна система.

■

2. *Система векторів* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів системи можна подати у вигляді лінійної комбінації інших векторів цієї системи. Довести.*

Розв'язок. Нехай система $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ лінійно залежна. Це означає, що

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

причому хоча б один з коефіцієнтів не є нулем. Не порушуючи загальності, припустимо, що $\lambda_1 \neq 0$. Помножимо обидві частини останньої рівності на $1/\lambda_1$. Одержимо

$$\mathbf{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{a}_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

[1] Термін обумовлений числовою множиною в означенні добутку на число.

а отже, $\mathbf{a}_1 = \mu_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \mu_n\mathbf{a}_n$, де $\mu_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \mu_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$. Обернене твердження тривіальне.

■

Упорядкована система векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ називається *базисом векторного простору* $\mathcal{V}$, якщо:

- система $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ лінійно незалежна;
- для будь-якого $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ система векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ лінійно залежна.

Базис векторного простору може бути обраний у безліч способів, але кількість векторів базису не залежить від вибору базису (теорема Штейніца). Кількість векторів базису називається *вимірністю векторного простору* і позначається $\dim \mathcal{V}$. Векторний простір вимірності n позначається символом $\mathcal{V}^n$.

З другої властивості базису випливає, що будь-який $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ може бути поданий у вигляді лінійної комбінації векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, тобто

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n.$$

3. *Довести, що множина векторів, колінеарних фіксованій прямій, утворює векторний простір, вимірність якого* $\dim \mathcal{V} = 1$. *Базис у* $\mathcal{V}^1$ *складає будь-який ненульовий вектор з* $\mathcal{V}^1$.

Вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ називаються *компланарними*, якщо спрямовані відрізки, що їх представляють, розташовані в одній або паралельних площинах.

4. *Довести, що множина векторів, компланарних фіксованій площині, утворює векторний простір, вимірність якого* $\dim \mathcal{V} = 2$. *Базис у* $\mathcal{V}^2$ *складає будь-яка пара неколінеарних векторів.*

5. *Довести, що множина векторів у просторі утворює векторний простір, вимірність якого* $\dim \mathcal{V} = 3$. *Базис у* $\mathcal{V}^3$ *складають будь-які три некомпланарні вектори.*

Важливими наслідками попередніх тверджень є наступні критерії лінійної залежності.

6. *Два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно залежні.*

7. *Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно залежні.*

Нехай $\mathcal{V}^n$ векторний простір і $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ базис у ньому. Нехай $\mathbf{a} \in \mathcal{V}^n$ довільний вектор. Тоді[2]

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + \cdots + a^n\mathbf{e}_n, \tag{1.3}$$

де $a^i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Упорядкований набір чисел $\{a^1, \ldots, a^n\}$ називається *координатами вектора* $\mathbf{a}$ відносно базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, а вираз (1.3) називається *розкладанням вектора за даним базисом.*

[2] Не плутати верхній індекс з покажчиком степеня (!).

8. *Вектор розкладається за даним базисом в єдиний спосіб.*

Зафіксуємо базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ векторного простору $\mathcal{V}^n$. Нехай $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ два довільні вектори в $\mathcal{V}^n$. Відносно обраного базису $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ можуть бути взаємно однозначно представлені своїми координатами, тобто

$$\mathbf{a} \to \{a^1, \ldots, a^n\}, \quad \mathbf{b} \to \{b^1, \ldots, b^n\}.$$

9. *Довести, що* $\mathbf{a} + \mathbf{b} \to \{a^1 + b^1, \ldots, a^n + b^n\}$*;* $\quad \lambda\mathbf{a} \to \{\lambda a^1, \ldots, \lambda a^n\}$.

Замість $\mathbf{a} \to \{a^1, \ldots, a^n\}$ прийнято записувати[3] $\mathbf{a} = \{a^1, \ldots, a^n\}$.

10. *Два вектори* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні координати пропорційні.*

Розв'язок. Нехай $\mathbf{a} = \{a^1, \ldots, a^n\}, \quad \mathbf{b} = \{b^1, \ldots, b^n\}$ координатні вирази векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Припустимо, що вони колінеарні. За вправою **6** вони лінійно залежні, тобто $\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \mathbf{0}$ для деяких $\lambda, \mu \in I\!R$. Переходячи до координат, маємо

$$\mu\{a^1, \ldots, a^n\} + \lambda\{b^1, \ldots, b^n\} = \{0, \ldots, 0\}$$

або

$$\mu\{a^1, \ldots, a^n\} = -\lambda\{b^1, \ldots, b^n\}.$$

За вправою **8** координати вектора відносно даного базису визначені єдиним чином. Значить, $\mu a^1 = -\lambda b^1, \ldots, \mu a^n = -\lambda b^n$. Отже, $\frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2} = \cdots = \frac{a^n}{b^n} \quad \left(= \frac{-\lambda}{\mu}\right)$. ■

11. *Три вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *компланарні тоді і тільки тоді, коли координати одного з них є лінійними комбінаціями відповідних координат інших векторів. Довести.*

1.1.2 Афінна система координат

Зафіксуємо в просторі точку O і довільний базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathcal{V}^3$. Нехай M – довільна точка. Тоді вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіус-вектором* точки M і позначається $\mathbf{r}(M)$. Розкладемо $\mathbf{r}(M)$ щодо обраного базису, а саме

$$\mathbf{r}(M) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Набір чисел (x, y, z) однозначно визначає точку M і називається *афінними координатами* точки M. Побудована система координат називається *афінною* і позначається $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Запис $M(x, y, z)$ означає точку M з афінними координатами (x, y, z).

[3]Насправді координати векторів слід записувати у стовпчик, але для економії місця ми будемо записувати координати векторів у фігурних дужках.

12. *Нехай $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ дві довільні точки простору. Довести, що*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Розв'язок. Маємо, $\mathbf{r}(M_1) = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{r}(M_2) = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3$. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}(M_2) - \mathbf{r}(M_1) = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3 - (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) = (x_2 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_2 + (z_2 - z_1)\mathbf{e}_3$, що і було потрібно довести.

■

Будова афінної системи координат на площині чи прямій цілком аналогічна. Різниця лише в кількості векторів базису. Для спрощення позначень часто використовують угоду $\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}(M_1) = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}(M_2) = \mathbf{r}_2$, $\ldots$, а також $M(x, y, z) = M(\mathbf{r})$, $M_1(x_1, y_1, z_1) = M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) = M_2(\mathbf{r}_2)$, $\ldots$, що дає змогу формулювати задачі незалежно від вимірності (тобто чи то на прямій, чи то на площині, чи то в просторі).

Найпростіше застосування методу координат

Точка M поділяє відрізок $[M_1, M_2]$ у відношенні k, якщо виконується рівність $\overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{M_2M}$, де $k \in I\!R$. Говорять, що точка M поділяє відрізок $[M_1, M_2]$ *внутрішнім чином*, якщо $k \in [0, +\infty)$ і *зовнішнім*, якщо $k < 0$.

13. ***(Задача про поділ відрізка)*** *Показати, що*

- *якщо $-\infty < k < -1$, то точка M знаходиться за точкою M_2;*
- *якщо $-1 < k < 0$, то точка M знаходиться за точкою M_1;*
- *якщо $0 \leq k < +\infty$, то точка M знаходиться всередині відрізка $[M_1, M_2]$.*

Показати, що радіус-вектор точки M має вираз

$$\mathbf{r} = \frac{k\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1}{k + 1}$$

для будь-якого $k \neq -1$.

Якщо покласти $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, то у випадку відрізка в просторі координати точки M мають наступний вираз:

$$x = \frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Для відрізка на площині координати точки M обчислюються за аналогічними формулами (відсутня формула для координати z).

Центроїдом (баріцентром, центром ваги) системи точок $M_1, M_2 \ldots, M_n$ називається така точка O, що $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \ldots + \overrightarrow{OM_n} = \mathbf{0}$. При $n = 2$ центроїдом є середина відрізка, при $n = 3$ і за умови, що точки не лежать на одній прямій (трикутник *невироджений*), центроїдом є точка перетину медіан трикутника.

14. *Центроїд системи точок* $M_1(\mathbf{r}_1), \ldots, M_n(\mathbf{r}_n)$ *знаходиться в точці* $O(\mathbf{r}_0)$ *з радіус-вектором*

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n}{n}.$$

Доведіть.

Підказка. Застосуйте метод математичної індукції.

Середина відрізка є центром ваги системи двох точок з рівними масами. Якщо в точці M_1 зосереджена маса m_1, а в точці M_2 зосереджена маса m_2, то центр ваги знаходиться в точці, що поділяє відрізок $[M_1, M_2]$ у відношенні $m_2 : m_1$.

15. *Центр мас системи точок* $M_1(\mathbf{r}_1), \ldots, M_k(\mathbf{r}_k)$ *з масами* $m_1, \ldots, m_k$ *знаходиться в точці* $M(\mathbf{r})$ *з радіус-вектором*

$$\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \ldots + m_k\mathbf{r}_k}{m_1 + \ldots + m_k}.$$

Доведіть.

Підказка. Застосуйте метод математичної індукції.

1.2 Позиційні задачі на площині в афінних координатах

1.2.1 Рівняння прямої в афінній системі координат на площині

16. *Координати будь-якої точки на прямій, що проходить через дві різні точки* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *та* $M_2(\mathbf{r}_2)$, *мають вираз*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{1.4}$$

Розв'язок. Вектор $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ є базисом множини векторів, колінеарних до прямої. Якщо точка $M(\mathbf{r})$ належить прямій, то $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t\mathbf{a}$ і навпаки. Значить, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$.

$\blacksquare$

У випадку прямої на площині, нехай $\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1\}$ і $\mathbf{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$. Тоді для координат (x, y) точок прямої отримаємо:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = x_1(1 - t) + x_2 t, \\ y = y_1(1 - t) + y_2 t. \end{cases} \tag{1.5}$$

Формула (1.4) називається *векторним параметричним рівнянням прямої, що проходить через дві точки,* а формули (1.5) називаються *скалярними параметричними рівняннями прямої, що проходить через дві точки.* Вектор $\mathbf{a} =$

$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ задає певний напрямок на прямій і тому називається *напрямним вектором* прямої (1.4). Точка $\mathbf{r}_1$ відповідає значенню параметра $t = 0$ і тому називається *початковою точкою* прямої (1.4).

В якості початкової точки прямої можна обрати будь-яку точку на прямій, а в якості напрямного вектора прямої можна обрати будь-який вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Традиційно радіус-вектор початкової точки позначають через $\mathbf{r}_0$ (оскільки відповідає значенню параметра $t = 0$.)

17. *Довести, що координати будь-якої точки на прямій, що проходить через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ у напрямку вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, мають вираз*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}. \tag{1.6}$$

Рівняння (1.6) називається *векторним параметричним рівнянням прямої*. Нехай $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ і $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}$ – координатні вирази для $\mathbf{r}_0$ і $\mathbf{a}$. Розписавши покоординатно векторну рівність (1.6), отримаємо *скалярні параметричні рівняння прямої* на площині

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t. \end{cases} \tag{1.7}$$

Виключивши параметр t з рівнянь (1.7), отримаємо *канонічне рівняння прямої* на площині

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} \; (= t). \tag{1.8}$$

Рівняння (1.8) можна розкрити як пропорцію:

$$a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0). \tag{1.9}$$

Покладемо $A = a_y, B = -a_x$. Тоді рівняння прямої на площині запишеться у вигляді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

або

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.10}$$

де $C = -(Ax_0 + By_0)$.

18. *Довести, що рівняння $Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$ визначає єдину пряму з напрямним вектором $\mathbf{a} \parallel \{-B, A\}$.*

Рівняння (1.10) називається *загальним рівнянням прямої* в афінних координатах на площині. Коефіцієнти A і B в рівнянні (1.10) мають важливу геометричну властивість. Вектор $\mathbf{N} = \{A, B\}$ називається *вектором афінної нормалі. Верхньою (або додатною) півплощиною* відносно прямої (1.10) називається підмножина[4]

$$l_+ = \{(x, y) \,|\, Ax + By + C > 0\},$$

[4] В такий спосіб визначаються відкриті півплощини. Якщо нерівності покласти нестрогими, то відповідні півплощини називаються замкненими.

а *нижньою (або від'ємною) півплощиною* – підмножина

$$l_- = \{(x,y) \,|\, Ax + By + C = 0 < 0\}.$$

19. *Вектор афінної нормалі* $\mathbf{N} = \{A, B\}$ *спрямований у верхню півплощину відносно прямої* $Ax + By + C = 0$.

Розв'язок. Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на даній прямій. Відкладемо від точки M_0 вектор $\mathbf{N}$. Позначимо через $M_1(x_1, y_1)$ його кінцеву точку. Тоді

$$x_1 = x_0 + A, \quad y_1 = y_0 + B,$$

а значить,

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = \underbrace{Ax_0 + By_0 + C}_{=0} + A^2 + B^2 > 0,$$

що і завершує доведення.

■

Перехід від параметричного до загального рівняння прямої на площині фактично здійснюється за формулою (1.9), що може бути подана в більш прозорий спосіб. *Матрицею* розміром 2×2 називається таблиця, що складається з двох рядків і двох стовпчиків, наприклад $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, а її *визначником* називається вираз $ad - cb$ і позначається як $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Якщо сформувати матрицю, в першому рядку якої розміщено координати вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, а в другому – координати вектора $\mathbf{a}$, то вираз (1.9) можна переписати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = 0, \tag{1.11}$$

що дає швидкий спосіб перходу від параметричного до загального рівняння прямої на площині.

1.2.2 Позиційна задача «точка – пряма»

Пряма $l : Ax + By + C = 0$ поділяє множину точок на площині на три підмножини:

- власне точки прямої $l = \{(x,y) \,|\, Ax + By + C = 0\}$;
- точки верхньої півплощини $l_+ = \{(x,y) \,|\, Ax + By + C > 0\}$;

- точки нижньої півплощини $l_- = \{(x, y) \,|\, Ax + By + C < 0\}$.

20. *Покажіть, що точка $M(\mathbf{r}_1)$ знаходиться у верхній (нижній) півплощині відносно прямої $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix} > 0 (< 0),$$

відповідно.

1.2.3 Позиційна задача «пряма – пряма»

З елементарної геометрії відомо, що дві прямі на площині можуть перетинатися в єдиній точці, бути паралельними або збігатися.

21. *Нехай дві прямі на площині задано загальними рівняннями, а саме*

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Довести, що

- $l_1 = l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; • $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
- $l_1 \cap l_2 = \{\cdot\} \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

Розв'язок. Спільні точки двох даних прямих є розв'язками системи

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Єдиність розв'язку відповідає ситуації перетину прямих; відсутність розв'язків означає паралельність прямих; наявність двох різних розв'язків означає збіжність прямих (через дві різні точки проходить лише одна пряма).

Для розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} \tag{1.12}$$

помножимо перше рівняння на B_2, а друге на B_1 і віднімемо одне від іншого. Одержимо

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x = -C_1B_2 + C_2B_1.$$

Потім помножимо перше рівняння на A_2, а друге на A_1 і з другого віднімемо перше. Одержимо

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y = -A_1C_2 + A_2C_1.$$

Якщо $A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \quad -C_1B_2 + C_2B_1 = 0, \quad -A_1C_2 + A_2C_1 = 0$, то

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

а значить, рівняння системи (1.12) пропорційні. Прямі мають одне й те ж рівняння, тобто збігаються.

Якщо $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, але $-C_1B_2 + C_2B_1 \neq 0$ або $-A_1C_2 + A_2C_1 \neq 0$, то

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

і система (1.12) роз'язків не має. Прямі паралельні.

Якщо $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок

$$x = \frac{-C_1B_2 + C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{-A_1C_2 + A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1},$$

а значить, прямі перетинаються в єдиній точці.

■

Розв'язок системи (1.12) можна подати через визначники у вигляді

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.13}$$

Вираз (1.13) для розв'язку системи рівнянь (1.12) називається *правилом Крамера* для системи з двох лінійних рівнянь. Правило Крамера можна застосовувати за умови $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

22. *Нехай прямі задано векторними параметричними рівняннями, а саме*

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \quad l_2 : \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\theta.$$

Довести, що

- $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \ \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \nparallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$; • $l_1 = l_2 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$;
- $l_1 \cap l_2 = \{\cdot\} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

Підказка. Прямі можуть мати спільну точку, якщо при певних значеннях параметрів t і θ може бути виконана рівність $\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\theta$.

23. *Нехай пряма* $l_1 : \dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y}$ *задана канонічним рівнянням, а пряма* $l_2 : Ax + By + C = 0$ *своїм загальним рівнянням. Довести, що*

- $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \ Aa_x + Ba_y = 0, Ax_0 + By_0 + C \neq 0$;
- $l_1 = l_2 \ \Leftrightarrow \ Aa_x + Ba_y = 0, Ax_0 + By_0 + C = 0$;
- $l_1 \cap l_2 = \{\cdot\} \ \Leftrightarrow \ Aa_x + Ba_y \neq 0$.

Підказка. Перейти від канонічного до параметричного рівняння $x = x_0 + a_x t, y = y_0 + a_y t$ прямої l_1 і підставити координати точки на прямій l_1 в рівняння прямої l_2. Проаналізувати можливі випадки розв'язку отриманого рівняння відносно параметра t.

1.3 Позиційні задачі в просторі в афінних координатах

1.3.1 Рівняння прямої і площини в афінних координатах у просторі

Векторне параметричне рівняння прямої в просторі не відрізняється від векторного параметричного рівняння прямої на площині.

24. *Координати будь-якої точки на прямій в простpі, що проходить через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ у напрямку вектора $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, мають вираз*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}. \tag{1.14}$$

Рівняння (1.14) називається *векторним параметричним рівнянням прямої в просторі.* Нехай $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ і $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Розписавши покоординатно векторну рівність (1.14), отримаємо *скалярні параметричні рівняння прямої*

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t. \end{cases} \tag{1.15}$$

Виключивши параметр t з рівняннь (1.15), отримаємо *канонічне рівняння прямої* в просторі

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} \ (= t). \tag{1.16}$$

Якщо від точки $M_0(\mathbf{r}_0)$, що лежить у просторі, відкласти два неколінеарні вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, то пара прямих $l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a}$ і $l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + v\mathbf{b}$ визначить єдину площину, що проходить через точку M_0 і прямі l_1 та l_2. Точка $M(\mathbf{r})$ належить площини тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ компланарний до площини. Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ утворюють базис множини компланарних до площини векторів. Тому має місце розкладання

$$\overrightarrow{M_0M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \quad \text{або} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Рівняння

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \tag{1.17}$$

називається *векторним параметричним рівнянням площини* у просторі. Точка M_0 називається *початковою точкою* площини, а вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ називаються *напрямними векторами* площини.

Якщо напрямні вектори і початкова точка задані координатами

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \quad M_0(x_0, y_0, z_0),$$

то векторне параметричне рівняння може бути переписане у формі *скалярних параметричних рівнянь*

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x, \\ y = y_0 + ua_y + vb_y, \\ z = z_0 + ua_z + vb_z. \end{cases} \tag{1.18}$$

25. *Показати, що в результаті виключення параметрів з рівняння* (1.18) *рівняння площини запишеться у вигляді*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \textit{або} \quad Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1.19}$$

де

$$A = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$
$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Розв'язок. Оскільки $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, координати векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не пропорційні. Не зменшуючи загальності, припустимо, що

$$\frac{a_x}{b_x} \neq \frac{a_y}{b_y}.$$

Це означає, що визначник

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

В такому разі перші два рівняння з (1.18) можна розв'язати за правилом Крамера (1.13) у вигляді

$$u = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & b_x \\ y - y_0 & b_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}, \quad v = \frac{\begin{vmatrix} a_x & x - x_0 \\ a_y & y - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}.$$

Після підстановки в третє рівняння отримаємо

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}(z - z_0) = a_z \begin{vmatrix} x - x_0 & b_x \\ y - y_0 & b_y \end{vmatrix} + b_z \begin{vmatrix} a_x & x - x_0 \\ a_y & y - y_0 \end{vmatrix} =$$

$$(x-x_0)(a_zb_y-b_za_y)+(y-y_0)(-a_zb_x+b_za_x) = -(x-x_0)\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+(y-y_0)\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}.$$

Або остаточно

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0. \tag{1.20}$$

■

26. *Довести, що рівняння*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1.21}$$

за умови $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ визначає єдину площину.

Рівняння (1.21) називається *загальним рівнянням площини* в просторі. Вектор $\mathbf{N} = \{A, B, C\}$ називається вектором афінної нормалі даної площини. Його геометрична властивість аналогічна геометричній властивості афінної нормалі прямої на площині.

Верхнім (або додатним) півпростром відносно площини (1.21) називається підмножина[5]

$$\Pi_+ = \{(x, y, z) \,|\, Ax + By + Cz + D > 0\},$$

а *нижнім (або від'ємним) півпростором* – підмножина

$$\Pi_- = \{(x, y, z) \,|\, Ax + By + Cz + D = 0 < 0\}.$$

Рівняння (1.20) визначає спосіб переходу від параметричного до загального рівняння площини і може бути записане у спосіб, аналогічний способу (1.11) запису рівняння прямої на площині. Матрицею розміру 3×3 називається таблиця, що складається з трьох рядків і трьох стовпчиків, наприклад,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці 3×3 обчислюється за наступним правилом

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

У виразі через визначник рівняння площини (1.20) скорочується до виразу

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0, \tag{1.22}$$

що дає швидкий спосіб переходу від параметричного до загального рівняння площини.

27. *Нехай $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ площина в просторі. Покажіть, що*

- *вектор $\mathbf{N} = \{A, B, C\}$ спрямований у верхній півпростір відносно площини Π;*

[5] Подібно до прямої на площині, в такий спосіб визначаються відкриті півпостори. Якщо нерівності покласти нестрогими, то відповідні півпростори називаються замкненими.

- *точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *і* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *належать різним півпросторам (площина поділяє відрізок* $[M_1, M_2]$ *внутрішнім чином) тоді і тільки тоді, коли* $F(x_1, y_1, z_1)$ *і* $F(x_2, y_2, z_2)$ *мають різні знаки;*

- *точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *і* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *належать одному півпростору (площина поділяє відрізок* $[M_1, M_2]$ *зовнішнім чином) тоді і тільки тоді, коли* $F(x_1, y_1, z_1)$ *і* $F(x_2, y_2, z_2)$ *мають однаковий знак.*

1.3.2 Позиційна задача «точка – площина»

З елементарної геометрії відомо, що точка може належати площині або не належати їй.

28. *Площина* $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ *поділяє множину точок простору на три підмножини:*

- *власне точки площини* $\Pi : \{(x, y, z) \,|\, Ax + By + Cz + D = 0\}$*;*

- *точки верхнього півпростору* $\Pi_+ : \{(x, y, z) \,|\, Ax + By + Cz + D > 0\}$*;*

- *точки нижнього півпростору* $\Pi_- : \{(x, y, z) \,|\, Ax + By + Cz + D < 0\}$*.*

29. *Нехай площина задана векторним параметричним рівнянням* $\Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$*. Точка* $M(\mathbf{r}_1) \in \Pi$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ *компланарний до* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$*.*

30. *Покажіть, що точка* $M(\mathbf{r}_1)$ *лежить у верхньому (нижньому) півпросторах відносно площини* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} > 0 (< 0),$$

відповідно.

1.3.3 Позиційна задача «точка – пряма»

З елементарної геометрії відомо, що точка може належати прямій або не належати їй.

31. *Для заданої точки* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *і прямої* $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$

- $M_1 \in l$ *тоді і тільки тоді, коли* $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \parallel \mathbf{a}$*;*

- $M_1 \notin l$ *тоді і тільки тоді, коли* $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \nparallel \mathbf{a}$*.*

В координатному виразі умова належності точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої

$$l: \quad \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

запишеться як

$$\frac{x_1 - x_0}{a_x} = \frac{y_1 - y_0}{a_y} = \frac{z_1 - z_0}{a_z}.$$

1.3.4 Позиційна задача «пряма – площина»

З елементарної геометрії відомо, що пряма і площина в просторі можуть мати три можливі взаємні розташування: пряма перетинає площину, пряма паралельна до площини і пряма лежить у площині.

32. *Нехай пряма задана скалярними параметричними рівняннями*

$$l: \quad x = x_0 + a_x t, \quad y = y_0 + a_y t, \quad z = z_0 + a_z t,$$

а площина – загальним рівнянням

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Довести, що

- $l \cap \Pi = \{\cdot\}$ *тоді і тільки тоді, коли* $Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$;
- $l \parallel \Pi$ *тоді і тільки тоді, коли* $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;
- $l \subset \Pi$ *тоді і тільки тоді, коли* $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Підказка. Підставити координати точки на прямій в рівняння площини. Отримане рівняння відносно параметра t проаналізувати на кількість розв'язків.

33. *Нехай пряма і площина задані векторними параметричними рівняннями*

$$l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \qquad \Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c} \quad (\mathbf{b} \nparallel \mathbf{c}).$$

Довести, що

- $l \cap \Pi = \{\cdot\} \Leftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *не компланарні;*
- $l \parallel \Pi \Leftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *компланарні, але* $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ *не компланарний до* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$;
- $l \subset \Pi \Leftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ *компланарні.*

Розв'язок. Пряма і площина можуть мати спільні точки за умови існування таких значень параметрів (t, u, v), що

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c},$$

тобто

$$(*) \qquad \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 = -\mathbf{a}t + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}.$$

Якщо вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарні, то вони утворюють базис простору, а значить, розкладання $(*)$ єдине з певними значеннями параметрів (t_0, u_0, v_0). Тому пряма і площина мають єдину спільну точку з радіус-вектором $\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t_0$ (або, що те ж саме, $\mathbf{r}_1 + u_0\mathbf{b} + v_0\mathbf{c}$).

Якщо $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарні, то вектор $\mathbf{a}$ розкладається за базисом $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ і рівність $(*)$ зводиться $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, що є суперечливою, якщо $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ не компланарний до $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. В цьому випадку пряма і площина спільних точок не мають.

Якщо $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ компланарні, то за базисом $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ розкладаються як вектор $\mathbf{a}$, так і вектор $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$. Запишемо ці розкладання.

$$\mathbf{a} = p\mathbf{b} + q\mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}.$$

Значить, радіус-вектор точок прямої можна подати у вигляді

$$\mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c} + t(p\mathbf{b} + q\mathbf{c}) = \mathbf{r}_1 + (\lambda + tp)\mathbf{b} + (\mu + tq)\mathbf{c}.$$

Це означає, що координати всіх точок прямої задовольняють рівнянню площини. Пряма лежить у площині.

■

1.3.5 Позиційна задача «площина – площина»

З елементарної геометрії відомо, що дві площини в просторі або перетинаються по прямій, або паралельні, або збігаються.

34. *Нехай обидві площини задані векторними параметричними рівняннями*

$$\Pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \qquad \Pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{c} + h\mathbf{d}.$$

Довести, що в такому разі

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{d} = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \neq l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$
- $\Pi_1 = \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{d} = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$
- $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} \neq l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *або* $\mathbf{d} \neq l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$

де $l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *означає лінійну комбінацію векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$.

Розв'язок. *Лінійною оболонкою* векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається сукупність усіх можливих лінійних комбінацій векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Якщо позначити лінійну оболонку векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ як $Lin(\mathbf{a},\mathbf{b})$, то рівняння площин можна записати у вигляді

$$\Pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad \Pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{c},\mathbf{d}).$$

Площини Π_1 і Π_2 можуть мати спільні точки тоді і тільки тоді, коли існують такі лінійні комбінації $l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$ з певними значеннями параметрів (u,v) і $l.c.(\mathbf{c},\mathbf{d})$ з певними значеннями параметрів (t,h), що

$$\mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{r}_2 + l.c.(\mathbf{c},\mathbf{d}),$$

тобто коли виконується векторна рівність

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}) + l.c.(\mathbf{c},\mathbf{d}). \tag{1.23}$$

(а) Припустимо, що $\mathbf{c} = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}), \mathbf{d} = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Тоді рівність (1.23) можна продовжити у вигляді

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}) + l.c.(\mathbf{c},\mathbf{d}) = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Якщо $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \neq l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$, то остання рівність є суперечливою. А значить, площини не мають спільних точок, тобто $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.

Якщо ж $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$, то $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Умови $\mathbf{c} = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}), \mathbf{d} = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$ означають, що $\mathbf{c} \in Lin(\mathbf{a},\mathbf{b})$ і $\mathbf{d} \in Lin(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Тоді рівняння площини Π_2 можна переписати у вигляді

$$\Pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}) + Lin(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

що збігається з рівнянням площини Π_1, тобто $\Pi_1 = \Pi_2$.

(б) Припустимо, що $\mathbf{c} \neq l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Тоді $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ утворюють базис простору, а значить,

$$\mathbf{d} = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}). \tag{1.24}$$

Із першого розкладання (1.24) випливає, що

$$\mathbf{d} + l.c.(\mathbf{c}) = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

В лівій частині останньої рівності знаходиться вектор з $Lin(\mathbf{c},\mathbf{d})$, а в правій – вектор з $Lin(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Отже, вектор

$$\mathbf{p} = \mathbf{d} + l.c.(\mathbf{c}) = l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

належить і $Lin(\mathbf{c},\mathbf{d})$, і $Lin(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Із другого розкладання (1.24) випливає, що

$$\mathbf{r}_2 + l.c.(\mathbf{c}) = \mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Точка

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_2 + l.c.(\mathbf{c}) = \mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

належить обом площинам, а тому пряма

$$l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \theta \mathbf{p}$$

також належить і Π_1, оскільки $\mathbf{p} \in Lin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, і Π_2, оскільки $\mathbf{p} \in Lin(\mathbf{c}, \mathbf{d})$. Отже, $l = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Обернені твердження тривіальні.

$\blacksquare$

35. *Нехай одна з площин задана скалярними параметричними рівняннями*

$$\Pi_1 : \begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x, \\ y = y_0 + ua_y + vb_y, \\ z = x_0 + ua_z + vb_z, \end{cases}$$

а інша – загальним рівнянням

$$\Pi_2 : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Довести, що в такому разі

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0, \\ Ab_x + Bb_y + Cb_z = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{cases}$

- $\Pi_1 = \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0, \\ Ab_x + Bb_y + Cb_z = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \end{cases}$

- $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l \quad \Leftrightarrow Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$ *або* $Ab_x + Bb_y + Cb_z \neq 0$.

Підказка. Підставити координати точок площини Π_1 в рівняння площини Π_2 і проаналізувати кількість розв'язків отриманого рівняння відносно параметрів (u, v).

36. *Нехай обидві площини задані загальними рівняннями*

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Довести, що в такому разі

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$

- $\Pi_1 = \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$

- $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N}_1 = \{A_1, B_1, B_2\} \nparallel \mathbf{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

Підказка. Розглянути задачу знаходження спільних точок площин Π_1 і Π_2 та проаналізувати кількість розв'язків.

Із вправи **36** випливає, що пряма в просторі може бути задана як перетин двох площин

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

за умови, що $\mathbf{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \nparallel \mathbf{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Рівняння (1.25) називається *загальним* або *неявним* рівнянням прямої в просторі.

37. *Показати, що в якості напрямного вектора прямої* (1.25) *можна взяти вектор*

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

1.3.6 Позиційна задача «пряма – пряма»

З елементарної геометрії відомо, що дві прямі в просторі можуть мати чотири можливі способи взаємного розташування: прямі паралельні, збігаються, мимобіжні або перетинаються. Прямі в просторі називаються *паралельними*, якщо вони розташовані в одній площині і не мають спільних точок. Прямі в просторі називаються *мимобіжними*, якщо вони не мають спільних точок і не паралельні.

38. *Нехай прямі задано векторними параметричними рівняннями*

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, \qquad l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \theta\mathbf{b}.$$

Довести, що в такому разі

- $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \parallel \mathbf{a},\ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \nparallel \mathbf{a}$;
- $l_1 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \parallel \mathbf{a},\ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \parallel \mathbf{a}$;
- l_1 *і* l_2 *мимобіжні* $\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \nparallel \mathbf{a}, (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \neq l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
- $l_1 \cap l_2 = \{\cdot\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \nparallel \mathbf{a}, (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

де $l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *означає лінійну комбінацію векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$.

Розв'язок. Прямі l_1 і l_2 можуть мати спільну точку за умови існування таких значень параметрів t і θ, що

$$\mathbf{r}_2 + \theta\mathbf{b} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a},$$

тобто за умови

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{1.26}$$

- Припустимо, що $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (тобто $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ лінійно залежні). Тоді $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, і умова (1.26) запишеться у вигляді

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = l.c.(\mathbf{a}). \tag{1.27}$$

Якщо $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \parallel \mathbf{a}$, то умова (1.27) є рівнянням, з якого $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a})$. Тож рівняння прямих набуде вигляду

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, \qquad l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a}) + \lambda\theta\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 + l.c.(\mathbf{a}),$$

і значить, $l_1 = l_2$.

Якщо $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \nparallel \mathbf{a}$, то умова (1.27) є суперечливою, а значить, $l_1 \cap l_2 = \varnothing$. Покажемо, що прямі в такому випадку лежать в одній площині. Дійсно, площина

$$\Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v\mathbf{a}$$

містить пряму $u = 0$, що збігається з прямою l_1, і пряму $u = 1$, що збігається з прямою l_2.

- Припустимо, що $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Якщо $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \neq l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, то умова (1.26) є суперечливою, і значить, $l_1 \cap l_2 = \varnothing$. Покажемо, що прямі в такому випадку лежать в паралельних площинах. Дійсно, площина

$$\Pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

містить пряму $v = 0$, що збігається з прямою l_1, а площина

$$\Pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{a} + \theta\mathbf{b}$$

містить пряму $u = 0$, що збігається з прямою l_2. При цьому $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ і $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Отже, прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Якщо ж $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = l.c.(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, то умова (1.26) стає рівнянням, з якого можна знайти

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

Площина

$$\Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

містить пряму $v = 0$, що збігається з прямою l_2. З іншого боку, ця ж площина задається рівнянням

$$\Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} = \mathbf{r}_1 + (\lambda + u)\mathbf{a} + (\mu + v)\mathbf{b}$$

і містить пряму $v = -\mu$, що збігається з прямою l_1. Отже, $l_1 \subset \Pi$, $l_2 \subset \Pi$ і $l_1 \nparallel l_2$, а значить, $l_1 \cap l_2 = \{\cdot\}$.

$\blacksquare$

Розділ 2

Метрична аналітична геометрія

Векторний простір з визначеним на ньому скалярним добутком називається *евклідовим*. На векторному просторі геометричних векторів скалярний добуток двох векторів визначається як добуток їх довжин на косинус кута між ними. За допомогою скалярного добутку розв'язання позиційних задач суттєво спрощується, визначаються операції векторного та мішаного добутків, подвійного векторного добутку та ін. Скалярний добуток лежить в основі способу виміру відстані між точками, відстані від точки до прямої і площини, кутів між прямими, площинами та їх комбінаціями, об'ємів фігур. Тож наявність скалярного добутку визначає так звану *метричну структуру*.

2.1 Скалярний добуток геометричних векторів

Нехай дано два ненульові вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Відкладемо їх від однієї точки O і представимо їх спрямованими відрізками

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}, \qquad \mathbf{b} = \overrightarrow{ON}.$$

Два промені $ray(\overrightarrow{OM})$ і $ray(\overrightarrow{ON})$ визначають два кути, менший з яких називається *кутом між векторами* $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Позначимо цей кут як $\mathbf{a}\widehat{\ }\mathbf{b}$.

Скалярним добутком векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток будемо позначати кутовими дужками $\langle\cdot,\cdot\rangle$. За означенням,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}\widehat{\ }\mathbf{b}).$$

Віссю називається пряма з обраним на ній напрямком. Напрямок прямої визначається будь-яким вектором, що колінеарний до неї. Одиничний вектор (тобто вектор одиничної довжини)

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \ \upuparrows \mathbf{a}$$

називається *ортом* вектора $\mathbf{a}$. Нехай $\mathbf{l}$ – вісь, що визначається ортом $\mathbf{e}_a$. Ортогональною проєкцією точки A на вісь $\mathbf{l}$ називається основа перпендикуляра, опущеного з точки A на пряму l. Позначимо її як A_1. *Алгебраїчною ортогональною проєкцією* спрямованого відрізка $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\mathbf{l}$ називається число

$$\Pi_{\mathbf{l}}(\overrightarrow{AB}) = \begin{cases} |\overrightarrow{A_1B_1}| & \text{якщо } \overrightarrow{A_1B_1} \upuparrows \mathbf{e}_a; \\ -|\overrightarrow{A_1B_1}| & \text{якщо } \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \mathbf{e}_a; \\ 0 & \text{якщо } \overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Із означення випливає, що $\Pi_{\mathbf{l}}(\overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{AB} \widehat{\ } \mathbf{e}_a)$. *Алгебраїчною ортогональною проєкцією вектора* $\mathbf{b}$ *на вісь* $\mathbf{l}$ *називається алгебраїчна проєкція будь-якого спрямованого відрізка, що його представляє.* Із такого означення випливає, що

$$\Pi_{\mathbf{l}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{b} \widehat{\ } \mathbf{e}_a) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_a \rangle.$$

Ортогональною векторною проєкцією вектора $\mathbf{b}$ *на вісь* $\mathbf{l}$ називається вектор

$$\overrightarrow{\text{Пр}_{\mathbf{l}}\,\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_a \rangle\, \mathbf{e}_a.$$

39. *Скалярне множення має наступні властивості:*

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, *причому* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$ *(додатна визначеність);*
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ *(симетричність);*
- $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ *(однорідність);*
- $\langle \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$ *(дистрибутивність).*

Розв'язок. Перші три властивості майже очевидні. Перевіримо *дистрибутивність*. Нехай $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ довільні вектори на площині або в просторі. Позначимо через $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ спрямовані відрізки, що представляють вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Тоді спрямований відрізок $\overrightarrow{AC}$ представляє вектор $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Переходячи до проєкцій, маємо

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}, \quad \text{тобто} \quad \overrightarrow{\text{Пр}_{\mathbf{l}}\,\mathbf{b}} + \overrightarrow{\text{Пр}_{\mathbf{l}}\,\mathbf{c}} = \overrightarrow{\text{Пр}_{\mathbf{l}}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c})}.$$

Таким чином,

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_a \rangle \mathbf{e}_a + \langle \mathbf{c}, \mathbf{e}_a \rangle \mathbf{e}_a = \langle \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{e}_a \rangle\, \mathbf{e}_a,$$

або

$$\Big(\langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_a \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{e}_a \rangle\Big)\mathbf{e}_a = \langle \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{e}_a \rangle\, \mathbf{e}_a.$$

Звідси випливає рівність

$$\Big\langle \mathbf{b}, \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \Big\rangle + \Big\langle \mathbf{c}, \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \Big\rangle = \Big\langle \mathbf{b} + \mathbf{c}, \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \Big\rangle.$$

За однорідністю, множник $\frac{1}{|\mathbf{a}|}$ з кожного скалярного добутку можна винести і скоротити на нього. В результаті приходимо до рівності

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle,$$

що й треба було довести.

■

Однорідність і дистрибутивність скалярного добутку об'єднуються терміном *лінійність*. Із симетричності скалярного добутку випливає лінійність його за обома аргументами. Така властивість об'єднується терміном *білінійність*.

Властивості скалярного множення можна аксіоматизувати і ввести поняття скалярного множення в *довільному дійсному векторному* просторі як операцію, що має наступні властивості:

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, причому $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$;
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$;
- $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$;
- $\langle \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$.

Два вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називаються *ортогональними*, якщо їх скалярний добуток $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Кут між ненульовими ортогональними векторами дорівнює $\pi/2$. Нульовий вектор ортогональний до будь-якого.

Базис евклідова простору називається *ортонормованим*, якщо він складається з одиничних взаємно ортогональних векторів. Якщо система координат побудована на ортонормованому базисі, то така система координат називається *декартовою прямокутною системою координат*. Координати точок (x, y, z) відносно такої системи координат в E^3 називаються *декартовими прямокутними координатами*. Часто *орти декартової прямокутної системи координат* позначають через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Розкладання векторів за базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ записують як

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Якщо система координат декартова прямокутна, то

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_x b_x, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

для векторів на площині і

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y)^2 + a_z^2}$$

для векторів у просторі.

2.2 Орієнтація

Базис векторів на прямій складається з будь-якого вектора $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Говорять, що два базиси $\mathbf{e}$ і $\mathbf{f}$ на прямій *орієнтовані однаково*, якщо $\mathbf{f} = \lambda\mathbf{e}$ $(\lambda > 0)$, і *протилежно*, якщо $\mathbf{f} = \lambda\mathbf{e}$ $(\lambda < 0)$. Відношення однакової орієнтованості є відношенням еквівалентності. Тож на прямій існує рівно 2 класи однаково орієнтованих базисів. Одному з них приписується додатна орієнтація (+), а іншому – від'ємна (−).

Нехай $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ базис векторів на площині. Припустимо, що $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ інший базис векторів тієї ж площини. Розкладемо вектори $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ за базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = c_1^1\mathbf{e}_1 + c_1^2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_2 = c_2^1\mathbf{e}_1 + c_2^2\mathbf{e}_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Матриця

$$C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

називається матрицею переходу від базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) до базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

40. *Вектори* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ *лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли* $\det C \neq 0$.

Нехай $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ базис векторів у просторі. Припустимо, що $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ – інший базис векторів простору. Розкладемо вектори $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ за базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = c_1^1\mathbf{e}_1 + c_1^2\mathbf{e}_2 + c_1^3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{f}_2 = c_2^1\mathbf{e}_1 + c_2^2\mathbf{e}_2 + c_2^3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{f}_3 = c_3^1\mathbf{e}_1 + c_3^2\mathbf{e}_2 + c_3^3\mathbf{e}_3. \end{cases} \tag{2.2}$$

Матриця

$$C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix}$$

називається матрицею переходу від базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ до базису $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.

41. *Вектори* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ *лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли* $\det C \neq 0$.

Матриця A називається прямокутною, якщо вона складається з n рядків і k стовпчиків. Якщо $n = k$, то матриця називається квадратною. Якщо $n = 1$, то матриця називається рядком. Якщо $k = 1$, то матриця називається стовпчиком. Якщо розмір матриці A важливий, то використовують позначення $A_{n\times k}$. Елементи рядка індексуються верхнім індексом, а елементи стовпчика індексуються нижнім індексом. Наприклад,

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{pmatrix}, \quad B_{3\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Добутком рядка $A_{1\times k}$ на стовпчик $B_{k\times 1}$ називається число $c = \sum_{s=1}^{k} a^s b_s$. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3.$$

Добутком матриць $A_{n\times k}$ і $B_{k\times m}$ називається матриця $C_{n\times m}$, що складається з попарних добутків рядків матриці A на стовпчики матриці B. А саме,

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_i^s b_s^j.$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Задачі **42** – **45** мають довідковий характер.

42. *Операція обчислення добутку квадратних матриць узгоджена з операцією обчислення визначників* $|AB| = |A|\,|B|$.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-2)(-2) = 4.$$

Символом Кронекера називається символ

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Матриця E з елементами δ_j^i називається *одиничною*. Наприклад,

$$E_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

43. $AE = EA = A$ *для будь-якої квадратної матриці* A *і відповідної за розміром матриці* E.

Матриця B називається *оберненою* для квадратної матриці A, якщо $AB = BA = E$. Матриця, обернена до матриці A, позначається A^{-1}. Таким чином,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо її визначник $|A| \neq 0$.

44. *Квадратна матриця A має єдину обернену тоді і тільки тоді, коли вона невироджена. Визначник оберненої матриці обернений до визначника матриці, тобто $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.*

45. *Операція обчислення добутку матриць асоціативна $A(BC) = (AB)C$, однорідна $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$, дистрибутивна $(A + C)B = AB + CB$, але в загальному випадку не комутативна $AB \neq BA$.*

З використанням матричного добутку перетворення базисів (2.1) та (2.2) можна подати в єдиний спосіб

$$(\mathbf{f}) = (\mathbf{e})C \quad (\det C \neq 0), \tag{2.3}$$

де $(\mathbf{e})$ і $(\mathbf{f})$ рядки, складені з відповідних базисних векторів, а C – матриця переходу. Матричний спосіб запису перетворення базисів *не залежить від кількості елементів базису*, тобто від вимірності векторного простору.

Два базиси $(\mathbf{e})$ і $(\mathbf{f})$ називаються *орієнтованими однаково*, якщо у перетворенні (2.3) $\det C > 0$, і *протилежно*, якщо $\det C < 0$.

46. *Відношення однакової орієнтованості базисів є відношенням еквівалентності.*

Підказка. $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e})E$, $\quad (\mathbf{f}) = (\mathbf{e})C \Rightarrow (\mathbf{e}) = (\mathbf{f})C^{-1}$, $\quad (\mathbf{f}) = (\mathbf{e})C, (\mathbf{g}) = (\mathbf{f})D \Rightarrow (\mathbf{g}) = (\mathbf{e})(CD)$.

Тож на площині і в просторі (а також в довільному векторному просторі) існує рівно 2 класи однаково орієнтованих базисів. Одному з них приписується додатна орієнтація $(+)$, а іншому – від'ємна $(-)$.

47. *Парна перестановка векторів базису не змінює орієнтацію, непарна – змінює на протилежну.*

Наприклад, базиси $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ і $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ орієнтовані протилежно.

2.3 Векторний, подвійний векторний і мішаний добутки

2.3.1 Векторний і подвійний векторні добутки

Припишемо трійці ортів декартової прямокутної системи координат $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, взятих саме в такому порядку, орієнтацію $(+)$.

Нехай $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – два вектори в E^3. Вектор $\mathbf{c}$ називається *векторним добутком* векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, якщо

- $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
- $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a} \,\hat{}\, \mathbf{b})$;

- упорядкована трійка векторів **a**, **b**, **c** додатно орієнтована.

Для векторного добутку використовується позначення $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ або $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

48. *Якщо вектори* $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ *і* $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ *задано координатами відносно (довільного) ортонормованого базису, то*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}. \tag{2.4}$$

Розв'язок. Нехай $\mathbf{c} = \{x, y, z\}$ – координати шуканого вектора. Тоді за умови ортонормованості базису з першої властивості векторного добутку випливає, що

$$\begin{cases} xa_x + ya_y + za_z = 0 \\ xb_x + yb_y + zb_z = 0 \end{cases}.$$

Позначимо

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Припустимо, що $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Тоді хоча б один з виписаних визначників не дорівнює нулю. Нехай, наприклад, $\Delta_z \neq 0$.

Систему рівнянь

$$\begin{cases} xa_x + ya_y = -za_z \\ xb_x + yb_y = -zb_z \end{cases}$$

розв'яжемо за правилом Крамера (1.13)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -za_z & a_y \\ -zb_z & b_y \end{vmatrix}}{\Delta_z} = z\frac{\Delta_x}{\Delta_z}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_x & -za_z \\ b_x & -zb_z \end{vmatrix}}{\Delta_z} = z\frac{-\Delta_x}{\Delta_z}.$$

Покладемо $z = \lambda\Delta_z$. Тоді ми можемо записати

$$x = \lambda\Delta_x,\ y = -\lambda\Delta_y,\ z = \lambda\Delta_z.$$

Інакше кажучи, умовам $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ задовольняє вектор

$$\mathbf{c} = \lambda\{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$$

з довільним параметром λ. При цьому $|\mathbf{c}|^2 = \lambda^2(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)$.

З другої властивості вектора **c** маємо

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2(\mathbf{a}\,\widehat{}\,\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2(\mathbf{a}\,\widehat{}\,\mathbf{b})) = \\ |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2(\mathbf{a}\,\widehat{}\,\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - \langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2 = \\ (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2 = \\ (a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_xb_z - a_zb_x)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2. \end{aligned}$$

Отже, $\lambda = \pm 1$.

Орієнтації трійок векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ і $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ однакові. Орієнтація трійки $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ визначається визначником

$$\begin{vmatrix} \lambda\Delta_x & -\lambda\Delta_y & \lambda\Delta_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \lambda(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)$$

і буде додатною лише за умови $\lambda = +1$.

Якщо $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то $\sin(\mathbf{a} \widehat{\ } \mathbf{b}) = 0$ і з означення випливає, що $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Але в цьому випадку $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ і з формули (2.4) також випливає, що $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

■

49. *Векторний добуток має наступні властивості:*

- $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ – *антикомутативність;*
- $[\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – *однорідність;*
- $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d}] = [\mathbf{a}, \mathbf{d}] + [\mathbf{b}, \mathbf{d}]$ – *дистрибутивність.*

Підказка. Легко перевіряються з координатного виразу (2.4).

50. *(**Ознака колінеарності векторів**) Вектори* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *колінеарні* ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$) *тоді і тільки тоді, коли* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Паралелограмом з вершиною в точці $A \in E^3$, що утворений векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, називається множина точок

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{M(\mathbf{r}) \in E^3 : \mathbf{r} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \quad 0 \le \lambda, \mu \le 1\},$$

за умови, що вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ відкладені від точки A.

51. *Площа S паралелограма, що утворюється векторами* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$*, відкладеними від спільної точки, може бути обчислена за формулою*

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - \langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2}. \tag{2.5}$$

Формулі (2.5) можна надати вигляд

$$S^2 = \begin{vmatrix} \langle\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle & \langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \\ \langle\mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle & \langle\mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \end{vmatrix}.$$

Матриця під визначником називається *матрицею Грама* пари векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

52. *Якщо* $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y\}$, *то площа паралелограма, що утворюється векторами* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$*, відкладеними від спільної точки, може бути обчислена за формулою* $S^2 = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}^2$.

Підказка. Розписати формулу (2.5) через координати векторів.

Із розкладання $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$ випливає, що матриця $C = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}$ є матрицею переходу від базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ до векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Якщо $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} > 0$, то вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ утворюють додатно орієнтований базис площини. Якщо ж $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} < 0$, то вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ утворюють від'ємно орієнтований базис площини. Тому величина

$$S_{\pm} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$$

називається *орієнтованою площею паралелограма*, що утворюється векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Подвійним векторним добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ називається вектор $\big[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\big]$.

53. ***(Формула розкриття подвійного векторного добутку)***

$$\big[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\big] = \mathbf{b}\langle\mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle - \mathbf{c}\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle.$$

Розв'язок. Оберемо систему координат у такий спосіб: вісь Oz направимо уздовж $\mathbf{c}$, вісь Oy візьмемо в площині векторів $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, вісь Ox направимо перпендикулярно до цієї площини. Тоді відносно обраної системи координат

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \mathbf{b} = \{0, b_y, b_z\},\ \mathbf{c} = \{0, 0, c_z\},$$

і ми знаходимо

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ 0 & c_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & b_z \\ 0 & c_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & b_y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \{b_y c_z, 0, 0\},$$

$$\big[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\big] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_y c_z & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_y c_z & 0 \end{vmatrix} \right\} = \big\{0, a_z b_y c_z, -a_y b_y c_z\big\}.$$

З іншого боку,

$$\mathbf{b}\langle\mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle = \{0, a_z b_y c_z, a_z b_z c_z\}, \quad \mathbf{c}\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \{0, 0, a_y b_y c_z + a_z b_z c_z\},$$

а значить,

$$\mathbf{b}\langle\mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle - \mathbf{c}\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \{0, a_z b_y c_z, -a_y b_y c_z\}.$$

Порівнюючи обчислення, одержуємо необхідний результат.

■

54. *Перевірити, що*

- $\big[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\big] + \big[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]\big] + \big[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\big] = \mathbf{0}$ *(тотожність Якобі);*
- $\langle[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]\rangle = \begin{vmatrix} \langle\mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle & \langle\mathbf{a}, \mathbf{d}\rangle \\ \langle\mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle & \langle\mathbf{b}, \mathbf{d}\rangle \end{vmatrix}$ *(тотожність Лапласа).*

2.3.2 Мішаний добуток векторів

Нехай $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – три вектори в E^3. Тоді добуток $\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle$ називається *мішаним добутком трьох векторів.*

55. *Нехай вектори* $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ *і* $\mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ *задані своїми координатами відносно ортонормованого базису. Тоді*

$$\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Дійсно,

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\},$$

$$\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle =$$

$$a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

■

56. *Розміщення символу векторного добутку між векторами у мішаному добутку неістотне, тобто* $\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle = \langle [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c} \rangle$.

З огляду на результат вправи **56**, для мішаного добутку вживається *спрощене позначення* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

57. *Перевірте, що*

- *мішаний добуток лінійний за кожним зі співмножників. Наприклад,*

$$(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \mu (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d});$$

- *парна кількість транспозицій пар векторів не змінює мішаного дубутку; при непарній кількості транспозицій знак мішаного добутку змінюється на протилежний. Наприклад,* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$;
- *(**ознака компланарності векторів**) Три вектори* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *компланарні тоді і тільки тоді, коли*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0; \tag{2.6}$$

- *зв'яжіть властивості мішаного добутку з властивостями визначника матриці розміром* 3×3.

Паралелепіпедом з вершиною в точці $A \in E^3$, що утворений векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, називається множина точок

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \{M(\mathbf{r}) \in E^3 : \mathbf{r} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}, \quad 0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1\},$$

за умови, що вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ відкладені від точки A.

58. ***(Об'єм паралелепіпеда)*** *Об'єм паралелепіпеда, утвореного векторами* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*, можна обчислити за формулою* $V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

Розв'язок. Припустимо, що вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ лежать в основі паралелепіпеда. Тоді площа цієї основи $S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$. Висота паралелепіпеда $h = |\mathbf{c}| \cos \alpha$, де α – кут між вектором $\mathbf{c}$ і перпендикуляром до основи. Але $\cos \alpha = |\cos \varphi|$, де φ – кут між $\mathbf{c}$ і $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Тому

$$V = Sh = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]||\mathbf{c}||\cos \varphi| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

■

59. ***(Об'єм тетраедра)*** *На трьох некомпланарних векторах* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$*, що відкладені від спільного початку, побудуємо тетраедр. Об'єм такого тетраедра можна обчислити за формулою* $V = \frac{1}{6}|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

Із розкладання $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$ випливає, що матриця $C = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$ є матрицею переходу від базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ до трійки векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Якщо

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} > 0,$$

то вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ утворюють додатно орієнтований базис простору. Якщо ж

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} < 0,$$

то вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ утворюють від'ємно орієнтований базис простору. Тому величина

$$V_{\pm} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

називається *орієнтованим об'ємом паралелепіпеда*, утвореного векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$.

2.4 Позиційно-метричні задачі на евклідовій площині

2.4.1 Загальне рівняння прямої на евклідовій площині

Наявність скалярного добутку і ортонормованого базису на площині дозволяють надати метричного тлумачення загальному рівнянню (1.10) прямої на площині. Нехай $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ параметричне рівняння прямої на площині. Позначимо через $\mathbf{N}$ вектор, ортогональний до $\mathbf{a}$. Точка $M(\mathbf{r})$ лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \parallel \mathbf{a}$. На площині ця умова еквівалентна умові

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N} \rangle = 0, \quad \text{або} \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{N} \rangle + C = 0 \quad (C = -\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{N} \rangle). \tag{2.7}$$

Рівняння (2.7) називається *векторним загальним рівнянням прямої* на евклідовій площині. Вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярний до прямої l, називається її *вектором нормалі.*

Нехай $\mathbf{N} = \{N_x, N_y\}$ – координати вектора $\mathbf{N}$. Переходячи до координат, маємо

$$N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) = 0$$

або

$$N_x x + N_y y - (N_x x_0 + N_y y_0) = 0.$$

Позначимо $A = N_x$, $B = N_y$, $C = -(N_x x_0 + N_y y_0)$. Тоді рівняння прямої набуде вигляду

$$Ax + By + C = 0.$$

Отже, якщо система координат декартова прямокутна, то *коефіцієнти A і B загального рівняння прямої* (1.10) *є координатами вектора нормалі прямої.* Подібно до властивості афінної нормалі, вектор $\mathbf{N}$ спрямований у верхню півплощину відносно прямої l.

Позначимо через $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ – орт нормалі до прямої. Рівняння

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \text{або} \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle + c = 0 \quad (c = -\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle) \tag{2.8}$$

називається векторним *нормованим* загальним рівнянням прямої на площині.

2.4.2 Позиційно-метрична задача «точка – точка».

Дві точки на площині або збігаються, або ні. Збіжні точки мають однакові координати. Якщо $M_1(\mathbf{r}_1)$ і $M_2(\mathbf{r}_2)$ дві точки евклідової площини, то відстань між ними є довжиною вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$. Отже,

$$|[M_1, M_2]| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

60. ***(Центральна симетрія)*** *Точка $\tilde{M}(\tilde{\mathbf{r}})$ є симетричною до точки $M(\mathbf{r})$ відносно центру симетрії $M_0(\mathbf{r}_0)$, якщо точка M_0 є серединою відрізка $[M, \tilde{M}]$. Довести, що*

$$\tilde{\mathbf{r}} = 2\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}. \tag{2.9}$$

Формула (2.9) застосовувана для будь-якої точки на площині і тому визначає відображення $E^2 \to E^2$, що називається центральною симетрією. В координатному виразі перетворення центральної симетрії відносно точки $M_0(x_0, y_0)$ запишеться як

$$\begin{cases} \tilde{x} = 2x_0 - x, \\ \tilde{y} = 2y_0 - y. \end{cases}$$

2.4.3 Позиційно-метрична задача «точка – пряма»

Точка може належати прямій або не належати прямій. *Відстанню* від точки до прямої на площині називається довжина перпендикуляра опущеного з точки на пряму.

61. *Відстань від точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямої (2.7) на евклідовій площині знаходиться за формулою*

$$d = |\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle| = |\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}\rangle + c|,$$

що є модулем результату підстановки координат точки M_1 в нормоване рівняння прямої. В координатному виразі

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Розв'язок. Якщо $M_0(\mathbf{r}_0)$ точка на прямій, то відстань від точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямої є довжиною проєкції вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ на пряму, перпендикулярну до прямої. Значить $d = |\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle| = |\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}\rangle + c|$.

■

Точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ знаходиться у верхній/нижній півплощині відносно прямої, якщо кут між $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ і вектором $\mathbf{n}$ гострий/тупий, тобто коли $\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle > 0$ або $\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle < 0$, відповідно. Величина

$$h = \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n}\rangle + c,$$

що є результатом підстановки координат точки M_1 в нормоване рівняння прямої, називається *відхиленням* точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ від прямої. В координатному виразі

$$h = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Відхилення $h > 0$ для точок верхньої півплощини і $h < 0$ для точок нижньої півплощини.

62. *(**Осьова симетрія**) Точка $\tilde{M}(\tilde{\mathbf{r}})$ є симетричною до точки $M(\mathbf{r})$ відносно прямої l, якщо пряма l перпендикулярна до відрізка $[M, \tilde{M}]$ і проходить через його середину. Якщо пряма задана рівнянням $l : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}\rangle + C = 0$, то*

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - 2h\mathbf{n}, \tag{2.10}$$

де h – відхилення точки M від прямої l.

Формула (2.10) застосовувана для будь-якої точки на площині і тому визначає відображення $E^2 \to E^2$, що називається осьовою симетрією.

63. *В координатному виразі перетворення осьової симетрії відносно прямої* $Ax + By + C = 0$ *запишеться як*

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 2\frac{Ax+By+C}{A^2+B^2}\,A, \\ \tilde{y} = y - 2\frac{Ax+By+C}{A^2+B^2}\,B. \end{cases}$$

Довести.

Підказка. Точка $\tilde{M}$ знаходиться у півплощині, протилежній до тієї, в якій знаходиться точка M, але на тій же відстані від прямої, що й точка M.

2.4.4 Позиційно-метрична задача «пряма – пряма»

Дві прямі на площині можуть бути паралельними, збігатися або перетинатися. Якщо прямі перетинаються, то вони утворюють певний кут. Розв'язок позиційних задач не залежить від наявності метричної структури. Відповідні задачі розв'язані в Розділі **1.2**.

Кутом між прямими l_1 і l_2 на площині називається менший з утворених ними кутів. Кут між паралельними або збіжними прямими вважається нульовим.

64. *Позначимо через* φ *кут між прямими* l_1 *і* l_2 *на площині.*

- *Якщо* $l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ *і* $l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2\,\theta$, *то* $\cos\varphi = \frac{|\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle|}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{a}_2|}$;
- *якщо* $l_1 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_1\rangle + C_1 = 0$ *і* $l_2 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_2\rangle + C_2 = 0$, *то* $\cos\varphi = \frac{|\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\rangle|}{|\mathbf{N}_1|\,|\mathbf{N}_2|}$;
- *якщо* $l_1 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}\rangle + C = 0$, *але* $l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}t$, *то* $\sin\varphi = \frac{|\langle \mathbf{N}, \mathbf{a}\rangle|}{|\mathbf{N}|\,|\mathbf{a}|}$.

Довести.

Кутом від прямої l_1 до прямої l_2 (*орієнтованим кутом між прямими*) називається кут між додатно орієнтованою парою напрямних векторів прямих l_1 і l_2.

65. *Позначимо через* φ_o *орієнтований кут між прямими* l_1 *і* l_2. *Тоді* $\cos\varphi_o = \dfrac{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}$ *за умови, що пара напрямних векторів* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ *цих прямих орієнтована додатно. Покажіть, що*

$$\varphi_o = \begin{cases} \varphi, & \text{якщо пара } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \text{ орієнтована додатно;} \\ \pi - \varphi, & \text{якщо пара } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \text{ орієнтована від'ємно.} \end{cases}$$

66. *Для прямої, що задана загальним рівнянням* $l : Ax + By + C = 0$ $(B \neq 0)$, *тангенс орієнтованого кута між прямою* l *і віссю* Ox *дорівнює*

$$\tan \varphi_o = -\frac{A}{B}.$$

Довести.

Позначимо $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$ називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.*

67. *Нехай* $l : y = k_1 x + b_1$, $l_2 : y = k_2 x + b_2$ *дві прямі, що задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом. Позначимо через* φ_o *орієнтований кут від прямої* l_1 *до прямої* l_2, *а через* φ *– менший з двох кутів, що утворюють прямі. Тоді*

$$\tan \varphi_o = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \qquad \tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Підказка. Скористатися формулою для тангенса різниці кутів.

2.5 Позиційно-метричні задачі в евклідовому просторі

2.5.1 Загальне рівняння площини в евклідовому просторі

Параметричне рівняння площини (1.17) не вимагає наявності метричної структури в просторі і є виразом лінійної залежності векторів $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Скориставшись ознакою компланарності векторів (2.6), можемо виключити параметри з (1.17) формулою

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \tag{2.11}$$

що називається *загальним рівнянням площини, поданим за напрямними векторами.* В координатному виразі рівняння (2.11) отримає вираз

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

Рівняння (2.12) тотожне рівнянню площини (1.20) в афінних координатах, але має інше тлумачення.

68. *Рівняння площини, що проходить через 3 неколінеарні точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *і* $M_3(x_3, y_3, z_3)$, *можна подати у вигляді*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ортогональний до площини векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Тому рівняння (2.11) еквівалентне рівнянню $\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{N} \rangle = 0$ (порівняйте з рівнянням (1.21)). Рівняння

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{N} \rangle + D = 0 \tag{2.13}$$

називається *загальним рівнянням площини, поданим через вектор нормалі.* Позначивши $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$, отримаємо нормоване рівняння площини

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle + D = 0. \tag{2.14}$$

Якщо $\mathbf{N} = \{A, B, C\}$, то в координатному виразі рівняння (2.13) запишеться як

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подібно до вектора афінної нормалі (вправа **27**), вектор нормалі $\mathbf{N} = \{A, B, C\}$ спрямований у верхній півпростір відносно площини.

2.5.2 Позиційно-метрична задача «точка – площина»

Точка може належати площині або не належати площині. *Відстанню* від точки до площини в просторі називається довжина перпендикуляра опущеного з точки на площину.

69. *Відстань від точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до площини* (2.13) *в евклідовому просторі знаходиться за формулою*

$$d = |\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle + D|,$$

що є модулем результату підстановки координат точки M_1 в нормоване рівняння площини. В координатному виразі

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Розв'язок. Якщо $M_0(\mathbf{r}_0)$ точка на площині, то відстань від точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до площини є довжиною проекції вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ на пряму, перпендикулярну до площини. Значить, $d = |\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle| = |\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle + D|$.

■

Точка $M_1(\mathbf{r}_1)$ знаходиться у верхньому/нижньому півпросторі відносно площини, якщо кут між $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ і вектором $\mathbf{n}$ гострий/тупий, тобто коли $\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle > 0$ або $\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle < 0$, відповідно. Величина

$$h = \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{n} \rangle + D,$$

що є результатом підстановки координат точки M_1 в нормоване рівняння прямої, називається *відхиленням* точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ від площини. В координатному виразі

$$h = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Відхилення $h > 0$ для точок верхнього півпростору і $h < 0$ для точок нижнього півпростору.

70. *(**Симетрія дзеркальна**) Точка $\tilde{M}(\tilde{\mathbf{r}})$ є симетричною до точки $M(\mathbf{r})$ відносно площини Π, якщо площина Π перпендикулярна до відрізка $[M, \tilde{M}]$ і проходить через його середину. Якщо площина задана рівнянням $\Pi : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N} \rangle + D = 0$, то*

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - 2h\mathbf{n}, \tag{2.15}$$

де h – відхилення точки M від площини Π.

Формула (2.15) застосовувана для будь-якої точки на площині і тому визначає відображення $E^3 \to E^3$, що називається симетрією відносно площини.

71. *В координатному виразі перетворення симетрії відносно площини $Ax + By + Cz + D = 0$ запишеться як*

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 2\frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}A, \\ \tilde{y} = y - 2\frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}B, \\ \tilde{z} = z - 2\frac{Ax+By+Cz+D}{A^2+B^2+C^2}C. \end{cases}$$

Довести.

Підказка. Точка $\tilde{M}$ знаходиться у півпросторі, протилежному до того, в якому знаходиться точка M, але на тій же відстані від площини, що й точка M.

2.5.3 Позиційно-метрична задача «точка – пряма»

Параметричне, канонічне і загальне рівняння прямої в просторі не залежить від метричної структури, оскільки використовують лише поняття лінійної залежності векторів (Розділ **1.2**). Точка може належати прямій і не належати прямій.

72. *Нехай $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ параметрично задана пряма і $M_1(\mathbf{r}_1)$ точка простору. Точка $M_1(\mathbf{r}_1) \in l$ тоді і тільки тоді, коли $[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ (аналог вправи **31**).*

73. *Нехай $l : \begin{cases} \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_1 \rangle + D_1 = 0, \\ \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_2 \rangle + D_2 = 0, \end{cases}$ $([\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] \neq \mathbf{0})$ загальне рівняння прямої в просторі і $M_1(\mathbf{r}_1)$ точка простору. Точка $M_1(\mathbf{r}_1) \in l$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1 \rangle + D_1 = 0, \\ \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{N}_2 \rangle + D_2 = 0, \end{cases} \qquad [\mathbf{a}, [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]] = \mathbf{0}.$$

Відстанню від точки до прямої в просторі називається довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму.

74. *Відстань від точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямої $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ обчислюється за формулою*

$$d = \frac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}.$$

Підказка. Відстань від точки до прямої дорівнює висоті паралелограма, утвореного векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, що опущена на сторону $\mathbf{a}$.

Точка $\tilde{M}(\tilde{\mathbf{r}})$ називається симетричною до точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ відносно прямої l в просторі, якщо пряма l перпендикулярна до відрізка $[M\tilde{M}]$ і проходить через його середину. *Осьовою симетрією в просторі* відносно прямої l називається перетворення $E^3 \to E^3$, що переводить точки $M(\mathbf{r}) \in E^3$ в точки $\tilde{M}(\tilde{\mathbf{r}}) \in E^3$, симетричні відносно прямої l.

75. ***(Осьова симетрія в просторі)*** *Перетворення осьової симетрії відносно прямої $l : \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ записується у вигляді*

$$\tilde{\mathbf{r}} = 2\left(\mathbf{r}_0 + \frac{\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}\rangle}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}\right) - \mathbf{r},$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор довільної точки простору.

Підказка. $(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 2\overrightarrow{\text{Пр}}_{\mathbf{l}}(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$.

2.5.4 Позиційно-метрична задача «пряма – площина»

Взаємне розташування прямої і площини в евклідовому просторі має ті ж можливості, що і в афінному. Розв'язок відповідної позиційної задачі міститься в розділі **1.3**, але в евклідовому просторі цей роз'язок може бути поданий в інших термінах.

76. *Нехай пряму задано векторним параметричним рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, а площину – загальним рівнянням $\Pi : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}\rangle + D = 0$. В такому разі*

- $l \cap \Pi = \{\cdot\} \Leftrightarrow \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}\rangle \neq 0$*;*
- $l \parallel \Pi \ \Leftrightarrow \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}\rangle = 0,\ \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{N}\rangle + D \neq 0$*;*
- $l \subset \Pi \ \Leftrightarrow \ \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}\rangle = 0,\ \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{N}\rangle + D = 0.$

*(Порівняйте з вправою **32**).*

Підказка. Спільні точки прямої і площини мають задовільняти рівнянню $\langle \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \mathbf{N}\rangle + D = 0$, тобто $\langle \mathbf{a}, \mathbf{N}\rangle t + \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{N}\rangle + D = 0$.

77. *Нехай пряму і площину задано векторними параметричними рівняннями*

$$l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \qquad \Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}.$$

Довести, що

- $l \cap \Pi = \{\cdot\} \;\; \Leftrightarrow \;\; (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$;
- $l \parallel \Pi \;\; \Leftrightarrow \;\; (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0,\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$;
- $l \subset \Pi \;\; \Leftrightarrow \;\; (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0,\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

*(Прорівняйте з вправою **33**).*

Кутом між прямою і площиною називається кут між цією прямою і її ортогональною проєкцією на площину.

78. *Нехай пряма задана параметрично* $l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$, *а площина своїм загальним рівнянням* $\Pi : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N} \rangle + D = 0$. *Тоді*

$$\sin(l \,\widehat{}\, \Pi) = \frac{|\langle \mathbf{N}, \mathbf{a} \rangle|}{|\mathbf{N}||\mathbf{a}|}.$$

Підказка. Синус кута між прямою і її проєкцією на площину дорівнює модулю косинуса між її напрямним вектором і вектором нормалі до площини.

2.5.5 Позиційно-метрична задача «площина – площина»

Взаємне розташування двох площин в евклідовому просторі має ті ж можливості, що і в афінному. Розв'язок відповідної позиційної задачі міститься в розділі **1.3**, але в евклідовому просторі цей роз'язок може бути поданий в інших термінах.

79. *Нехай обидві площини задані векторними параметричними рівняннями*

$$\Pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \qquad \Pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{c} + h\mathbf{d}.$$

Довести, що

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \big[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]\big] = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$;
- $\Pi_1 = \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \big[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]\big] = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$;
- $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l \quad \Leftrightarrow \quad \big[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]\big] \neq \mathbf{0}$.

*(Порівняйте з вправою **34**).*

80. *Нехай одна з площин задана параметричним рівнянням* $\Pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, *а інша – загальним рівнянням* $\Pi_2 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N} \rangle + D = 0$. *Довести, що в такому разі*

- $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \big[\mathbf{N}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\big] = \mathbf{0}, \\ \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{N} \rangle + D \neq 0; \end{cases}$

- $\Pi_1 = \Pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \big[\mathbf{N}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\big] = \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{N} \rangle + D = 0; \end{cases}$
- $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l \quad \Leftrightarrow \big[\mathbf{N}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\big] \neq \mathbf{0}.$

*(Порівняйте з вправою **35**).*

Кутом між площинами називається менший із двох двогранних кутів, утворених цими площинами. Мірою двогранного кута слугує кут між прямими, перпендикулярними ребру двогранного кута. Цей кут дорівнює куту між прямими, перпендикулярними заданим площинам.

81. *Нехай площини задано загальними рівняннями*

$$\Pi_1 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_1 \rangle + D_1 = 0, \quad \Pi_2 : \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_2 \rangle + D_2 = 0.$$

Тоді

$$\cos(\Pi_1 \widehat{\ } \Pi_2) = \frac{|\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle|}{|\mathbf{N}_1||\mathbf{N}_2|}.$$

У координатному виразі

$$\cos(\Pi_1 \widehat{\ } \Pi_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Довести.

2.5.6 Позиційно-метрична задача «пряма – пряма»

Взаємне розташування двох прямих в евклідовому просторі має ті ж можливості, що і в афінному. Розв'язок цієї позиційної задачі міститься в розділі **1.3**, але в евклідовому просторі цей розв'язок може бути поданий в інших термінах.

82. *Нехай прямі задано векторними параметричними рівняннями*

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \qquad l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\theta.$$

В такому разі

- $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}\ [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}] \neq \mathbf{0};$
- $l_1 = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0},\ [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}] = \mathbf{0};$
- l_1 *і* l_2 *мимобіжні* $\quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0},\ \big(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}\big) \neq 0;$
- $l_1 \cap l_2 = \{\cdot\} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0},\ \big(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}\big) = 0.$

*(Порівняйте з вправою **38**).*

Підказка. Інтерпретуйте результат вправи **38** в термінах векторного і мішаного добутків.

83. *Нехай l_1 і l_2 мимобіжні прямі. Тоді існують єдині площини Π_1 і Π_2 такі, що $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, $\Pi_1 \supset l_1$, $\Pi_2 \supset l_2$.*

Розв'язок. Нехай

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \qquad l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\theta \quad (\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}).$$

Площини $\Pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ і $\Pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{a} + \theta\mathbf{b}$ паралельні, причому пряма $v = 0$ лежить у площині Π_1 і збігається з прямою l_1, а пряма $u = 0$ лежить в площині Π_2 і збігається з прямою l_2.

■

Кутом між двома мимобіжними прямими l_1 і l_2 називається кут між прямою l_1 і прямою $l_2' \parallel l_2$ такою, що $l_2' \cap l_1 = \{\cdot\}$.

84. *Нехай прямі задано векторними параметричними рівняннями*

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \qquad l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\theta.$$

Довести, що в такому випадку

$$\cos(l_1 \widehat{\ } l_2) = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

85. *Нехай одну з прямих $l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ задано параметричним рівнянням, а іншу $l_2 : \begin{cases} \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_1 \rangle + D_1 = 0 \\ \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_2 \rangle + D_2 = 0 \end{cases}$ загальним. Довести, що в такому випадку*

$$\cos(l_1 \widehat{\ } l_2) = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)|}{|\mathbf{a}||[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]|}.$$

86. *Нехай прямі $l_1 : \begin{cases} \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_1 \rangle + D_1 = 0 \\ \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_2 \rangle + D_2 = 0 \end{cases}$ і $l_2 : \begin{cases} \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_3 \rangle + D_1 = 0 \\ \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_4 \rangle + D_2 = 0 \end{cases}$ задано загальними рівняннями. Довести, що в такому випадку*

$$\cos(l_1 \widehat{\ } l_2) = \frac{|\langle [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2], [\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4] \rangle|}{|[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]||[\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4]|}.$$

Спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих називається пряма, що перпендикулярна цим прямим і перетинає їх.

87. *Загальне рівняння спільного перпендикуляра мимобіжних прямих*

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}, \qquad l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \theta\mathbf{b}$$

має вигляд

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \big[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\big] \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \big[\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\big] \rangle = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Розташуємо прямі в паралельних площинах

$$l_1 \subset \Pi_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + v\mathbf{b},$$
$$l_2 \subset \Pi_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{a} + \theta\mathbf{b}.$$

Вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ такий, що $\mathbf{N} \perp \Pi_1$ і $\mathbf{N} \perp \Pi_2$. Площина $\Pi_3 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} + \lambda\mathbf{N}$ містить пряму $\lambda = 0$, що збігається з прямою l_1, і містить пряму $l_3 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{N}$, що задається рівнянням $t = 0$. Отже, площина Π_3 проходить через пряму $l_3 \perp \Pi_1$, а значить, $\Pi_3 \perp \Pi_1$.

Аналогічно, площина $\pi_4 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \theta\mathbf{b} + \mu\mathbf{N}$ містить пряму l_2 і пряму $l_4 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu\mathbf{N}$, що перпендикулярна Π_2.

Пряма $l = \Pi_3 \cap \Pi_4$ і є шуканим спільним перпендикуляром.

■

Відстанню між мимобіжними прямими називається відстань між паралельними площинами, що їх містять.

88. *Відстань d між двома мимобіжними прямими*

$$l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t, \qquad l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\theta$$

обчислюється за формулою

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$

Підказка. Відстань між мимобіжними прямими дорівнює висоті паралелепіпеда, утвореного векторами $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, що опущена на його основу, утворену векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

89. *Дві непаралельні прямі l_1: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ і l_2: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\theta$ ($\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$) перетинаються тоді і тільки тоді, коли*

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

Підказка. Досить помітити, що наведена умова означає розташування прямих в одній площині.

2.6 Метричні обчислення в афінних координатах

Якщо система координат не є прямокутною декартовою, то розв'язання метричних задач потребує більш охайних міркувань і обчислень.

90. *Нехай система афінних координат на площині утворена векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Скалярний добуток векторів $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2$ обчислюється за формулою*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = g_{11}a^1b^1 + g_{12}(a^1b^2 + a^2b^1) + g_{22}a^2b^2, \tag{2.16}$$

де $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ – попарні скалярні добутки базисних векторів. Перевірте.

Підказка. Скористатися властивостями скалярного добутку (вправа **39**).

Вираз (2.16) називається *метричною формою площини*, а матриця

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

є симетричною відносно головної діагоналі і називається *матрицею метричної форми* афінної площини. Не будь-яка симетрична матриця може бути матрицею метричної форми.

91. *Доведіть, що матриця* $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$ *є матрицею метричної форми тоді і тільки тоді, коли*

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} > 0. \tag{2.17}$$

Підказка. Очевидно, що $g_{11} = |\mathbf{e}_1|^2 > 0$, а визначник g є квадратом площі (невиродженого(!)) паралелограма, що утворений базисними векторами.

Умови (2.17) називаються умовами додатної визначеності матриці g. Праву частину рівності (2.16) позначають скорочено як $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, тобто

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{11}a^1b^1 + g_{12}(a^1b^2 + a^2b^1) + g_{22}a^2b^2. \tag{2.18}$$

Як наслідок,

$$|\mathbf{a}|^2 = g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = g_{11}(a^1)^2 + 2g_{12}a^1a^2 + g_{22}(a^2)^2. \tag{2.19}$$

Оскільки розкладання за базисом єдине, то відповідність

$$\mathbf{a} \to \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = a$$

є взаємно однозначною і стовпчик a, складений із координат вектора, називається *вектор-стовпчиком*, або просто *вектором*. Рядок $a^t = (a^1, a^2)$ називається *вектор-рядком*, або *ковектором*.

92. *Перевірте, що з використанням означення добутку матриць*

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = b^t g\, a = a^t g b.$$

93. *На площині з матрицею метричної форми* $g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, *знайти кут між векторами* $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ *і* $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

Розв'язок. Косинус шуканого кута $\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$. Виконаємо обчислення за формулами (2.18) та (2.19).

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = b^t g a = (-2, 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-5, 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5,$$

$$|\mathbf{a}|^2 = a^t g a = (1,2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (0,5)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10,$$

$$|\mathbf{b}|^2 = b^t g b = (-2,1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-5,5)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 15.$$

Отже,

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

■

Позначимо через $\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$ радіус-вектор довільної точки на площині. Рівняння прямої

$$A_1(x^1 - x_0^1) + A_2(x^2 - x_0^2) = 0,$$

що проходить через точку $\mathbf{r}_0 = x_0^1\mathbf{e}_1 + x_0^2\mathbf{e}_2$, запишемо у вигляді матричного добутку

$$(A_1, A_2)\begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ x^2 - x_0^2 \end{pmatrix} = N\,(X - X_0) = 0,$$

утворивши

- вектор $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, вектор $X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$,
- ковектор $N = (A_1, A_2)$.

Позначимо через g^{-1} матрицю, обернену до матриці метричної форми. Користуючись симетричністю матриць g і g^{-1}, рівняння прямої подамо у вигляді

$$N\,(X - X_0) = Ng^{-1}g(X - X_0) = \left(g^{-1}N^t\right)^t g(X - X_0) = g(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

де ми ввели позначення $\mathbf{N}$ для вектора

$$\mathbf{N} = \left(g^{-1}N^t\right)^1\mathbf{e}_1 + \left(g^{-1}N^t\right)^2\mathbf{e}_2. \tag{2.20}$$

З огляду на те, що вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ колінеарний до прямої, вектор (2.20) є вектором нормалі до прямої на площині із загальними афінними координатами, а загальне рівняння прямої набуває вигляду

$$l:\ g(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \tag{2.21}$$

94. *Перевірте, що для невиродженої матриці* $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *обернена матриця має вигляд*

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Як частковий випадок, обернена матриця метричної форми площини

$$g^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}.$$

95. *На площині з матрицею метричної форми* $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *знайти координати вектора нормалі прямої* $2x - 5y + 1 = 0$.

Розв'язок. Ковектор нормалі даної прямої $N = (2, -5)$. Матриця g^{-1} має вигляд $g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Обчислимо

$$g^{-1}N^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_1 + \Big(-\frac{5}{3}\Big)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(3\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2).$$

■

96. *На площині з матрицею метричної форми* $g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *написати рівняння прямої, що проходить через точку* $(2, -4)$ *перпендикулярно до вектора* $\mathbf{N} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$.

Розв'язок. Рівняння прямої отримаємо з умови ортогональності вектора $\mathbf{N}$ до вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x^1 - 2)\mathbf{e}_1 + (x^2 + 4)\mathbf{e}_2$, що задається умовою $g(\mathbf{N}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Отже, маємо

$$(2, -3)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 - 2 \\ x^2 + 4 \end{pmatrix} = (1, -7)\begin{pmatrix} x^1 - 2 \\ x^2 + 4 \end{pmatrix} = (x^1 - 2) - 7(x^2 + 4) = 0.$$

Розкривши дужки і перепозначивши $x^1 \to x$, $x^2 \to y$, запишемо рівняння прямої у звичному вигляді $x - 7y - 30 = 0$.

■

97. *На площині з матрицею метричної форми* $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *знайти відстань від точки* $A(1, -4)$ *до прямої* $2x - y + 4 = 0$.

Розв'язок. Відстань від точки до прямої дорівнює довжині проєкції вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ з початком в точці на прямій і кінцем в точці A на одиничний вектор нормалі до прямої. Тобто

$$d = \frac{|g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{N})|}{\sqrt{g(\mathbf{N}, \mathbf{N})}}.$$

Порівнюючи з рівнянням (2.21), зауважимо, що відстань дорівнює результату підстановки координат точки в нормоване рівняння прямої.

Матриця $g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ковектор нормалі даної прямої $N = (2, -1)$. Отже, вектор нормалі $\mathbf{N}$ має координати

$$g^{-1}N^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Його довжина

$$|\mathbf{N}|^2 = (1, -1/3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (2, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 7.$$

Тому

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 4|}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{7}}.$$

■

98. *Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки (x_0, y_0) на пряму $Ax + By + C = 0$, якщо $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 1$ і кут між векторами $\mathbf{e_1}\widehat{\ }\mathbf{e_2} = \omega$.*

Розв'язок. Матриця метричної форми за даними задачі має вигляд

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{\sin^2\omega} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Ковектор даної прямої $N = (A, B)$. Вектор нормалі знайдемо за формулою (2.20)

$$\frac{1}{\sin^2\omega} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2\omega} \begin{pmatrix} A - B\cos\omega \\ -A\cos\omega + B \end{pmatrix}.$$

Знайдений вектор є напрямним для шуканої прямої. Отже, її канонічне рівняння не залежить від метричної структури і має вигляд

$$\frac{x - x_0}{A - B\cos\omega} = \frac{y - y_0}{-A\cos\omega + B}.$$

Загальне рівняння

$$(A\cos\omega - B)(x - x_0) + (A - B\cos\omega)(y - y_0) = 0.$$

■

99. *Нехай $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ система афінних координат у просторі. Доведіть, що скалярний добуток векторів $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$ і $\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3$ обчислюється за формулою*

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a^i b^j, \tag{2.22}$$

де $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ – попарні скалярні добутки базисних векторів.

Вираз $\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a^i b^j$ називається *метричною формою простору*, а матриця $g = (g_{ij})$ називається матрицею метричної форми. Метричну форму, обчислену на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, позначимо скорочено $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Тобто

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a^i b^j.$$

100. *Покажіть, що косинус кута між векторами* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *у виразі через метричну форму має вигляд*

$$\cos(\mathbf{a}\widehat{\ }\mathbf{b}) = \frac{g(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\sqrt{g(\mathbf{a},\mathbf{a})}\,\sqrt{g(\mathbf{b},\mathbf{b})}}.$$

Рівняння площини з вектором нормалі $\mathbf{N}$, що проходить через точку з радіус-вектором $\mathbf{r}_0$, у виразі через метричну форму має вигляд

$$g(\mathbf{N},\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0. \qquad (2.23)$$

101. *Відстань від точки з радіус-вектором* $\mathbf{r}_1$ *до площини* $g(\mathbf{N},\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$ *у просторі з матрицею метричної форми* g *обчислюється за формулою*

$$d = \frac{|g(\mathbf{N},\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)|}{\sqrt{g(\mathbf{N},\mathbf{N})}}.$$

Перевірте.

102. *Покажіть, що координати вектора нормалі до площини* $Ax+By+Cz+D=0$ *в просторі з матрицею метричної форми* g *знаходяться за формулою*

$$g^{-1}N^t,$$

де g^{-1} *матриця, обернена до матриці* g, *а* $N=(A,B,C)$ *– ковектор нормалі площини.*

103. *(а) Нехай* $\Pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ *– параметричне рівняння площини в просторі з матрицею метричної форми* g. *Якщо* $\mathbf{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$ *і* $\mathbf{b} = \{b^1, b^2, b^3\}$, *то ковектор нормалі площини* Π *пропорційний до ковектора*

$$N = \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \right).$$

(б) Написати загальне рівняння площини, що проходить через точку $(1,-2,1)$ *в напрямку, що задається векторами* $\mathbf{a}=\{-2,3,1\}$, $\mathbf{b}=\{3,2,1\}$ *в просторі з матрицею метричної форми* g.

Розв'язок. (а) Позначимо через $\mathbf{N}$ вектор нормалі даної площини. Рівняння площини (2.23) перепишемо в матричному вигляді як

$$\mathbf{N}^t g(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0.$$

Це означає, що ковектор $N = \mathbf{N}^t g$ є ковектором нормалі площини. З умов

$$\begin{cases} g(\mathbf{N},\mathbf{a}) = 0, \\ g(\mathbf{N},\mathbf{b}) = 0; \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} \mathbf{N}^t g\,\mathbf{a} = 0, \\ \mathbf{N}^t g\,\mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

випливає, що координати (N_1, N_2, N_3) ковектора N є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} N_1a^1 + N_2a^2 + N_3a^3 = 0, \\ N_1b^1 + N_2b^2 + N_3b^3 = 0, \end{cases}$$

одним з розв'язків якої є ковектор

$$N = \left(\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \right).$$

(б) Скориставшись розв'язком задачі (а), знайдемо ковектор нормалі площини у вигляді

$$N = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (1, 5, -13).$$

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$(x-1) + 5(y+2) + (-13)(z-1) = 0 \quad \sim \quad x + 5y - 13z + 22 = 0.$$

■

104. *Покажіть, що відстань від точки (x_0, y_0, z_0) до площини $Ax+By+Cz+D=0$ у просторі з матрицею метричної форми g обчислюється за формулою*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{g(\mathbf{N}, \mathbf{N})}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^3 g^{ij} N_i N_j}},$$

де (g^{ij}) – матриця, оберенена до матриці g, і $N = (A, B, C)$ – ковектор заданої площини.

105. *Позначимо через φ кут між прямою*

$$l: \; x = x_0 + a^1 t, \; y = y_0 + a^2 t, \; x = z_0 + a^3 t$$

і площиною $A_1x + A_2y + A_3z + D = 0$ у просторі з метричною формою g. Тоді

$$\sin\varphi = \frac{|A_1a^1 + A_2a^2 + A_3a^3|}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^3 g^{ij} N_i N_j} \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 g_{ij} a^i a^j}},$$

де (g^{ij}) – матриця, оберенена до матриці g, і $N = (A_1, A_2, A_3)$ – ковектор заданої площини. Перевірте.

Розділ 3

Застосування методів аналітичної геометрії

3.1 Геометричні місця точок і траєкторії руху точки

Геометричним місцем точок називається множина точок, що мають певну геометричну властивість. Рівняння, якому задовольняють координати геометричного місця і тільки вони, називається рівнянням геометричного місця. При цьому система координат, в якій задаються координати точок, може бути довільною. В задачах цього розділу розглядаються геометричні місця точок, координати яких задано в декартовій прямокутній або в полярній системах координат.

106. *Скласти рівняння геометричного місця точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ є сталою і дорівнює $2a$ $(a > c \geq 0)$ (**еліпс**).*

Розв'язок. Нехай $M(x, y)$ – точка геометричного місця. Тоді

$$r_1 := |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 := |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

За означенням, $r_1 + r_2 = 2a$. Зауважимо, що $r_1 \leq 2a$ і $r_2 \leq 2a$. Отже,

$$r_1 = 2a - r_2,$$

обидві частини рівності додатні, і піднесення до квадрата є еквівалентним перетворенням. Маємо

$$r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2 \;\Rightarrow\; r_1^2 - r_2^2 = 4a^2 - 4ar_2 \;\Rightarrow\; 4cx = 4a^2 - 4ar_2.$$

Звідси $ar_2 = a^2 - cx \geq 0$, що є можливим за умови $x \leq a/c$. За цієї умови можна знову піднести до квадрата і отримати

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \;\Rightarrow\; x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Отримаємо $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0).$$

Задана система координат називається канонічною для еліпса, а отримане рівняння еліпса – *канонічним рівнянням* (рис. 3.1).

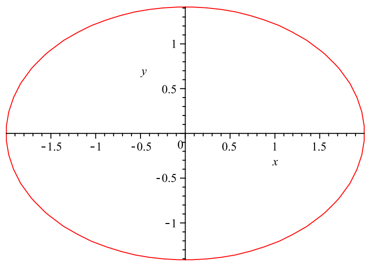

Рис. 3.1: Еліпс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ з півосями $a = 2$, $b = \sqrt{2}$

■

107. *Скласти рівняння геометричного місця точок, модуль різниці відстаней від яких до двох фіксованих точок $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ дорівнює $2a$, де $c > a > 0$ (**гіпербола**).*

Відповідь. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Задана система координат називається канонічною для гіперболи, а отримане рівняння гіперболи – *канонічним рівнянням* (рис. 3.2).

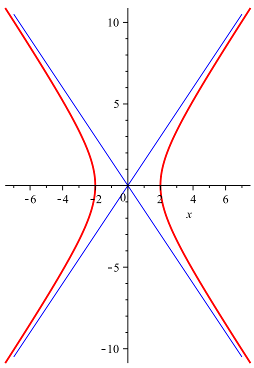

Рис. 3.2: Гіпербола $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ з півосями $a = 2$, $b = 3$

108. *Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань від яких до прямої $x = -\frac{p}{2}$ дорівнює відстані до точки $F(\frac{p}{2}, 0)$ (**парабола**).*

Відповідь. $y^2 = 2px$. Задана система координат називається канонічною для параболи, а отримане рівняння параболи – *канонічним рівнянням* (рис. 3.3).

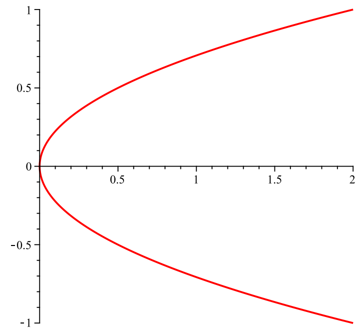

Рис. 3.3: Парабола $y^2 = 2x$ з фокальним параметром $p = 1$

109. *Скласти рівняння геометричного місця точок, добуток відстаней від яких до фіксованих точок $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ є величина стала, що дорівнює a^2 (**овал Касіні**).*

Відповідь. $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$ (рис. 3.4).

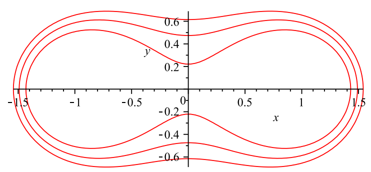

Рис. 3.4: Овали Касіні для $c = 1$, $a \approx 1.05$, $a \approx 1.22$, $a \approx 1.38$

110. *Скласти рівняння геометричного місця точок, що є основами перпендикулярів, опущених з початку координат, на прямі, які відтинають від координатних кутів трикутники сталої площі S (**лемніската Бернулі**).*

Відповідь. $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ (рис. 3.5).

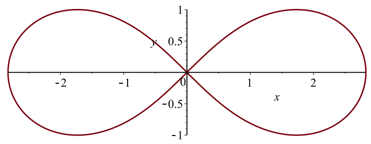

Рис. 3.5: Лемніската при $c = 2$

Полярною системою координат на площині називається пара $(O, \mathbf{l})$, де O – фіксована точка – *полюс*, а $\mathbf{l}$ – промінь, що виходить з O, який називається *полярною віссю.*

Довільна відмінна від O точка M площини цілком визначається відстанню $\rho = |OM|$ від точки M до полюса O і кутом φ, відрахованим від полярної осі до променя $\overrightarrow{OM}$. Додатним вважають напрям відрахунку проти руху годинникової стрілки[1]. Для полюса O відстань $\rho = 0$, а кут φ невизначений. Числа $\rho > 0$ і φ називають *полярними координатами* точки M. Координата ρ називається *полярним радіусом*, а координата φ – *полярним кутом.* Значення $0 \le \varphi < 2\pi$ називається *головним.* Всі інші значення φ відрізняються від головного на число, кратне 2π.

Полярна система координат, полюс якої збігається з початком декартової прямокутної системи координат xOy, а полярна вісь – з додатним напрямком осі Ox називаються *узгодженою* з декартовою координатною системою. В такому випадку декартові і полярні координати пов'язані наступними формулами перетворень

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Нехай на площині фіксовано деяку праву прямокутну декартову систему координат.

111. *Скласти рівняння траєкторії руху точки, що рухається зі сталою швидкістю v по променю, що обертається зі сталою кутовою швидкістю w навколо полюса, в узгоджених полярних координатах (**спіраль Архімеда**).*

Розв'язок. Рухомий промінь за напрямком збігається з напрямком полярного радіуса і за час t точка долає відстань від полюса величиною $\rho = vt$. За той же час промінь обертається на кут $\varphi = \omega t$, який збігається з полярним кутом. Отже, рівняння руху точки в полярних координатах має вигляд $\rho = \frac{v}{\omega}\varphi$ (рис. 3.6).

■

112. *Скласти рівняння основи перпендикуляра, опущеного з початку координат на відрізок сталої довжини $2a$, кінці якого ковзають по координатних осях прямокутної декартової системи координат, узгоджених полярних та прямокутних декартових координатах* **(чотирипелюсткова троянда)**.

Відповідь. $\rho = a\sin 2\varphi, \quad (x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (рис. 3.7).

[1] Вибір додатного знаку відрахунку кута відповідає одному з можливих способів вибору орієнтації на площині. Обраний спосіб є традиційним і узгодженим з вибором правої системи координат у просторі.

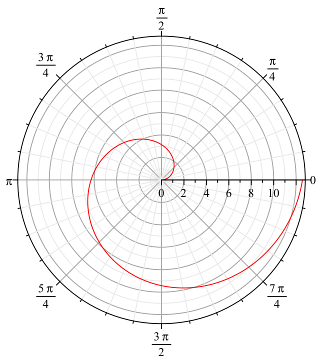

Рис. 3.6: Спіраль Архімеда $\rho = 2\varphi$

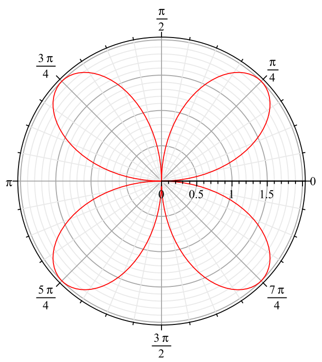

Рис. 3.7: Чотирипелюсткова троянда $\rho = 2\sin 2\varphi$

113. *Скласти рівняння траєкторії руху точки M променя, який обертається навколо початку координат O, якщо $OM = BC$, де B і C – точки перетину даного променя з колом $x^2 + y^2 = 2ax$, $r > 0$ та прямою $x = 2a$, відповідно, в узгоджених полярних та прямокутних декартових координатах* **(цисоїда Діокла)**.

Відповідь. $\rho = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $\quad y^2(a - x) = x^3$ (рис. 3.8).

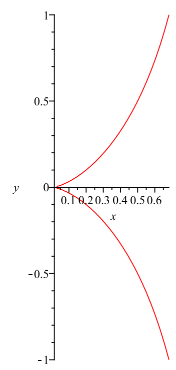

Рис. 3.8: Цисоїда $y^2(1 - x) = x^3$

114. *Скласти рівняння траєкторії руху точок M і N променя, який обертається навколо початку координат O, якщо $BN = BM = b$, $b > 0$, де B – точка перетину даного променя з колом $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$, а точки M і N лежать по різні боки від точки B, в узгоджених полярних та прямокутних декартових координатах (**равлик Паскаля**).*

Відповідь. $\rho = 2a\cos\varphi + b$, $\quad (x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$ (рис. 3.9).

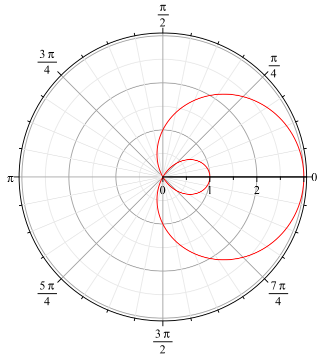

Рис. 3.9: Равлик Паскаля $\rho = 2\cos\varphi + 1$

115. *Навколо початку координат O обертається промінь, що перетинає пряму $x = a$ в змінній точці B. Точки M і N лежать на промені OB по різні боки від точки B на відстані b. Скласти рівняння ліній, що описують точки M і N в узгоджених полярних та прямокутних декартових координатах (**конхоїда Нікомеда**).*

Відповідь. $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$, $\quad (x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2$ (рис. 3.10).

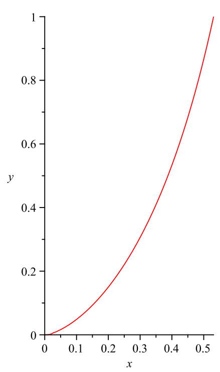

Рис. 3.10: Конхоїда Нікомеда $(x^2 + y^2)(x - 1)^2 = x^2$

116. *Розглянемо квадрат $ABCD$ зі стороною a, в який вписано сектор чверті круга радіуса a з центром в точці A. Нехай точка E рівномірно рухається* *по дузі від точки D до точки B; одночасно відрізок $A'B'$ рівномірно рухається з позиції DC в позицію AB. Нарешті, вимагатимемо, щоб обидва рухи завершилися одночасно. Скласти рівняння траєкторії руху точки перетину радіуса AE та відрізка $A'B'$ (**квадратриса Діностратa**).*

Відповідь. $\rho = \frac{2a}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}, \quad x = y\cot\frac{\pi y}{2a}$ (Рис. 3.11).

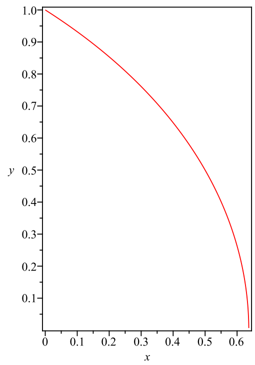

Рис. 3.11: Квадратиса Діностратa $x = y\cot\frac{\pi y}{a}$

117. *Скласти рівняння траєкторії руху основи перпендикуляра, опущеного з точки C, яка рухається по колу радіуса a з центром в початку координат на відрізок, кінцями якого є основи перпендикулярів, опущених з точки C на координатні осі прямокутної декартової системи координат, в прямокутних декартових координатах (**астроїда**).*

Відповідь. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 3.12).

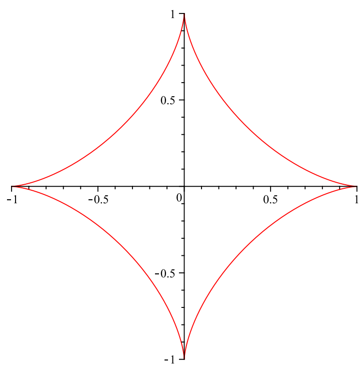

Рис. 3.12: Астроїда $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

Якщо можна подати координати точок геометричного місця у вигляді функцій певного аргументу (параметра), то говорять про лінію як таку, що подана *параметрично*. Найчастіше параметричне подання ліній виникає в задачах кінематичного типу як траєкторії руху точки.

118. *Скласти параметричні рівняння траєкторії руху фіксованої точки M на колі радіуса R, яке котиться без ковзання по осі Ox, якщо в момент початку руху точка M збігалася з початком координат* ***(циклоїда)****.*

Розв'язок.

Позначимо через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ базисні вектори нерухомої декартової системи координат $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, а через $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ базисні вектори рухомої декартової системи координат $(O'; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, прикріпленої до центру O' рухомого кола. Оскільки коло котиться без ковзання, то $|OO'| = R\varphi$, де φ – кут повороту радіуса OM в системі координат $(O'; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ з положення $M_0(0, -R)$ в положення $M_\varphi(-R\sin\varphi, -R\cos\varphi)$. Отже,

$$\overrightarrow{OO'} = R\varphi\,\mathbf{e}_1 + R\,\mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{O'M_\varphi} = -R\sin\varphi\,\mathbf{f}_1 - R\cos\varphi\,\mathbf{f}_2.$$

За умовою $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2$ і з векторної рівності $\overrightarrow{OM_\varphi} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_\varphi}$ отримаємо

$$\overrightarrow{OM_\varphi} = R\varphi\,\mathbf{e}_1 + R\,e_2 + (-R\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 - R\cos\varphi\,\mathbf{e}_2) = R(\varphi - \sin\varphi)\,\mathbf{e}_1 + R(1 - \cos\varphi)\,\mathbf{e}_2.$$

Отже, параметричне рівняння руху точки M

$$x = R(\varphi - \sin\varphi) \quad y = R(1 - \cos\varphi).$$

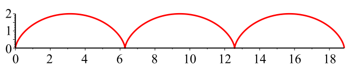

Рис. 3.13: Циклоїда при $R = 1$

■

119. *Скласти параметричні рівняння траєкторії руху фіксованої точки на колі радіуса r, яке котиться без ковзання зовні по іншому колу радіуса R* ***(епіциклоїда)****.*

Розв'язок. Позначимо через O' центр рухомого кола, а через t – кут повороту променя $\overrightarrow{OO'}$. Позначимо через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ базисні вектори нерухомої декартової системи координат $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, а через $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ базисні вектори рухомої декартової системи координат $(O'; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, прикріпленої до центру O' рухомого кола. Оскільки коло котиться без ковзання, то $Rt = r\varphi$, де φ – кут повороту радіуса OM в системі координат $(O'; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ з положення $M_0(-r, 0)$ в положення $M_\varphi(-r\cos\varphi, -r\sin\varphi)$. Отже,

$$\overrightarrow{OO'} = (R + r)(\cos t\,\mathbf{e}_1 + \sin t\,\mathbf{e}_2), \quad \overrightarrow{O'M_\varphi} = -R\cos\varphi\,\mathbf{f}_1 - r\sin\varphi\,\mathbf{f}_2.$$

Тепер зауважимо, що

$$\mathbf{f}_1 = \cos t\,\mathbf{e}_1 + \sin t\,\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_2 = -\sin t\,\mathbf{e}_1 + \cos t\,\mathbf{e}_2.$$

З векторної рівності $\overrightarrow{OM_\varphi} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_\varphi}$ отримаємо

$$\overrightarrow{OM_\varphi} = \Big((R+r)\cos t - r\cos(t+\varphi)\Big)\mathbf{e}_1 + \Big((R+r)\sin t - r\cos(t+\varphi)\Big)\mathbf{e}_2.$$

З урахуванням зв'язку $Rt = r\varphi$ параметричне рівняння лінії отримає вигляд

$$x = (R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}\,t, \quad y = (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}\,t\,.$$

■

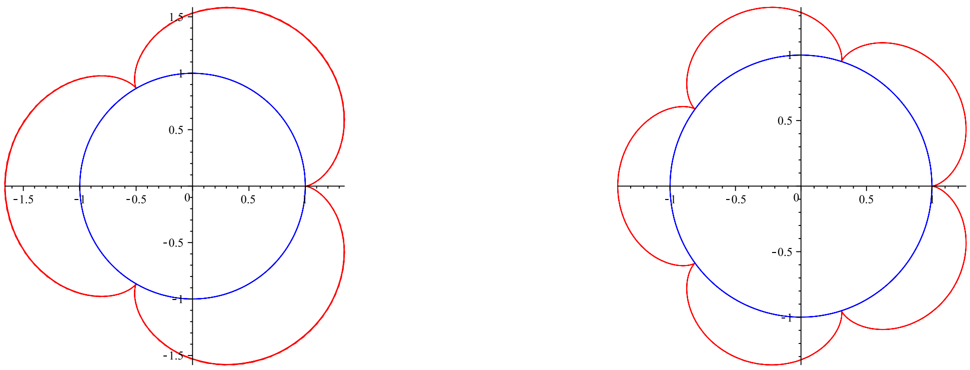

Рис. 3.14: Епіциклоїди при $R=1$, $r=\frac{1}{3}$ та при $R=1$, $r=\frac{1}{5}$

120. *Скласти параметричні рівняння траєкторії руху фіксованої точки на колі радіуса r, яке котиться без ковзання всередині іншого кола радіуса $R > r$* ***(гіпоциклоїда)****.*

Відповідь. $x = (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}\,t, \quad y = (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}\,t.$

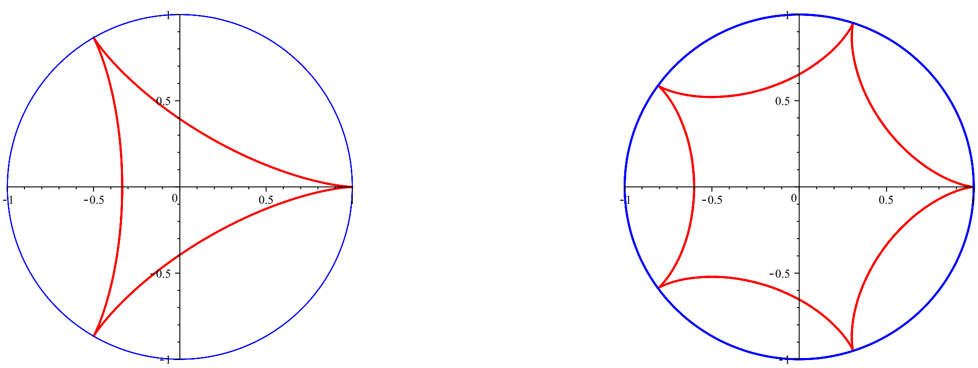

Рис. 3.15: Гіпоциклоїди при $R=1$, $r=\frac{1}{3}$ та при $R=1$, $r=\frac{1}{5}$

121. *По колу $x^2 + y^2 = r^2$ котиться промінь, початкове положення якого $x = r$. Написати параметричне рівняння лінії, що утворює точка M рухомої прямої, яка на початку руху збігалася з точкою дотику прямої і кола (**евольвента кола**).*

Відповідь. Приймемо за параметр кут t між радіусом в точці дотику рухомої прямої з колом і віссю Ox. Тоді траєкторія руху опишеться рівняннями $x = r(\cos t + t\sin t)$, $\quad y = r(\sin t - t\cos t)$ (рис. 3.16).

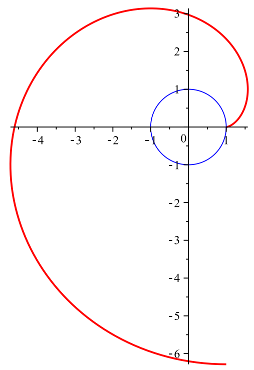

Рис. 3.16: Евольвента кола радіусу $r = 1$.

122. *Дано два кола з центром в початку координат O з радіусами a і b $(a > b)$. Навколо точки O обертається промінь, що перетинає ці кола в точках A і B, відповідно. Через точку A проведено пряму, паралельну осі Oy, а через точку B – пряму, що паралельна осі Ox, до їх перетину в точці M. Знайти рівняння траєкторії точки M при обертанні променя (**еліпсограф Леонардо да-Вінчі**).*

Відповідь. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3.2 Рухи на площині і в просторі. Класифікація рухів (теореми Шаля)

3.2.1 Означення й аналітичне подання руху

Відображення $F : E^n \longrightarrow E^n$ евклідова простору в себе називається рухом, якщо це відображення зберігає відстань між будь-якими двома точками, тобто для всіх $A, B \in E^n$

$$|F(A)F(B)| = |AB|.$$

Симетрії в задачах **60**, **62**, **70** є частковими випадками рухів.

123. *Рух зберігає кути між відповідними відрізками, переводить пряму в пряму, паралельні прямі у паралельні прямі.*

Рух переводить вектор $\overrightarrow{AB}$ у вектор $\overrightarrow{F(A)F(B)}$. Як наслідок, рух визначає відображення $\mathbf{F} : \overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{F(A)F(B)}$.

124. *Рух зберігає скалярний добуток векторів, тобто* $\big\langle \boldsymbol{F}(\mathbf{a}), \boldsymbol{F}(\mathbf{b}) \big\rangle = \big\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \big\rangle$.

Матриця C називається *ортогональною*, якщо $CC^t = C^tC = E$, де E – одинична матриця. Визначник ортогональної матриці $|\det C| = 1$. Якщо $\det C = 1$, то матриця називається *власне ортогональною*, якщо ж $\det C = -1$, матриця називається *невласне ортогональною*. Між ортогональними матрицями й ортонормованими базисами в E^n є тісний зв'язок.

125. *Нехай* $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *ортонормований базис в* E^n. *Система векторів* $(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ *утворює інший ортонормований базис* E^n *тоді і тільки тоді, коли матриця* C *перетворення* $(\mathbf{f}) = (\mathbf{e})C$ *є ортогональною. Власне ортогональна матриця зберігає орієнтацію, невласне ортогональна її обертає.*

Розв'язок. Розглянемо випадок $n = 2$. Нехай $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ – ортонормований базис у E^2 і нехай $(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ – довільний набір векторів. Розкладемо

$$\mathbf{f}_1 = c_1^1\mathbf{e}_1 + c_1^2\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{f}_2 = c_2^1\mathbf{e}_1 + c_2^2\mathbf{e}_2.$$

Сформуємо матрицю C

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix},$$

стовпці якої складені з координат відповідних векторів системи $(\mathbf{f})$. Тоді розкладання векторів $(\mathbf{f})$ за базисом $(\mathbf{e})$ можна подати у вигляді матричного добутку

$$(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}) = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix},$$

або скорочено

$$(\mathbf{f}) = (\mathbf{e})C.$$

Система векторів $\mathbf{f}$ утворить новий базис тоді і тільки тоді, коли $\det C \neq 0$. Цей базис буде орієнтованим додатно, якщо $\det C > 0$, і від'ємно, якщо $\det C < 0$. Цей базис буде ортонормованим, якщо

$$\big\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \big\rangle = |\mathbf{f}_1|^2 = (c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 = 1,$$
$$\big\langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \big\rangle = |\mathbf{f}_2|^2 = (c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 = 1,$$
$$\big\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \big\rangle = c_1^1c_2^1 + c_1^2c_2^2 = 0.$$

Ці умови еквівалентні матричній рівності $CC^t = CC^t = E$. Дійсно,

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 & c_1^1 c_2^1 + c_1^2 c_2^2 \\ c_2^1 c_1^1 + c_2^2 c_1^2 & (c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для розгляду випадку $n > 2$ досить помітити, що в розкладанні

$$(\mathbf{f}) = (\mathbf{e})C$$

стовпці матриці C сформовані з координат векторів системи $(\mathbf{f})$ відносно базису $(\mathbf{e})$, а матриця CC^t складається з попарних добутків $\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_k \rangle$. Отже, ортогональність матриці C тягне ортонормованість системи векторів $(\mathbf{f})$, і навпаки.

■

126. ***(Аналітичне подання руху)*** *Нехай $F : E^n \longrightarrow E^n$ – рух і нехай $(O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ довільна (фіксована) декартова система координат у E^n. Якщо $(x^1, \ldots, x^n)$ – координати довільної точки $M \in E^n$, то координати $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ точки $\tilde{M} = F(M)$ щодо тієї ж системи координат мають вигляд*

$$\tilde{X} = CX + b,$$

де X і $\tilde{X}$ – вектори-стовпці з відповідних координат, C – ортогональна матриця, а b – вектор-стовпець, складений з координат точки $\tilde{O} = F(O)$. Матриця C і вектор b визначені в єдиний спосіб.

Розв'язок. Позначимо $\tilde{O} = F(O)$, $\mathbf{f}_i = \mathbf{F}(\mathbf{e}_i)$. Тоді $(\tilde{O}; \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ – нова декартова прямокутна система координат. Нехай $\overrightarrow{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$ – радіус-вектор довільної точки M. Тоді $x^i = \langle \overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_i \rangle$. Позначимо через $\overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}} = y^1\mathbf{f}_1 + \ldots + y^n\mathbf{f}_n$ радіус-вектор точки $\tilde{M} = F(M)$ у новій системі координат. Тоді $y^i = \langle \overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}}, \mathbf{f}_i \rangle$. Але рух зберігає скалярний добуток. Отже,

$$y^i = \langle \overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}}, \mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{F}(\overrightarrow{OM}), \mathbf{F}(\mathbf{e}_i) \rangle = \langle \overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_i \rangle = x^i.$$

Запишемо розкладання

$$\overrightarrow{O\tilde{M}} = \tilde{x}^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \tilde{x}^n\mathbf{e}_n, \quad \overrightarrow{O\tilde{O}} = b^1\mathbf{e}_1 + \ldots + b^n\mathbf{e}_n.$$

Тоді

$$\overrightarrow{O\tilde{M}} = \overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}}. \tag{3.1}$$

Перепишемо його в матричній формі. Для цього введемо в розгляд стовпці

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

і рядки

$$(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad (\mathbf{f}) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n).$$

Тоді можна записати

$$\overrightarrow{O\tilde{M}} = (\mathbf{e})\tilde{X}, \quad \overrightarrow{O\tilde{O}} = (\mathbf{e})\, b, \quad \overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}} = (\mathbf{f})X,$$

і векторна рівність (3.1) перепишеться у вигляді

$$(\mathbf{e})\tilde{X} = (\mathbf{e})b + (\mathbf{f})X.$$

З огляду на те, що $(\mathbf{e})$ і $(\mathbf{f})$ – ортонормовані базиси, то $(\mathbf{f}) = (\mathbf{e})C$, де C – ортогональна матриця. Продовжуючи, маємо

$$(\mathbf{e})\tilde{X} = (\mathbf{e})C\,X + (\mathbf{e})\,b = (\mathbf{e})(CX + b).$$

З єдиності розкладання вектора за базисом випливє рівність

$$\tilde{X} = CX + b,$$

що й треба було довести. Єдиність визначення матриці C і вектора b також випливають з єдиності розкладання векторів за базисом.

■

Рух називається *власним*, якщо в його аналітичному поданні $\det C = +1$, і *невласним*, якщо $\det C = -1$.

3.2.2 Спеціальні види рухів на площині

Точка $M \in E^n$ називається нерухомою відносно руху F, якщо $F(M) = M$.

• **Паралельний перенос.** Паралельним переносом називається рух, що не має нерухомих точок.

127. *Відносно даної декартової прямокутної системи координат аналітичне подання паралельного переносу має вигляд*

$$\begin{array}{l} \tilde{x} = x + b^1, \\ \tilde{y} = y + b^2. \end{array} \qquad ((b^1)^2 + (b^2)^2 \neq 0).$$

Паралельний перенос є власним рухом.

• **Поворот.** *Поворотом* називається рух на площині, що має єдину нерухому точку – центр обертання.

128. *У системі координат, віднесеної до нерухомої точки, аналітичне подання повороту має вигляд*

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Параметр φ називається кутом повороту. Поворот є власним рухом.

Підказка. Якщо M – єдина нерухома точка, то всі точки площини зміщуються уздовж кіл з центрами в точці M.

• **Осьова симетрія.** Нетотожний рух, що лишає нерухомою пряму, називається *осьовою симетрією.*

129. *У системі координат, вісь Ox якої збігається з нерухомою прямою, аналітичне подання осьової симетрії має вигляд*

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x, \\ \tilde{y} &= -y, \end{aligned}$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Нехай l – нерухома пряма руху F. Направимо вісь Ox уздовж прямої l, а вісь Oy – перпендикулярно l. Запишемо загальний вигляд руху

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= c_1^1 x + c_2^1 y + b^1, \\ \tilde{y} &= c_1^2 x + c_2^2 y + b^2 \end{aligned}$$

і зажадаємо, щоб він залишав нерухомою пряму l, що збігається в нашій системі координат з віссю Ox. Тоді точка з координатами (x,0) переходить у точку з координатами (x,0). Отже, рівності

$$\begin{aligned} x &= c_1^1 x + b^1, \\ 0 &= c_1^2 x + b^2 \end{aligned}$$

повинні виконуватися тотожно за x. Звідси знаходимо

$$b^1 = b^2 = 0, \quad c_1^1 = 1, \ c_1^2 = 0.$$

Тоді

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_2^1 \\ 0 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

З ортогональності матриці C випливає рівність $1c_2^1 + 0c_2^2 = 0$. Значить, $c_2^1 = 0$. Оскільки $|\det C| = 1$, то $|c_2^2| = 1$. Якщо $c_2^2 = 1$, то перетворення є тотожним. Отже, $c_2^2 = -1$, що й завершує доведення.

■

• **Ковзна симетрія.** *Ковзною симетрією* називається композиція осьової симетрії і паралельного переносу уздовж осі симетрії.

130. *У системі координат, вісь Ox якої збігається з нерухомою прямою, аналітичне завдання ковзної симетрії має вигляд*

$$\tilde{x} = x + b^1,$$

$$\tilde{y} = -y,$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ковзна симетрія є невласним рухом.

Розв'язок. Позначимо через $T_{\mathbf{b}}$ паралельний перенос на вектор $\mathbf{b}$, а через S_l – осьову симетрію відносно прямої l. Тоді ковзна симетрія $F = T_{\mathbf{b}} \circ S_l$. Виберемо декартову систему координат, обговорену в умові. Нехай (x, y) довільна точка площини. Тоді

$$(x, y) \xrightarrow{S_l} (x, -y), \quad \text{а потім} \quad (x, -y) \xrightarrow{T_b} (x + b^1, -y).$$

Отже,

$$(x, y) \xrightarrow{T_{\mathbf{b}} \circ S_l} (x + b^1, -y).$$

■

Осьова симетрія – окремий випадок ковзної.

3.2.3 Класифікація рухів на площині

131. ***(Теорема Шаля на площині)*** *Будь-який власний рух на площині є або паралельним переносом, або поворотом. Будь-який невласний рух є ковзною симетрією.*

Підказка. Нехай F рух і $\tilde{X} = CX + b$ його аналітичне подання. З ортогональності матриці

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

вивести, що матриця може мати дві будови. Або

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

що відповідає власному руху, або

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},$$

що відповідає невласному руху. Далі розглянути задачу на нерухомі точки перетворень з такими матрицями.

3.2.4 Класифікація рухів у просторі

Аналітичне завдання руху F загального виду $\tilde{X} = CX + b$ можна подати як композицію паралельного переносу $T_{\mathbf{b}}$ і руху F_0 виду $\tilde{X} = CX$, а саме $F = T_{\mathbf{b}} \circ F_0$. Виділимо окремі випадки таких композицій.

• **Паралельний перенос**.

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + b^1, \\ \tilde{y} &= y + b^2, \\ \tilde{z} &= z + b^3. \end{aligned}$$

Це власний рух з матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Гвинтовий рух** – *композиція повороту навколо нерухомої осі і паралельного переносу в напрямку цієї осі.* У системі координат з нерухомою прямою в якості осі Oz цей рух запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b^3 \end{pmatrix}.$$

Гвинтовий рух є власним. Зауважимо, що паралельний перенос є частковим випадком ($\varphi = 0$) гвинтового руху.

• **Ковзна симетрія** – *композиція симетрії щодо площини і паралельного переносу уздовж площини симетрії.* Якщо площину (xy) системи координат розташувати в площині симетрії, а вісь Oz спрямувати перпендикулярно до неї, то ковзна симетрія запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ковзна симетрія є невласним рухом.

• **Дзеркальний поворот** – *композиція повороту навколо нерухомої осі і симетрії відносно площини, що перпендикулярна до осі обертання.* У системі координат, у якій вісь Oz спрямована уздовж осі обертання, а площина (xy) є площиною симетрії, дзеркальний поворот запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Дзеркальний поворот є невласним рухом.

Розглянемо докладніше структуру загального руху F_0 .

132. *Нехай F_0 рух, аналітичне подання якого $\tilde{X} = CX$. Тоді існує прямокутна декартова система координат, щодо якої рух F_0 визначається матрицею*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

для власного руху або матрицею

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

для невласного руху.

Розв'язок. Покажемо, що рух F_0 залишає інваріантною пряму, що проходить через початок координат (точки цієї прямої необов'язково залишаються на місці). Будемо шукати пряму, що проходить через початок координат, точки якої переходять у точки цієї ж прямої. Для таких точок $F_0(\overrightarrow{OM}) = \lambda\overrightarrow{OM}$. Оскільки пряма проходить через початок координат, то вектор $\overrightarrow{OM}$ збігається з радіус-вектором $\{x, y, z\}$ точки на прямій[2]. Позначимо через X стовпчик з координатами точки. Тоді з аналітичного подання руху отримаємо умову

$$CX = \lambda X \tag{3.4}$$

для будь-якої точки на прямій. Переписуючи цю умову у вигляді

$$(C - \lambda E)X = 0, \tag{3.5}$$

одержуємо систему рівнянь, що має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\det(C - \lambda E) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} c_1^1 - \lambda & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 - \lambda & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

Многочлен $\chi(\lambda) = \det(C - \lambda E)$ називається *характеристичним многочленом* матриці C. Ненульовий вектор X, координати якого задовольняють системі рівнянь (3.4) або, що еквівалентно, системі (3.5), називається *власним вектором* матриці C. Корені характеристичного многочлена називаються *власними числами* матриці C.

Рівняння (3.6) є алгебраїчним рівнянням третього порядку. Таке рівняння завжди має дійсний корінь λ_0, а значить, система $(C - \lambda_0 E)X = 0$ має ненульовий розв'язок. Позначимо його через X_0. Тоді пряма, що проходить через

[2]Нагадаємо, що за угодою про позначення $\{x, y, z\}$ – це стовпчик.

початок координат у напрямку власного вектоpуа X_0, під дією руху F_0 переходить у себе.

Оскільки F_0 – рух, то $\langle CX_0, CX_0\rangle = \langle X_0, X_0\rangle = |X_0|^2$. З іншого боку, $\langle CX_0, CX_0\rangle = \langle \lambda_0 X_0, \lambda_0 X_0\rangle = \lambda^2\langle X_0, X_0\rangle = \lambda_0^2|X_0|^2$. Отже, $\lambda_0^2 = 1$, а значить, $\lambda_0 = \pm 1$.

Оберемо систему координат так, щоб вісь Oz була спрямована уздовж інваріантної прямої, а площину (xy) оберемо перпендикулярно вектору $\mathbf{e}_3$. Оскільки $C\mathbf{e}_3 = \pm\mathbf{e}_3$, то

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $c_3^1 = 0, \quad c_3^2 = 0, \quad c_3^3 = \pm 1$. Тоді

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & 0 \\ c_1^3 & c_2^3 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Але C – ортогональна матриця, а значить, $c_1^3 = c_2^3 = 0$. Тоді

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

і $\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$ – ортогональна 2×2 матриця, що відповідає деякому руху в обраній нами площині (xy).

За теоремою Шаля для рухів площини, матриця руху зводиться до відомих форм. Таким чином, ми одержуємо 4 можливі варіанти:

$$(a)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(c)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (d)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок (a). Тоді $\det C = +1$, рух є власним і при перетворенні

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

кожна площина $z = z_0$ переходить у себе, у той час як у самій площині $z = z_0$ точки обертаються на кут φ навколо точки $(0, 0, z_0)$. Виходить, розглянутий рух є **поворотом навколо нерухомої осі**.

Розглянемо випадок (b). Тут $\det C = -1$, і рух буде невласним. Подамо матрицю C у вигляді

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер очевидно, що $F_0 = S \circ R_l$, де S – симетрія відносно площини, перпендикулярної до нерухомої прямої l, а R_l – обертання на кут φ навколо цієї прямої. Такий рух є **дзеркальним поворотом навколо нерухомої осі**.

Розглянемо випадок (c). Тут $\det C = -1$, і ми знову маємо справу з невласним рухом. Цей рух знову переводить кожну площину $z = z_0$ в себе, але на кожній такій площині є невласним рухом, тобто ковзною симетрією. Однак точка $(0, 0, 0)$ очевидно є нерухомою. Отже, в кожній площині $z = z_0$ рух є осьовою симетрією. Приймемо одну з цих прямих за вісь Ox нової системи координат. Тоді матриця, що задає розглянутий рух, набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Але це в точності дзеркальний поворот на кут $\varphi = 0$ навколо нової осі Oy.

Розглянемо випадок (d). Тут $\det C = +1$, і рух є власним. Розглянемо площину $z = 0$. Цю площину рух переводить у себе і діє на цій площині як невласний рух, тобто як ковзна симетрія. Однак точка $(0, 0, 0)$ очевидно є нерухомою. Отже, в площині $z = 0$ рух є осьовою симетрією. Приймемо цю вісь як нову вісь Ox. У такій системі координат матриця, що задає рух, набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

і є матрицею повороту на кут $\varphi = \pi$ навколо нової осі Ox.

$\blacksquare$

133. *Покажіть, що паралельний перенос T можна подати у вигляді $T = S_1 \circ S_2$, де S_1 і S_2 – симетрії щодо деяких площин, перпендикулярних напрямку переносу.*

134. *Покажіть, що композицію трьох симетрій відносно паралельних площин можна подати у вигляді однієї симетрії відносно певної площини, що їм паралельна.*

135. ***(Теорема Шаля для рухів у просторі)*** *Будь-який власний рух у просторі є гвинтовим. Будь-який невласний рух у просторі є або ковзною симетрією, або дзеркальним поворотом.*

Розв'язок. Нехай $\tilde{X} = CX + b$ рух. Тоді щодо деякої системи координат матриця C має вигляд:

$$(a)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad (b)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок (a). Якщо $\varphi = 0$, то розглянутий рух є паралельним переносом. Нехай $\varphi \neq 0$. Тоді матриці C відповідає поворот на кут φ навколо осі Oz. Позначимо його Ω і для зручності посилань перепозначимо і саму матрицю $C \to \Omega$.

При русі $\tilde{X} = \Omega X$ вісь Oz є інваріантною. Розкладемо вектор зсуву $\mathbf{b}$ на складові у вигляді $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, де вектор $\mathbf{c} \parallel Oz$, а вектор $\mathbf{a} \perp Oz$. Тоді $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, 0\}$, $\mathbf{c} = \{0, 0, c_3\}$ і $T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{c}} \circ T_{\mathbf{a}}$.

Аналітичне подання руху F у вигляді $\tilde{X} = \Omega X + b$ можна розкласти у композицію (послідовне виконання) рухів, а саме

$$F = T_{\mathbf{b}} \circ \Omega = T_{\mathbf{c}} \circ T_{\mathbf{a}} \circ \Omega = T_{\mathbf{c}} \circ \Omega'.$$

Покажемо, що Ω' – поворот навколо деякої прямої l, що перпендикулярна до площини (xy). Дійсно,

$$\Omega' X = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi + a_1 \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi + a_2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Отже, кожна площина $z = z_0$ переходить у себе, а в кожній такій площині є нерухома точка. Її координати не залежать від вибору z_0, а значить, всі такі точки лежать на деякій прямій l, що перпендикулярна до площини (xy). Отже, Ω' – обертання навколо прямої l. Але тоді $F = T_{\mathbf{c}} \circ \Omega'$ – гвинтовий рух.

Розглянемо випадок (b). Нехай S – симетрія відносно площини (xy). Вона задається матрицею виду

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S\Omega,$$

і ми можемо аналітично подати рух у вигляді

$$\tilde{X} = S\Omega X + b.$$

Значить, такий рух можна подати як композицію

$$F = T_{\mathbf{b}} \circ S \circ \Omega.$$

Вектор зсуву $\mathbf{b}$ розкладемо у вигляді $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, де $\mathbf{a} \perp Oz, \mathbf{c} \parallel Oz$. Тоді $T_b = T_a \circ T_c$. За вправою **133**, $T_{\mathbf{c}} = S_1 \circ S_2$, де S_1 і S_2 симетрії відносно площин, що перпендикулярні до осі Oz. Отже,

$$F = T_a \circ S_1 \circ S_2 \circ S \circ \Omega.$$

За вправою **134** композиція $S_1 \circ S_2 \circ S$ є симетрією відносно деякої площини, перпендикулярної до осі Oz. Позначимо її через S'. Оскільки $\mathbf{a} \perp Oz$, то $T_{\mathbf{a}} \circ S' = S' \circ T_{\mathbf{a}}$, і ми маємо

$$F = S' \circ T_{\mathbf{a}} \circ \Omega.$$

Якщо $\varphi = 0$, то Ω є тотожний рух, і тоді $F = T_{\mathbf{a}} \circ S'$, тобто рух є ковзною симетрією. Якщо ж $\varphi \neq 0$, то, як і у випадку (a), композиція $T_{\mathbf{a}} \circ \Omega = \Omega'$ є обертанням навколо осі, що перпендикулярна до площини (xy), а отже, $F = S' \circ \Omega'$ – дзеркальний поворот.

■

3.3 Комплексні числа, кватерніони і опис обертального руху

Комплексними числами називаються числа виду $z = x + y\mathbf{i}$, де $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{i}^2 = -1$. Дійсні числа x і y називаються, відповідно, дійсною і уявною частинами комплексного числа z. Дійсне число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* комплексного числа z. Число $\bar{z} = x - yi$ називається спряженим до числа z. Очевидно, що $z\bar{z} = |z|^2$. На декартовій площині комплексне число інтерпретується точкою з координатами (x, y). В узгоджених полярних координатах комплексне число подається в тригонометричній формі $z = \rho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, де $\rho = |z|$. Полярний кут φ називається *аргументом* комплексного числа. При обчисленні добутку комплексних чисел їх *модулі перемножуються*, а *аргументи додаються.*

136. *Перетворення $\tilde{z} = z\omega$, де $\omega = \cos\alpha + i\sin\alpha$ – комплексне число з модулем $|\omega| = 1$, є поворотом площини на кут α навколо початку координат. Обгрунтуйте.*

Кватерніони є узагальненням комплексних чисел. *Кватерніоном* називається число виду $q = a + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, де a, x, y, z дійсні числа, а три уявні одиниці $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ задовольняють наступним правилам обчислення добутку:

$$\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = -1, \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = \mathbf{j}.$$

Геомерична подача кватерніона полягає в тому, що кватерніон розглядається як пара $(a, \mathbf{v})$, де $a \in I\!R$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ – вектор, розкладений за ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ декартової прямокутної системи координат в E^3. Число a називається скалярною частиною кватерніона, а вектор $\mathbf{v}$ – векторною частиною кватерніона. Кватерніони виду $(a, \mathbf{0})$ ототожнюються з дійсними числами, а кватерніони виду $(0, \mathbf{v})$ називаються *чисто уявними.* Множину кватерніонів позначають символом $\mathbb{H}$ на честь ірландського математика і фізика У. Гамільтона.[3]

Сумою кватерніонів $(a, \mathbf{v})$ і $(b, \mathbf{w})$ називається кватерніон $(a + b, \mathbf{v} + \mathbf{w})$. *Добутком числа* $\lambda \in I\!R$ *на кватерніон* $(a, \mathbf{v})$ називається кватерніон $(\lambda a, \lambda\mathbf{v})$. Будемо позначати кватерніони літерою q, тобто $q = (a, \mathbf{v})$. Кватерніон $(0, \mathbf{0})$ називається нульовим і позначається символом θ. Кватерніон $(-a, -\mathbf{v})$ називається протилежним до кватерніона $q = (a, \mathbf{v})$ і позначається $(-q)$.

137. *Перевірте, що операція додавання кватерніонів і множення на число має наступні властивості:*

- $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ *(комутативність);*
- $(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3)$ *(асоціативність);*
- $q + \theta = q$;
- $q + (-q) = \theta$;
- $(\lambda + \mu)q = \lambda q + \mu q$;
- $\lambda(q_1 + q_2) = \lambda q_1 + \lambda q_2$ *(дистрибутивність);*
- $\lambda(\mu q) = (\lambda\mu)q$;
- $0q = \theta$, $1q = q$, $(-1)q = (-q)$.

Добутком кватерніонів $(a, \mathbf{v})$ і $(b, \mathbf{w})$ називається кватерніон

$$(a, \mathbf{v}) \cdot (b, \mathbf{w}) = \big(ab - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]\big).$$

138. *Обчисліть добуток кватерніонів* $q_1 = 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ *і* $q_2 = 3 - 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Відповідь. $20 + \mathbf{i} - \mathbf{j} - 9\mathbf{k}$.

139. *Перевірте, що добуток кватерніонів: асоціативний* $q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3$; *дистрибутивний* $(q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3$; *не комутативний* $q_1q_2 \neq q_2q_1$.

Кватерніон $(a, -\mathbf{v})$ називається *спряженим* до кватерніона $q = (a, \mathbf{v})$ і позначається символом $\bar{q}$. Дійсне число $\sqrt{a^2 + |\mathbf{v}|^2}$ називається *модулем кватерніона* $q = (a, \mathbf{v})$ і позначається $|q|$. Якщо $|q| = 1$, то кватерніон називається *одиничним.* Кватерніон виду $(a, \mathbf{0})$ ототожнюється з дійсним числом a. Кватерніон виду $(0, \mathbf{v})$ називається *чисто уявним.*

[3] Докладніше про комплексні числа і кватерніони дивіться [1, 6].

140. *Перевірте, що* $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$, $\overline{q_1q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1$, $|q_1q_2| = |q_1||q_2|$.

Розв'язок. Перевіримо другу властивість. Нехай $q_1 = (a, \mathbf{v})$, $q_2 = (b, \mathbf{w})$. Тоді

$$\overline{q_1q_2} = \overline{(ab - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle, a\mathbf{w} + b\mathbf{v} + [\mathbf{v}, \mathbf{w}])} = (ab - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle, -a\mathbf{w} - b\mathbf{v} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}]),$$

$$\bar{q}_2\bar{q}_1 = (b, -\mathbf{w})(a, -\mathbf{v}) = (ab - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle, -b\mathbf{v} - a\mathbf{w} + [\mathbf{w}, \mathbf{v}]) = (ab - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle, -a\mathbf{w} - b\mathbf{v} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}]),$$

що й завершує перевірку.

■

Некомутативність обчислення добутку кватерніонів тягне два способи обчислення частки кватерніонів. *Лівою часткою* від ділення кватерніона q_2 на кватерніон q_1 називається розв'язок рівняння $q_1x = q_2$, а правою часткою – розв'язок рівняння $xq_1 = q_2$.

141. *Перевірте, що ліва частка* $x_r = \frac{\bar{q}_1q_2}{|q_1|^2}$, *а права частка* $x_l = \frac{q_2\bar{q}_1}{|q_1|^2}$. *Обчисліть праву та ліву частки від ділення кватерніона* $q_2 = (2, \{1, -1, 2\})$ *на кватерніон* $q_1 = (-1, \{2, -1, 3\})$.

Відповідь. $x_r = \frac{1}{15}(7, \{-4, 2, -9\})$, $x_l = \frac{1}{15}(7, \{-6, 4, -7\})$.

142. *Нехай* $\mathbf{p}$ *– одиничний вектор, колінеарний до прямої* l *(осі), що проходить через початок координат. Позначимо через* q *одиничний кватерніон*

$$q = (\cos\alpha, \sin\alpha\, \mathbf{p}).$$

Тоді перетворення

$$\Omega_{\alpha,\mathbf{p}} : (0, \mathbf{v}) \to q(0, \mathbf{v})\bar{q} \tag{3.7}$$

є перетворенням правого обертання простору навколо осі l *на кут* $\varphi = 2\alpha$ *у додатному напрямку відносно напрямку осі* $\mathbf{p}$ *(з кінця вектора* $\mathbf{p}$ *поворот спостерігається проти годинникової стрілки).*

Розв'язок. Позначимо через $\mathbf{v}$ радіус-вектор довільної точки простору. Розкладемо $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\perp} + \lambda\mathbf{p}$ на складові, перша з яких перпендикулярна до $\mathbf{p}$, а інша – колінеарна до $\mathbf{p}$. Під дією перетворення (3.7) колінеарна складова лишається незмінною. Дійсно

$$(0, \lambda\, \mathbf{p})\bar{q} = (0, \lambda\, \mathbf{p})(\cos\alpha, -\sin\alpha\, \mathbf{p}) = (\lambda\sin\alpha, \lambda\cos\alpha\, \mathbf{p}),$$

$$q(0, \lambda\mathbf{p})\bar{q} = (\cos\alpha, \sin\alpha\, \mathbf{p})(\lambda\sin\alpha, \lambda\cos\alpha\, \mathbf{p}) = (0, \lambda(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\mathbf{p}) = (0, \lambda\, \mathbf{p}).$$

Для нормальної складової маємо

$$(0,\mathbf{v}^{\perp})\bar{q}=(0,\mathbf{v}^{\perp})(\cos\alpha,-\sin\alpha\,\mathbf{p})=(0,\cos\alpha\mathbf{v}^{\perp}-\sin\alpha[\mathbf{v}^{\perp},\mathbf{p}]),$$

$$\begin{aligned}q(0,\mathbf{v}^{\perp})\bar{q}&=(\cos\alpha,\sin\alpha\,\mathbf{p})(0,\cos\alpha\mathbf{v}^{\perp}-\sin\alpha[\mathbf{v}^{\perp},\mathbf{p}])=\\&(0,\cos^2\alpha\mathbf{v}^{\perp}-\cos\alpha\sin\alpha[\mathbf{v}^{\perp},\mathbf{p}]+\sin\alpha[\mathbf{p},\cos\alpha\mathbf{v}^{\perp}-\sin\alpha[\mathbf{v}^{\perp},\mathbf{p}]])=\\&(0,\cos^2\alpha\mathbf{v}^{\perp}+2\cos\alpha\sin\alpha[\mathbf{p},\mathbf{v}^{\perp}]-\sin^2\alpha([\mathbf{p},[\mathbf{v}^{\perp},\mathbf{p}]])=\\&(0,\cos^2\alpha\mathbf{v}^{\perp}+2\cos\alpha\sin\alpha[\mathbf{p},\mathbf{v}^{\perp}]-\sin^2\alpha\mathbf{v}^{\perp})=\\&(0,\cos(2\alpha)\mathbf{v}^{\perp}+\sin(2\alpha)[\mathbf{p},\mathbf{v}^{\perp}])=(0,\cos\varphi\mathbf{v}^{\perp}+\sin\varphi[\mathbf{p},\mathbf{v}^{\perp}]).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Отже, під дією перетворення (3.7) ортогональна складова вектора $\mathbf{v}$ переходить у вектор, що лежить в площині, яка ортогональна до вектора $\mathbf{p}$, і утворює кут $\varphi=2\alpha$ з початковим положенням цієї складової у напрямку від $\mathbf{v}^{\perp}$ до $[\mathbf{p},\mathbf{v}^{\perp}]$.

■

143. *Нехай $\Omega_{\alpha_1,\mathbf{p}_1}$, $\Omega_{\alpha_2,\mathbf{p}_2},\ldots,\Omega_{\alpha_n,\mathbf{p}_n}$ – послідовність обертань простору навколо осей $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$ на кути $2\alpha_1,2\alpha_2\ldots,2\alpha_n$, відповідно. Композиція обертань*

$$\Omega_{\alpha_n,\mathbf{p}_n}\circ\Omega_{\alpha_{n-1},\mathbf{p}_{n-1}}\circ\cdots\circ\Omega_{\alpha_1,\mathbf{p}_1}$$

еквівалентна одному обертанню на певний кут навколо певної осі.

Підказка. Доведення індуктивне. Для двох обертань маємо

$$\Omega_{\alpha_2,\mathbf{p}_2}\circ\Omega_{\alpha_1,\mathbf{p}_1}=q_2(q_1(0,\mathbf{v})\bar{q}_1)\bar{q}_2=(q_2q_1)(0,\mathbf{v})(\overline{q_2q_1})=q(0,\mathbf{v})\bar{q},$$

де $q=q_2q_1$. Нехай $q=(a,\mathbf{w})$. Оскільки $|q|=1$, то $a^2+|\mathbf{w}|^2=1$, і можемо покласти $a=\cos\theta$, $|\mathbf{w}|=\sin\theta$. Позначимо $\mathbf{p}=\mathbf{w}/|\mathbf{w}|$. Тоді кватерніон $(\cos\theta,\sin\theta\,\mathbf{p})$ визначає обертання на кут 2θ навколо осі $\mathbf{p}$, що еквівалентне композиції двох обертань. Продовжіть індукцію.

144. *Знайти вісь і кут повороту, що є результатом виконання двох послідовних поворотів: спочатку на кут $\pi/2$ навколо осі Ox, а потім на кут $\pi/2$ нвавколо осі Oy.*

Підказка. Першому повороту відповідає кватерніон $q_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\big(1+\mathbf{i}\big)$, а другому – кватерніон $q_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\big(1+\mathbf{j}\big)$. Добуток $q_2q_1=\frac{1}{2}\big(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\big)=\cos(\pi/3)+\sin(\pi/3)\big(\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\big)$. Отже, результуюча вісь повороту $\mathbf{p}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$, а кут повороту $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

145. *Знайти вісь і кут повороту, що є результатом виконання двох послідовних поворотів: спочатку на кут $\pi/3$ навколо осі з напрямним вектором $\{1,1,0\}$, а потім на кут $\pi/3$ навколо осі з напрямним вектором $\{1,-1,0\}$.*

Відповідь. Вісь повороту має напрямок $\mathbf{p} \upuparrows \{\sqrt{6}, 0, 1\}$; кут повороту $\varphi = 2\arccos(3/4)$.

146. *Координатні вирази для обертання навколо осей координат на кут φ мають наступний вигляд*

$$\Omega_1(\varphi): \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{– обертання навколо осі } Ox;$$

$$\Omega_2(\varphi): \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{– обертання навколо осі } Oy;$$

$$\Omega_3(\varphi): \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y\,. \\ z \end{pmatrix} \quad \text{– обертання навколо осі } Oz$$

Підказка. Для опису обертання навколо осі Ox маємо $\mathbf{v} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{p} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{v}^{\perp} = \{0, y, z\}$. Розкладання вектора $\mathbf{v}$ має вигляд $\mathbf{v} = x\mathbf{p} + \mathbf{v}^{\perp} = \{x, 0, 0\} + \{0, y, z\}$. Проєкція на вісь повороту лишається незмінною, а ортогональна складова перетворюється за формулою (3.8). Отже, $[\mathbf{p}, \mathbf{v}^{\perp}] = \{0, -z, y\}$, і тому за формулою (3.8)

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Розгляд інших обертань аналогічний.

Якщо $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, то його орт

$$\mathbf{e}_a = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,\mathbf{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,\mathbf{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\,\mathbf{k}$$

утворює з осями координат кути

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

що називаються *напрямними косинусами* вектора $\mathbf{a}$.

147. *Перетворення правого обертання на кут φ навколо осі $\mathbf{p}$ з напрямними косинусами $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ має вигляд*

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \omega_{11} &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\varphi, \\ \omega_{22} &= \cos^2\beta + \sin^2\beta\cos\varphi, \\ \omega_{33} &= \cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\varphi, \end{aligned}$$

$$\omega_{12} = \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi,$$
$$\omega_{21} = \cos\beta\cos\alpha(1-\cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi,$$

$$\omega_{13} = \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\beta\sin\varphi,$$
$$\omega_{31} = \cos\gamma\cos\alpha(1-\cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi,$$

$$\omega_{23} = \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\alpha\sin\varphi,$$
$$\omega_{32} = \cos\gamma\cos\beta(1-\cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi.$$

Випишіть звідси перетворення задачі ***146****.*

Підказка. Виконати дії, описані вправою **142**.

Задачі **147** та **70** дають можливість виписати координатні вирази всіх видів рухів простору без спеціалізації систем координат і, тим самим, узагальнити висновки теореми Шаля в просторі.

148. *Знайти перетворення руху з правим обертанням на кут φ навколо осі з напрямком $\mathbf{v} = \{1, -2, 2\}$ і зміщенням уздовж осі на відстань λ.*

Розв'язок. Знайдемо $|\mathbf{v}| = 3$. Обчислимо напрямні косинуси осі:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Отже, $\mathbf{p} = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. За формулами задачі **147**

$$\omega_{11} = \tfrac{1}{9} + \tfrac{8}{9}\cos\varphi, \quad \omega_{22} = \tfrac{4}{9} + \tfrac{5}{9}\cos\varphi, \quad \omega_{33} = \tfrac{4}{9} + \tfrac{5}{9}\cos\varphi,$$
$$\omega_{12} = -\tfrac{2}{9}(1-\cos\varphi) - \tfrac{2}{3}\sin\varphi, \quad \omega_{13} = \tfrac{2}{9}(1-\cos\varphi) - \tfrac{2}{3}\sin\varphi,$$
$$\omega_{21} = -\tfrac{2}{9}(1-\cos\varphi) + \tfrac{2}{3}\sin\varphi, \quad \omega_{23} = -\tfrac{4}{9}(1-\cos\varphi) - \tfrac{1}{3}\sin\varphi,$$
$$\omega_{31} = \tfrac{2}{9}(1-\cos\varphi) + \tfrac{2}{3}\sin\varphi, \qquad \omega_{32} = -\tfrac{4}{9}(1-\cos\varphi) + \tfrac{1}{3}\sin\varphi.$$

Отже, шуканим перетворенням є перетворення

$$\tilde{x} = \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{8}{9}\cos\varphi\right)x - \left(\tfrac{2}{9}(1+\cos\varphi) + \tfrac{2}{3}\sin\varphi\right)y + \left(\tfrac{2}{9}(1-\cos\varphi) - \tfrac{2}{3}\sin\varphi\right)z + \tfrac{1}{3}\lambda$$
$$\tilde{y} = \left(-\tfrac{2}{9}(1-\cos\varphi) + \tfrac{2}{3}\sin\varphi\right)x + \left(\tfrac{4}{9} + \tfrac{5}{9}\cos\varphi\right)y - \left(\tfrac{4}{9}(1-\cos\varphi) + \tfrac{1}{3}\sin\varphi\right)z - \tfrac{2}{3}\lambda$$
$$\tilde{z} = \left(\tfrac{2}{9}(1-\cos\varphi) + \tfrac{2}{3}\sin\varphi\right)x + \left(-\tfrac{4}{9}(1-\cos\varphi) + \tfrac{1}{3}\sin\varphi\right)y + \left(\tfrac{4}{9} + \tfrac{5}{9}\cos\varphi\right)z + \tfrac{2}{3}\lambda$$

■

Послідовно виконані обертання $\Omega_3(\alpha)$ навколо осі Oz, потім $\Omega_2(\beta)$ навколо *нового* положення осі Oy і потім знову $\Omega_3(\gamma)$ навколо *нового* положення осі Oz описується добутком матриць

$$\Omega_3(\alpha)\Omega_2(\beta)\Omega_3(\gamma) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кути поворотів α, β і γ називаються *кутами Ейлера*. Існує 6 варіантів кутів Ейлера [9], тобто подачі матриці обертання у вигляді добутку матриць виду

$$\Omega_i(\alpha)\Omega_k(\beta)\Omega_i(\gamma) \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k).$$

Окрім того, існує 6 варіантів подачі обертання через обертання навколо трьох *різних* осей [9], тобто матрицею виду

$$\Omega_i(\alpha)\Omega_j(\beta)\Omega_k(\gamma) \quad (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j, i \neq k, j \neq k).$$

Обертання, що описується матрицею

$$\Omega_1(\varphi)\Omega_2(\theta)\Omega_3(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

використовується в авіації і космічній навігації для опису положення літака або космічного корабля, що виконує послідовні обертання на кут нахилу φ, кут тангажу θ і на кут курсу ψ навколо осей, що проходять через його центр ваги і спрямованих відповідно вперед, в бік його правого борту і його дна. Кути φ, θ і ψ називаються *авіаційними кутами*.

3.4 Опуклі множини і задача лінійної оптимізації

Множина M називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох точок $A_1, A_2 \in M$ відрізок $[A_1, A_2] \subset M$. Одноточкова і порожня множини також вважаються опуклими.

Нехай A_1, A_2 – точки з радіус-векторами $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ відповідно. Точки відрізку $[A_1, A_2]$ параметризуються радіус-вектором

$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_1 + t\mathbf{r}_2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Введемо позначення: $\lambda_1 = 1 - t,\ \lambda_2 = t$. Тоді точки відрізка $[A_1, A_2]$ подаються у вигляді *опуклої комбінації* своїх кінцевих точок, тобто

$$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2, \quad \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{3.9}$$

149. *Якщо M_2 і M_2 опуклі множини, то $M_1 \cap M_2$ – опукла множина. Довести, що перетин будь-якої сукупності опуклих множин є опуклою множиною.*

Нехай $l : Ax + By + C = 0$ пряма на площині. Тоді півплощини $l_+ = \big\{(x, y)\,|\,Ax + By + C > 0\big\}$ і $l_- = \big\{(x, y)\,|\,Ax + By + C < 0\big\}$ називаються *відкритими півплощинами*, а півплощини $\bar{l}_+ = \big\{(x, y)\,|\,Ax + By + C \geq 0\big\}$ і $\bar{l}_- = \big\{(x, y)\,|\,Ax + By + C \leq 0\big\}$ називаються замкненими півплощинами.

150. *Перевірте, що відкрита (замкнена) півплошина є опуклою множиною.*

Замкненим (відкритим) опуклим *багатокутником* називається перетин скінченної кількості замкнених (відкритих) півплощин. *Вершиною* замкненого багатокутника називається точка перетину непаралельних прямих, що визначають багатокутник. Кількість вершин визначає тип багатокутника (1-кутник, 2-кутник, 3-кутник ...). Відрізки прямих між вершинами називаються *сторонами.* Багатокутник називається *обмеженим*, якщо він міститься в крузі достатньо великого скінченного радіуса. Замкнений і обмежений багатокутник називається *компактним.*

151. *Покажіть, що відкритий (замкнений) опуклий багатокутник є опуклою множиною.*

Нехай $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ площина в просторі. Тоді півпростори $\Pi_+ = \big\{(x,y,z) \,|\, Ax+By+Cz+D > 0\big\}$ і $\Pi_- = \big\{(x,y,z) \,|\, Ax+By+Cz+D < 0\big\}$ називаються відкритими, а півпростори $\bar{\Pi}_+ = \big\{(x,y,z) \,|\, Ax+By+Cz+D \geq 0\big\}$ і $\bar{\Pi}_- = \big\{(x,y,z) \,|\, Ax + By + Cz + D \leq 0\big\}$ називаються замкненими.

152. *Покажіть, що відкритий (замкнений) півпростір є опуклою множиною.*

Замкненим (відкритим) опуклим *багатогранником* називається перетин скінченної кількості замкнених (відкритих) півпросторів. Ребром багатокутника називається перетин непаралельних площин, що визначають багатогранник. *Вершиною* замкненого багатогранника називається точка перетину його ребер. Багатогранник називається *обмеженим*, якщо він міститься в кулі достатньо великого скінченного радіусу. Замкнений і обмежений багатогранникназтивається *компактним.*

153. *Покажіть, що замкнений (відкритий) опуклий багатогранник є опуклою множиною.*

Опуклою оболонкою множини M називається перетин всіх опуклих множин, що містять множину M. Іншими словами, опукла оболонка – це найменша опукла множина, що містить M. Опукла оболонка позначається як $conv(M)$.

Конусом $C_A(M)$ з вершиною в точці A і основою M називається об'єднання усіх відрізків, що з'єднують точку A із точками множини M. Отже,

$$C_A(M) = \bigcup_{B \in M} [A, B].$$

154. *Якщо M – опукла множина, то $C_A(M)$ – опукла множина. Якщо $A \notin M$, то $conv(M \cup \{A\}) = C_A(M)$. Довести.*

155. *Нехай $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ скінченний набір точок. Тоді $conv(M)$ – це множина точок, радіус-вектор яких має вигляд:*

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{r}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Підказка. Скористатися методом математичної індукції.

Опукла оболонка скінченної кількості точок має *механічне тлумачення.* Якщо $A_1(\mathbf{r}_1), \dots, A_n(\mathbf{r}_n)$ точки, у яких зосереджені маси $m_1, \dots, m_2$, то радіус-вектор $\mathbf{r}_c$ центру мас системи точок має вигляд

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \dots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

156. *Компактний опуклий багатокутник (багатогранник) збігається з опуклою оболонкою своїх вершин.*

Розв'язок. Нехай M – компактний опуклий багатокутик з вершинами в точках $A_1, \dots, A_n$. Багатокутник M є опуклою множиною, що містить точки $A_1, \dots, A_n$, а значить, M містить найменшу опуклу множину, що містить точки $A_1, \dots, A_n$, тобто $M \supset conv(A_1, \dots, A_n)$.

Покажемо, що $M \subset conv(A_1, \dots, A_n)$. Нехай $m \in M$ – довільна точка багатокутника з радіус-вектором $\mathbf{r}(m)$. Позначимо через $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ радіус-вектори вершин багатокутника. Якщо m лежить на стороні багатокутника, наприклад $m \in [A_i, A_i + 1]$, то за формулою (3.9) $\mathbf{r}(m)$ є опуклою комбінацією точок A_i та A_{i+1}, тобто $m \in conv(A_i, A_{i+1}) \subset conv(A_1, \dots, A_n)$. Якщо ж m не лежить на стороні, то через точку m проведемо довільну пряму $l(m)$. З обмеженості і опуклості багатокутника випливає, що пряма $l(m)$ перетне рівно дві сторони багатокутника в точках, скажімо, $m_i \in [A_i, A_{i+1}]$ та $m_k \in [A_k, A_{k+1}]$. Оскільки $m \in [m_i, m_k]$, то за формулою (3.9)

$$\mathbf{r}(m) = \lambda_1\mathbf{r}(m_i) + \lambda_2\mathbf{r}(m_k) \quad (\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1).$$

За тією ж формулою

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(m_i) = \mu_1\mathbf{r}_i + \mu_2\mathbf{r}_{i+1}, && \mathbf{r}(m_k) = \nu_1\mathbf{r}_k + \nu_2\mathbf{r}_{k+1}, \\ &\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_1 + \mu_2 = 1, && \nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0, \nu_1 + \nu_2 = 1. \end{aligned}$$

Як наслідок,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(m) &= \lambda_1(\mu_1\mathbf{r}_i + \mu_2\mathbf{r}_{i+1}) + \lambda_2(\nu_1\mathbf{r}_k + \nu_2\mathbf{r}_{k+1}) = \\ &\lambda_1\mu_1\mathbf{r}_i + \lambda_1\mu_2\mathbf{r}_{i+1} + \lambda_2\nu_1\mathbf{r}_k + \lambda_2\nu_2\mathbf{r}_{k+1} = d_1\mathbf{r}_i + d_2\mathbf{r}_{i+1} + d_3\mathbf{r}_k + d_4\mathbf{r}_{k+1}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, d_4 \geq 0$, а також що

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = \lambda_1(\mu_1 + \mu_2) + \lambda_2(\nu_1 + \nu_2) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Отже, $m \in conv(A_i, A_{i+1}, A_k, A_{k+1}) \subset conv(A_1, \dots, A_n)$, а значить, $M \subset conv(A_1, \dots, A_n)$. Таким чином, $M = conv(A_1, \dots, A_n)$.

Доведіть твердження для багатогранника, використавши доведення для багатокутника як базу для індукції.

■

Функція $f : I\!R^n \to I\!R$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ називається лінійною, якщо

$$f(\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{r}_m) = \lambda_1 f(\mathbf{r}_1) + \ldots + \lambda_m f(\mathbf{r}_m),$$

для будь-яких точок з $I\!R^n$ з радіус-векторами $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$.

157. *(а) Функція $f : I\!R^2 \to I\!R$, яка задається формулою $f(x, y) = Ax + By$, є лінійною;*

(б) Функція $f : I\!R^3 \to I\!R$, яка задається формулою $f(x, y, z) = Ax+By+Cz$, є лінійною.

Розв'язок. (а) Нехай $\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1\}, \ldots, \mathbf{r}_m = \{x_m, y_m\}$. Тоді

$$\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{r}_m = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m, \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m\}.$$

Значить,

$$f(\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{r}_m) = A(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) + B(\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m) = \\ \lambda_1(Ax_1 + By_1) + \ldots + \lambda_m(Ax_m + By_m) = \lambda_1 f(\mathbf{r}_1) + \ldots + \lambda_m f(\mathbf{r}_m).$$

(б) Перевіряється аналогічно.

■

158. *Нехай $f : I\!R^2 \to I\!R$ – лінійна функція і M – компактний опуклий багатокутник з вершинами в точках $A_1, \ldots, A_m$. Довести, що найбільше і найменше значення функції f досягається в його вершинах, тобто*

$$\max f|_M = \max_{i=1,\ldots,m} f(A_i), \quad \min f|_M = \min_{i=1,\ldots,m} f(A_i).$$

Розв'язок. Із задач **156** та **155** і лінійності функції випливає, що для будь-якої точки з радіус-вектором $\mathbf{r}$ багатокутника

$$f(\mathbf{r}) = \lambda_1 f(\mathbf{r}_1) + \ldots + \lambda_m f(\mathbf{r}_m) \leq \max_{i=1,\ldots,m} f(A_i) \underbrace{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)}_{=1} = \max_{i=1,\ldots,m} f(A_i),$$

$$f(\mathbf{r}) = \lambda_1 f(\mathbf{r}_1) + \ldots + \lambda_m f(\mathbf{r}_m) \geq \min_{i=1,\ldots,m} f(A_i) \underbrace{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)}_{=1} = \min_{i=1,\ldots,m} f(A_i),$$

що й треба було довести.

■

159. *Нехай $f : I\!R^3 \to I\!R$ – лінійна функція і M – компактний опуклий багатогранник з вершинами в точках $A_1, \ldots, A_m$. Тоді найбільше і найменше значення функції f досягається в його вершинах, тобто*

$$\max f|_M = \max_{i=1,\ldots,m} f(A_i), \quad \min f|_M = \min_{i=1,\ldots,m} f(A_i).$$

Довести.

Задача лінійної оптимізації полягає у відшуканні максимуму або мінімуму лінійної функції на опуклому багатокутнику (багатограннику). Розв'язання цієї задачі забезпечується результатами задач **158** та **159**. Як приклад розглянемо задачу на змішування.

160. *У денному раціоні харчування повинні бути присутніми вітаміни типу $A \geq 10$ одиниць, типу $B \leq 12$ одиниць і типу $C \geq 8$ одиниць. У наявності мається два типи продуктів різної якості:*

- *Перший тип продукту містить: A – 1 одиницю, B – 2 одиниці, C – 4 одиниці;*
- *Другий тип містить: A – 4 одиниці, B – 2 одиниці, C – 1 одиницю.*

Ціна першого типу – 5 гривень за грам, другого – 2 гривні. Скільки і яких продуктів варто ужити, щоб забезпечити раціон і мати найменші витрати.

Розв'язок. Нехай x – кількість грамів продукту першого типу, y – кількість грамів продукту другого типу в раціоні. Такий раціон містить $x(A+2B+4C)+y(4A+2B+C) = A(x+4y)+B(2x+2y)+C(4x+y)$ одиниць відповідних вітамінів. Для забезпечення вітамінами в потрібній кількості слід накласти умови:

$$\begin{cases} x + 4y \geq 10; \\ 2x + 2y \leq 12; \\ 4x + y \geq 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Функція витрат $L(x, y) = 5x+2y$ є лінійною. Таким чином, необхідно знайти мінімум *лінійної* функції $L(x, y)$ при заданих умовах типу нерівностей, тобто на опуклій множині (рис. 3.17). Задача звужується до перебору значень функції в кутових точках. А саме,

$$L(14/3, 4/3) = 26; \quad L(22/15, 32/15) = 11.6; \quad L(2/3, 16/3) = 14.$$

Отже, оптимальний план: $x = \frac{22}{15} \approx 1.47, y = \frac{32}{15} \approx 2.1$.

■

161. *Знайти значення змінних (x, y), за яких функція $L(x, y) = 3x + 4y$ приймає найбільше та найменше значення за умов, що*

$$\begin{cases} -x + y \leq 3, \\ 5x + 3y \leq 97, \\ x + 7y \geq 74, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь. Максимум: $(x, y) = (11, 14)$, $L_{max} = 89$.
Мінімум: $(x, y) = (6.625, 9.625)$, $L_{min} = 58.375$.

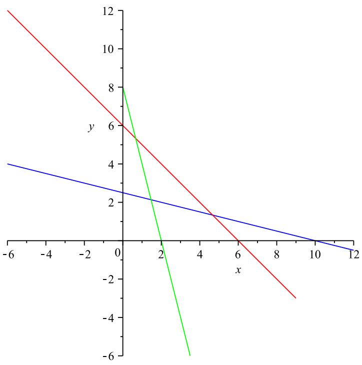

Рис. 3.17: Опукла множина – трикутник, що утворений прямими $x+y-10=0$, $2x+2y-12=0$, $4x+y-8=0$

162. *Знайти значення змінних* (x, y), *за яких функція* $L(x, y) = 5y$ *приймає найбільше та найменше значення за умов, що*

$$\begin{cases} 7x + 12y \leq 84, \\ 35x - 12y \geq 0, \\ 7x - 6y \leq 42, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь. Максимум: $(x, y) = (2, 5\frac{5}{6})$, $L_{max} = 29\frac{1}{6}$. Мінімум: $(x, y) = (6\lambda, 0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $L_{min} = 0$.

163. *Знайти значення змінних* (x, y), *за яких функція* $L(x, y) = 5.2x - y$ *приймає найбільше та найменше значення за умов, що*

$$\begin{cases} 2x + 5y \geq 10, \\ x - 3y \leq 3, \\ -x + y \leq 1, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь. Максимум: $L_{max} = +\infty$. Мінімум: $(x, y) = (5/7, 12/7)$, $L_{min} = 2$.

Поняття і задачі поточного розділу мають далекосяжні узагальнення (див., наприклад, [11], [2]).

Розділ 4

Елементи багатовимірної аналітичної геометрії

Поняття прямої і площини тривимірного простору та позиційно-метричні задачі щодо їх взаємного розташування мають природні узагальнення на випадок простору вимірності $n \geq 4$. *Для розуміння багатовимірної геометрії слід раз по раз звертатися до попередніх розділів для порівняння ідей і методів багатовимірної геометрії з відповідними тривимірними аналогами.*

Афінним простором називається пара $\mathcal{A} = (\mathbb{P}, \mathcal{V})$, де $\mathbb{P}$ – точкова множина, $\mathcal{V}$ – векторний простір. Множина і векторний простір пов'язані відображенням $\varphi : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathcal{V}$, яке ставить у відповідність кожній упорядкованій парі точок $(A, B) \in \mathbb{P}$ вектор з $\mathcal{V}$, що позначається $\overrightarrow{AB}$. Точка A вважається початком вектора $\overrightarrow{AB}$, а точка B – його кінцем. Відображення φ має задовольняти умовам:

- для будь-якої точки $A \in \mathbb{P}$ будь-якого вектора $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ існує єдина точка $B \in \mathbb{P}$ така, що $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ (правило відкладання довільного вектора від довільної точки);
- для будь-яких трьох точок $A, B, C \in \mathbb{P}$ виконується співвідношення
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
(правило трикутника додавання векторів).

Вимірністю афінного простору $\mathcal{A}$ називається вимірність векторного простору $\mathcal{V}$. У подальших розглядах під афінним простором $\mathcal{A}^n$ слід розуміти пару $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$. Множина $\mathbb{R}^n$ є множиною наборів з n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$. Векторний простір $\mathcal{R}^n$ також складається із наборів з n чисел $\{x_1, \ldots, x_n\}$, але на яких визначені операції покоординатного додавання і множення на число, що задовольняють аксіомам векторного простору. Якщо $A(x_1, \ldots, x_n)$ і $B(y_1, \ldots, y_n)$, то
$$\varphi(A, B) = \{y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n\}.$$

Афінна система координат складається з точки $O \in \mathbb{R}^n$ і базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathcal{R}^n$, відкладеного від точки O. Радіус-вектором точки $M \in \mathbb{R}^n$ називається вектор $\overrightarrow{OM} \in \mathcal{R}^n$.

Нехай у афінному просторі $\mathcal{A}^n$ зафіксована точка M_0, радіус-вектор якої $\mathbf{r}_0$. І нехай задані k лінійно незалежних векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. *Афінною k-вимірною площиною* π^k в афінному просторі $\mathcal{A}^n$ називається множина точок у $\mathcal{A}^n$, радіус-вектор яких (відносно заданої афінної системи координат) задається рівністю

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^1\mathbf{a}_1 + t^2\mathbf{a}_2 + \cdots + t^k\mathbf{a}_k.$$

Точка M_0 називається *початковою точкою площини* π^k, а векторний простір L^k з базисом $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ називається *напрямним простором* площини π^k.

Якщо $k = 1$, то 1-вимірна афінна площина називається *афінною прямою* в $\mathcal{A}^n$. Якщо $k = n - 1$, то така площина називається *гіперплощиною* в $\mathcal{A}^n$. Так, $\pi^2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^1\mathbf{a}_1 + t^2\mathbf{a}_2$ є гіперплощиною в $\mathcal{A}^3$, а $\pi^1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t^1\mathbf{a}_1$ є гіперплощиною в $\mathcal{A}^2$. Ясно, що π^1 є в той же час і афінною прямою.

164. *Покажіть, що рівняння гіперплощини в афінному просторі $\mathcal{A}^n$ може бути записане у вигляді*

$$\pi^{n-1} : A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n + D = 0.$$

Вектор $\mathbf{N} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ називається вектором афінної нормалі гіперплощини π^{n-1}.

165. *Покажіть, що для прямої в A^n з початковою точкою $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ і напрямним вектором $\mathbf{a} = \left\{a^1, \ldots, a^n\right\}$ можна виписати її канонічне рівняння у вигляді*

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \cdots = \frac{x^n - x_0^n}{a^n}.$$

166. *Нехай*

$$\pi_1^{n-1} : A_1^1x^1 + A_2^1x^2 + \cdots + A_n^1x^n + D^1 = 0,$$

$$\pi_2^{n-1} : A_1^2x^1 + A_2^2x^2 + \cdots + A_n^2x^n + D^2 = 0$$

дві гіперплощини в $\mathcal{A}^n$. Нехай $\mathbf{N}_1 = \{A_1^1, \ldots, A_n^1\}$ і $\mathbf{N}_2 = \{A_1^2, \ldots, A_n^2\}$ їх афінні нормалі. Покажіть, що

- $\pi_1^{n-1} \cap \pi_2^{n-1} = \pi^{n-2}$, *якщо* $\mathbf{N}_1 \neq \lambda\mathbf{N}_2$;
- $\pi_1 \parallel \pi_2$, *якщо* $\mathbf{N}_1 = \lambda\mathbf{N}_2$ *і* $D^1 \neq \lambda D^2$;
- $\pi_1 = \pi_2$ *якщо* $\mathbf{N}_1 = \lambda\mathbf{N}_2$ *і* $D^1 = \lambda D^2$.

Нехай L^n – векторний простір. Підмножина $\tilde{L} \subset L^n$ називається *підпростором* у L^n, якщо $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \widetilde{L}$ для будь-яких $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \widetilde{L}$ і будь-яких λ, μ.

Нехай $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ – система векторів у L^n. *Лінійною оболонкою* $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ даної системи називається підмножина векторів у L^n виду

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \mathbf{a}_i \;\middle|\; \lambda^i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Іншими словами, лінійна оболонка – це множина усіх лінійних комбінацій заданої системи векторів.

Підмножина $\mathcal{V} \subset L^n$ називається *підпростором* в L^n, якщо будь-яка лінійна комбінація векторів з $\mathcal{V}$ лежить в $\mathcal{V}$.

167. *Перевірте, що* $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ $(k \leq n)$ *є підпростором у* L^n. *Його вимірність*

$$\dim Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) \leq k.$$

При цьому $\dim Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = k$ *тоді і тільки тоді, коли вектори* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ *лінійно незалежні, а значить,* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ *– один з базисів* $L^k = Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Розв'язок. Дійсно, нехай $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Тоді

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} x^i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} y^i \mathbf{a}_i, \quad \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda x^i + \mu y^i)\mathbf{a}_i \in Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k),$$

а значить, $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ – векторний підпростір у L^n.

Розкладемо вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ за деяким базисом в L^n. Тоді

$$\mathbf{a}_1 = \{a_1^1, \ldots, a_1^n\}, \quad \ldots \quad \mathbf{a}_k = \{a_k^1, \ldots, a_k^n\}.$$

Лінійними операціями над векторами називаються операції додавання і множення на число. Лінійним операціям над векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ відповідають лінійні операції над стовпчиками $n \times k$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_k^n \end{pmatrix}.$$

Рангом матриці, що позначається $rg(\cdot)$, називається максимальне число її лінійно незалежних стовпців[1]. З означень випливає, що ранг матриці дорівнює вимірності підпростору $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Оскільки $k \leq n$, то $rg\,(A) \leq k$. Якщо $rg\,(A) = k$, то всі стовпчики матриці A лінійно незалежні, а вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ утворюють один з базисів $L^k = Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

■

Нехай L^k і L^l – два підпростори в L^n. *Сумою підпросторів* L^k і L^l називається множина векторів у L^n виду

$$\left\{x + y \;\middle|\; x \in L^k,\, y \in L^l\right\} := L^k + L^l.$$

168. *Перевірте, що* $L^k + L^l$ *є підпростором в* L^n.

[1] Такий ранг називається стовпчиковим. Аналогічний ранг визначається для лінійних операцій над рядками, і він називається рядковим. Стовпчиковий і рядковий ранги однакові [8], [4].

Очевидно, що $\dim(L^k + L^l) \leq k + l$. Якщо $\dim(L^k + L^l) = k + l$, то сума називається *прямою* і позначається $L^k \oplus L^l$. Якщо сума пряма, то вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ утворюють базис у $L^k \oplus L^l$.

169. *Якщо $L^k \oplus L^l$ – пряма сума, то для кожного $z \in L^k \oplus L^l$ розкладання $z = x + y$, де $x \in L^k$, $y \in L^l$, єдине (тобто x і y однозначно визначені). Справедливе і обернене.*

Перетином підпросторів L^k і L^l називається множина векторів в L^n, що належать обом підпросторам. Тобто це

$$\left\{\mathbf{x} \in L^n | \, \mathbf{x} \in L^k, \, \mathbf{x} \in L^l\right\} := L^k \cap L^l.$$

170. *Перевірте, що $L^k \cap L^l$ є підпростором у L^n.*

171. *Нехай $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ – лінійно незалежна система векторів у L^k $(m < k)$. Тоді її можна доповнити до базису L^k. Тобто знайдуться такі вектори $\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_k$, що система векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m; \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_k$ є базисом в L^k.*

Розв'язок. Нехай $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ – лінійно незалежні. Тоді $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ є підпростором у L^k. Позначимо його через L^m. Якщо $L^m \neq L^k$, то існує $\mathbf{x} \in L^k$ такий, що $\mathbf{x} \notin L^m$, тобто $\mathbf{x} \notin Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$. В такому разі $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{x}$ лінійно незалежні. Покладемо $\mathbf{b}_{m+1} = \mathbf{x}$. Тоді $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_{m+1}) = L^{m+1} \subseteq L^k$. Якщо $L^{m+1} \neq L^k$, то продовжимо процес. У результаті побудуємо вичерпний ланцюжок підпросторів

$$L^m \subset L^{m+1} \subset \ldots \subset L^k.$$

На останньому кроці одержимо $L^k = Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_k)$.

■

172. *(**Формула Грасмана**) Нехай L^k і L^l – підпростори в L^n. Тоді*

$$\dim(L^k + L^l) = \dim L^k + \dim L^l - \dim(L^k \cap L^l).$$

Розв'язок. Позначимо $L^m = L^k \cap L^l$. Нехай $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m$ – базис L^m. Доповнимо його до базисів у L^k і L^l. Нехай

$$L^k = Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k), \quad L^l = Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l).$$

Покажемо, що $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l$ – базис $L^k + L^l$. Для цього слід перевірити, що

(а) будь-який вектор з $L^k + L^l$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l$;

(б) вектори $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l$ лінійно незалежні.

(а) Нехай $\mathbf{z} \in L^k + L^l$. Тоді $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, де $\mathbf{x} \in L^k, \mathbf{y} \in L^l$. Оскільки $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис у L^k, то

$$\mathbf{x} = \mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k).$$

Аналогічно,

$$\mathbf{y} = \mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+1}).$$

Отже,

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l).$$

(б) Нехай існує *нетривіальна* лінійна комбінація

$$\mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{0}.$$

Розіб'ємо її на дві частини:

$$\mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k) + \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{0}.$$

Зауважимо, що $\mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l)$ *нетривіальна*, оскільки в протилежному випадку $\mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k)$ була б *нетривіальною* і такою що дорівнює $\mathbf{0}$, а це суперечить тому, що $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис L^k. Покладемо

$$\mathbf{w} = \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l) \neq \mathbf{0}.$$

Тоді, з одного боку, $\mathbf{w} \in L^l$ як лінійна комбінація векторів базису L^l. З іншого боку,

$$\mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k) = -\mathbf{w},$$

а значить, $\mathbf{w} \in L^k$ як лінійна комбінація векторів базису L^k. Це означає, що $\mathbf{w} \in L^k \cap L^l$. Але вектори $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m$ утворюють базис $L^k \cap L^l$. А значить,

$$\mathbf{w} = \mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m),$$

причому лінійна комбінація в правій частині нетривіальна ($\mathbf{w} \neq 0$). Таким чином, маємо дві *нетривіальні* лінійні комбінації, що виражають вектор $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l), \quad \mathbf{w} = \mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m).$$

Отже, має місце рівність $\mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) = \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l)$ або $\mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) - \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{0}$. З огляду на те, що $\mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l)$ була нетривіальною, ми одержали *нетривіальну*

$$\mathrm{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{0},$$

що неможливо, тому що $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l$ – базис L^l.

$\blacksquare$

4.1 Взаємне розташування двох площин у A^n

Нехай $\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \sum_{i=1}^k t^i \mathbf{a}_i$ – k-вимірна площина в A^n. Це означає, що рівняння площини π^k можна записати у вигляді $\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ або, ще коротше, $\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + L^k$. Підпростір $L^k = Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ називається *напрямним підпростором* площини π^k.

Нехай $\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + L^k, \quad \pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + L^l$ дві площини в A^n, причому $k \le l$. Площини π^k і π^l називаються *паралельними* ($\pi^k \parallel \pi^l$), якщо $L^k \subseteq L^l$.

173. *Нехай $\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + L^k, \quad \pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + L^l \quad (k \le l)$ дві паралельні площини у A^n. Покладемо $\mathbf{w} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Тоді*

- *якщо $\mathbf{w} \notin L^l$, то $\pi^k \cap \pi^l = \varnothing$;*
- *якщо $\mathbf{w} \in L^l$, то $\pi^k \subseteq \pi^l$.*

Розв'язок. Нехай $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ – базис L^k. Оскільки $L^k \subseteq L^l$, то базис $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ можна доповнити векторами $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l$ до базису в L^l. Тоді

$$\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k), \quad \pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l).$$

Розглянемо випадок $\mathbf{w} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \notin L^l$ і припустимо, що $\pi^k \cap \pi^l \ne \varnothing$. Нехай $M \in \pi^k \cap \pi^l$. Тоді

$$\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k), \quad \mathbf{r}(M) = \mathbf{r}_2 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l),$$

а значить,

$$\mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \mathbf{r}_2 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l).$$

Звідси $\mathbf{w} = \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l) \in L^l$, а це суперечність.

Розглянемо випадок $\mathbf{w} \in L^l$. Це означає, що $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l)$. Тоді $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) + \text{l.c.}(\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l)$, і рівняння площин можна подати як

$$\begin{aligned} &\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k), \\ &\pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l). \end{aligned}$$

Покладемо $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$. З лінійної оболонки $Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ в рівнянні π^k виокремимо знайдену $\text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$. Тоді рівняння площин можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} &\pi^k\colon \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)}_{\mathbf{r}_0} + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k), \\ &\pi^l\colon \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)}_{\mathbf{r}_0} + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k), \\ &\pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) + Lin(\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l). \end{aligned}$$

Тепер очевидно, що $\pi^k \subset \pi^l$, тому що π^k можна одержати з рівняння π^l, поклавши нулями всі коефіцієнти при $\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l$.

■

Дві площини π^k і π^l у A^n називаються *мимобіжними*, якщо вони не перетинаються і не паралельні.

174. *Нехай* $\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + L^l, \quad \pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + L^l \quad (k \le l)$ *дві непаралельні площини в* A^n. *Покладемо*

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad L^m = L^k \cap L^l, \quad L^s = L^k + L^l.$$

Тоді

- *якщо* $\mathbf{w} \notin L^s$, *то площини мимобіжні;*
- *якщо* $\mathbf{w} \in L^s$, *то* $\pi^k \cap \pi^l = \pi^m$ *(тобто площини перетинаються по площині вимірності* m*).*

Розв'язок. *Якщо* $\pi^k \nparallel \pi^l$, *то існують площини* p_1^s *і* p_2^s *такі, що* $p_1^s \supset \pi^k$, $p_2^s \supset \pi^l$, $p_1^s \parallel p_2^s$. Дійсно, нехай $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ – базис L^m. Доповнимо $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ до базисів $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k$ у L^k і $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l$ в L^l.

Тоді $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l$ – базис у $L^s = L^k + L^s$.

Розглянемо дві площини

$$p_1^s\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{r}_1 + L^s,$$

$$p_2^s\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{r}_2 + L^s.$$

Очевидно, що $p_1^s \parallel p_2^s$ (напрямні простори збігаються). При цьому $p_1^s \supset \pi^k$, оскільки

$$p_1^s\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k) + Lin(\mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l),$$

а значить, π^k дійсно є підмножиною p_1^s, що задається тривіальною лінійною комбінацією векторів $\mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l$. Аналогічно, $p_2^s \supset \pi^l$.

Якщо $\mathbf{w} \notin L^s$, то $p_1^s \parallel p_2^s$ і $p_1^s \cap p_2^s = \varnothing$. Значить, $\pi^k \cap \pi^l = \varnothing$. Якщо ж $\mathbf{w} \in L^s$, то

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l),$$

тобто

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k) + \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l).$$

Тепер рівняння площин можна виписати зі *спільною початковою точкою*

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k).$$

А саме

$$\pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_{m+1}, \dots, \mathbf{a}_k) + Lin(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_l),$$

$$\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k) = \\ \mathbf{r}_1 + \text{l.c.}(\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k) + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k).$$

Більш того, напрямні простори цих площин розщеплюються у вигляді

$$\pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) + Lin(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l),$$
$$\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) + Lin(\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k).$$

Розглянемо площину $\pi^m : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m)$. Зрозуміло, що $\pi^k \supset \pi^m$ і $\pi^l \supset \pi^m$, а значить, $\pi^k \cap \pi^l \supseteq \pi^m$.

Покажемо, що $\pi^k \cap \pi^l \subseteq \pi^m$. Нехай точка $M \in \pi^k \cap \pi^l$. Тоді

$$\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}_0 + \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{A},$$
$$\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}_0 + \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{B},$$

де позначено, відповідно,

$$\mathbf{Q}_1 = \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m),\ \mathbf{A} = \text{l.c.}(\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k) \text{ у першому виразі для } \mathbf{r}(M),$$
$$\mathbf{Q}_2 = \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m),\ \mathbf{B} = \text{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l) \text{ у другому виразі для } \mathbf{r}(M).$$

Віднімаючи, одержимо

$$\mathbf{0} = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 + \mathbf{A} - \mathbf{B} = \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) + \\ \text{l.c.}(\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k) - \text{l.c.}(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l).$$

З лінійної незалежності векторів $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l$ випливає, що лінійні комбінації в правій частині тривіальні. Із цього випливає, що $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$, а також що $\mathbf{A} = \mathbf{0}, \mathbf{B} = \mathbf{0}$. Таки чином, $\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}_0 + \text{l.c.}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) \in \pi^m$, а значить, $\pi^k \cap \pi^l \subseteq \pi^m$.

■

Нехай π^k і π^l – дві площини в A^n. Площина π^k *паралельна порядку* m до площини π^l (позначимо це через $\pi^k \parallel_m \pi^l$), якщо їхні напрямні простори L^k і L^l мають перетин вимірності m. Як приклад, дві площини в тривимірному просторі, що перетинаються по прямій, відповідають випадку $k = 2, l = 2, m = 1$.

Випадок $m = min(k, l)$ відповідає ситуації паралельності площин. Як приклад, площина і паралельна їй пряма відповідають вимірностям $k = 2, l = 1, m = 1$.

Випадок $m = 0$ означає відсутність паралельних напрямків. У такому випадку, якщо $\pi^k \cap \pi^l = \varnothing$, то площини називаються *цілком мимобіжними*. Як приклад, дві мимобіжні прямі в тривимірному просторі відповідають вимірностям $k = 1, l = 1, m = 0$. Якщо ж $\pi^k \cap \pi^l = \{\cdot\}$, то π^k і π^l називаються такими, що перетинаються *трансверсально*. Як приклад, площина і непаралельна їй пряма в тривимірному просторі відповідають вимірностям $k = 2, l = 1, m = 0$. Вони перетинаються трасверсально.

175. *Нехай π^k і π^l – дві m-паралельні площини. Тоді площина π^k містить $(k-m)$-параметричне сімейство площин, паралельних до π^l, а площина π^l містить $(l-m)$-параметричне сімейство площин, паралельних до π^k.*

Розв'язок. Нехай $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m$ – базис перетину $L^k \cap L^l$. Тоді π^l і π^k можуть бути задані у наступний спосіб:

$$\pi^k \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) + Lin(\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k),$$

$$\pi^l \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) + Lin(\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_l).$$

Розглянемо площину π^k. Зафіксуємо довільну лінійну комбінацію $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$, наприклад, $t_0^1\mathbf{a}_{m+1} + \cdots + t_0^{k-m}\mathbf{a}_k$. Тоді в π^k «вирізується» площина, що задається рівнянням

$$\mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{r}_1 + t_0^1\mathbf{a}_{m+1} + \cdots + t_0^{k-m}\mathbf{a}_k}_{\mathbf{r}_0} + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m).$$

Її напрямний простір L^m лежить у L^l, а отже, ця площина паралельна до L^l. Її початкова точка $\mathbf{r}_0$ визначається $(k-m)$ незалежними параметрами $t_0^1, \ldots, t_0^{k-m}$.

■

4.2 Практичний спосіб з'ясування розташування площин у A^n

4.2.1 Геометрична інтерпретація системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему лінійних рівнянь у матричній формі $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$, де A – матриця розміром $m \times n$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ – стовпець невідомих, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$ – стовпець правих частин. Розглянемо матрицю A як таку, що складається з вектор-стовпців

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ можна переписати у вигляді

$$x^1\mathbf{a}_1 + \cdots + x^n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Стає очевидним, що розв'язання системи лінійних рівнянь дає відповідь на питання, *чи належить вектор* $\mathbf{b}$ *до лінійної оболонки заданих векторів* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Якщо розв'язок існує, то вектор $\mathbf{b}$ подається у вигляді лінійної комбінації векторів $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ з коефіцієнтами, що є числами з розв'язку.

У випадку $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ розв'язання дає відповідь на питання, *чи є вектори* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *лінійно залежними.* Якщо немає інших розв'язків, окрім $x^1 = x^2 = \ldots = x^n = 0$, то вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *лінійно незалежні.* Якщо ж існує нетривіальний розв'язок, то вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *лінійно залежні.*

4.2.2 Побудова базису суми підпросторів

Нехай підпростори L^k і L^l задані своїми базисами як лінійні оболонки, а саме

$$L^k = Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k), \quad L^l = Lin(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l).$$

Візьмемо $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ і припустимо, що серед векторів $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ знайдеться вектор $\mathbf{b}_{j_1} \notin Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Утворимо

$$Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{j_1}) \subseteq L^k + L^l.$$

Якщо знайдеться

$$\mathbf{b}_{j_2} \notin Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{j_1}),$$

то утворимо $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}) \subset L^k + L^l$ і т.д. Процес вочевидь закінчується побудовою базису суми просторів. Кількість векторів побудованого базису дасть вимірність суми.

Описаний процес реалізується алгебраїчно в такий спосіб. Нехай

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ \vdots \\ b_1^n \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_2^1 \\ \vdots \\ b_2^n \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{b}_l = \begin{pmatrix} b_l^1 \\ \vdots \\ b_l^n \end{pmatrix}$$

– вектори базисів L^k і L^l відповідно. Сформуємо з їхніх координат (як зі стовпців) матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_k^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_k^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \ldots & b_l^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^n & \ldots & b_l^n \end{pmatrix}.$$

Складемо матрицю

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1^1 & \ldots & a_k^1 & b_1^1 & \ldots & b_l^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_k^n & b_1^n & \ldots & b_l^n \end{array}\right).$$

Послідовне приєднання до стовпців матриці A стовпців матриці B, що на кожному кроці лінійно незалежні від стовпців матриці A і вже приєднаних стовпців матриці B дає в остаточному підсумку максимальну лінійно незалежну систему векторів у сумі просторів $L^k + L^l$, тобто базис в $L^k + L^l$. Максимальна кількість лінійно незалежних стовпців матриці за означенням є *рангом матриці*. Таким чином, $\dim(L^k + L^l) = rg(A|B)$. Описаний спосіб потребує розв'язання на кожному кроці системи лінійних рівнянь. Метод Гауса зведення матриці до ступінчастого виду дозволяє спростити процедуру розв'язання системи з одночасним виділенням базису лінійної оболонки стовпців матриці. По суті, метод Гауса базований на наступному спостереженні.

176. *Нехай* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ *– лінійно незалежна система векторів. Складемо нову систему* $\mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$*, де* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 + \sum_{i=2}^k \mu_i \mathbf{a}_i$*. Тоді* $\mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *також лінійно незалежна система. І навпаки, якщо система* $\mathbf{v}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *лінійно незалежна, то і система векторів* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *лінійно незалежна.*

Іншими словами, додаючи до будь-якого вектора лінійно незалежної системи лінійну комбінацію всіх інших векторів цієї системи, ми отримуємо новий базис лінійної оболонки даної системи векторів. Докладніше про метод Гауса і обчислення рангу через так звані *мінори* матриці можна дізнатися у підручниках з лінійної алгебри (див., наприклад, [4], [8]).

4.2.3 Побудова базису перетину підпросторів

Нехай $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_{j_1}, \ldots, \mathbf{b}_{j_{s-k}}$ базис $L^k + L^l$. Перенумеруємо вектори так, щоб базис $L^k + L^l$ набув вигляду:

$$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{s-k}\}.$$

Тоді $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис L^k, $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{s-k}, \mathbf{b}_{s-k+1} \ldots, \mathbf{b}_l\}$ – базис L^l. Зрозуміло, що

$$\mathbf{b}_{s-k+1}, \ldots, \mathbf{b}_l \in Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{s-k}).$$

Знайдемо відповідні лінійні комбінації як розв'язок $l+k-s := m$ систем лінійних рівнянь. Тоді одержимо:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{b}_{s-k+1} & = & \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{s-k}), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{b}_l & = & \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-1}). \end{array}$$

Розіб'ємо отримані вирази так:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{b}_{s-k+1} - \text{l.c.}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{s-k}) & = & \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{b}_l - \text{l.c.}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-1}) & = & \text{l.c.}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) \end{array}$$

і зауважимо, що ліві частини рівностей лежать у L^l як лінійні комбінації векторів базису L^l, а праві частини лежать у L^k з аналогічної причини. Тому вектори

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_1 := \mathbf{b}_{s-k+1} - \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{s-k}) = \mathrm{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k),\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&\mathbf{q}_m := \mathbf{b}_l - \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{l-1}) = \mathrm{l.c.}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)
\end{aligned}$$

лежать у $L^k \cap L^l$. Покажемо, що $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ – лінійно незалежні. Дійсно,

$$\sum \lambda^i \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \mathbf{b}_{s-k+i} + \mathrm{l.c.}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k-s}) = \mathbf{0}$$

і, отже, $\lambda^i = 0$, тому що $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l$ – базис L^l. Таким чином, $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ – лінійно незалежні, лежать у перетині підпросторів, і їхня кількість дорівнює вимірності перетину. Тому знайдені вектори утворять шуканий базис.

Описаний процес реалізується алгебраїчно в такий спосіб. Складемо матрицю

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc||ccc} a_1^1 & \dots & a_k^1 & b_1^1 & \dots & b_{s-k}^1 & b_{s-k+1}^1 & \dots & b_l^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_k^n & b_1^n & \dots & b_{s-k}^n & b_{s-k+1}^n & \dots & b_l^n \end{array}\right).$$

перші s стовпців якої є векторами базису суми. Для кожного наступного стовпця знайдемо розв'язок системи рівнянь з цим стовпцем як стовпцем правих частин. Якщо для стовпця з номером $s-k+i$ набір чисел $\{\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^k; \mu_i^1, \dots, \mu_i^{s-k}\}$ є розв'язком, а саме,

$$\mathbf{b}_{s-k+1} = \lambda_1^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_1^k \mathbf{a}_k + \mu_1^1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \mu_1^{s-k} \mathbf{b}_{s-k},$$

то вектори базису перетину підпросторів отримають вираз

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{b}_{s-k+i} - \mu_i^1 \mathbf{b}_1 - \ldots - \mu_i^{s-k} \mathbf{b}_{s-k},$$

або, еквівалентно,

$$\mathbf{q}_i = \lambda_i^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_i^k \mathbf{a}_k.$$

4.2.4 З'ясування взаємного розташування площин

Нехай

$$\begin{aligned}
\pi^k &: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \mathbf{r}_1 + L^k,\\
\pi^l &: \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l) = \mathbf{r}_2 + L^l.
\end{aligned}$$

Знайдемо базиси $L^k + L^l$ і $L^k \cap L^l$. Нехай це будуть вектори $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{s-k}$ і $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$. Вектор $\mathbf{w} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ належить $L^k + L^l$ тоді і тільки тоді, коли має розв'язок система:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \dots & a_k^1 & b_1^1 & \dots & b_{s-k}^1 & w^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_k^n & b_1^n & \dots & b_{s-k}^n & w^n \end{array}\right).$$

Нехай система має розв'язок, тобто

$$\mathbf{w} = \lambda^1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda^k \mathbf{a}_k + \mu^1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \mu^{s-k} \mathbf{b}_{s-k}.$$

Тоді спільна точка площин знаходиться як

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \lambda^1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda^k \mathbf{a}_k,$$

і рівняння площини перетину набуде вигляду

$$\pi^m : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + Lin(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m) = \mathbf{r}_0 + L^m.$$

Якщо ж система розв'язків не має, то площини є мимобіжними з напрямком часткової паралельності L^m.

177. *З'ясувати взаємне розташування двох 2-вимірних площин в 4-вимірному афінному просторі, що задані параметричними рівняннями*

$$\pi_1 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad \pi_2 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2),$$

де

$$\mathbf{r}_1 = \{1, 2, 1, 1\},\ \mathbf{a}_1 = \{1, 2, 0, 1\},\ \mathbf{a}_2 = \{1, 1, 1, 0\},$$
$$\mathbf{r}_2 = \{2, 1, 2, 1\},\ \mathbf{b}_1 = \{1, 0, 1, 0\},\ \mathbf{b}_2 = \{1, 3, 0, 1\}.$$

Розв'язок. Знайдемо вектор $\mathbf{w} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \{1, -1, 1, 0\}$ і складемо матрицю $(A|B|w)$, записавши координати векторів у стовпчики.

$$(A|B|w) = \left(\begin{array}{cc|cc|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Знайдемо базис суми, користуючись методом Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь. Для цього будемо зводити матрицю $(A|B|w)$ до ступінчастого виду, а саме

$$\left(\begin{array}{cc|cc|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, базис суми складають вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$ (але можна також взяти за базис вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$). Вектор $\mathbf{w}$ лінійно виражається через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$ і тому $\mathbf{w} \in$

$L_1 + L_2$. Значить, $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Знайдемо базис перетину. Для цього знаходимо розв'язок системи

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \mu^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Досить знайти лише $\mu^1 = -1$, тому що $\mathbf{q}_1 = \mathbf{b}_2 - \mu^1 \mathbf{b}_1 = \{2, 3, 1, 1\}$. Вектор $\mathbf{q}_1$ – напрямний вектор перетину $L_1 \cap L_2$.

Знайдемо спільну точку заданих площин. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \mu^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Її розв'язок $\mu^1 = 2, \lambda^2 = -1, \lambda^1 = 0$. Отже,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \lambda^1 \mathbf{a}_1 + \lambda^2 \mathbf{a}_2 = \{0, 1, 0, 1\}.$$

Таким чином, знаходимо рівняння лінії перетину

$$\pi_1 \cap \pi_2 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{q}_1$$

або в координатах

$$\mathbf{r}(t) = \{0 + 2t, 1 + 3t, 0 + t, 1 + t\}.$$

■

178. *З'ясувати взаємне розташування двох 2-вимірних площин у 5-вимірному афінному просторі, що задані параметричними рівняннями*

$$\pi_1 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad \pi_2 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2),$$

де

$$\mathbf{r}_1 = \{0, 0, 0, 0, 0\}, \ \mathbf{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}, \ \mathbf{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\},$$
$$\mathbf{r}_2 = \{0, 0, 0, 0, 1\}, \ \mathbf{b}_1 = \{0, 1, 0, 0, 0\}, \ \mathbf{b}_2 = \{0, 0, 0, 1, 0\}.$$

Відповідь. Цілком мимобіжні.

179. *З'ясувати взаємне розташування двох 2-вимірних площин у 5-вимірному афінному просторі, що задані параметричними рівняннями*

$$\pi_1 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad \pi_2 \colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2),$$

де

$$\mathbf{r}_1 = \{0, 0, 0, 0, 0\}, \ \mathbf{a}_1 = \{1, 0, 0, 0, 0\}, \ \mathbf{a}_2 = \{0, 1, 0, 0, 0\},$$
$$\mathbf{r}_2 = \{1, 1, 1, 1, 0\}, \ \mathbf{b}_1 = \{0, 0, 1, 0, 0\}, \ \mathbf{b}_2 = \{0, 0, 0, 1, 0\}.$$

Відповідь. Спільна точка $(1,1,0,0,0)$, площини перетинаються трансверсально.

180. *З'ясувати взаємне розташування двох 2-вимірних площин в 5-вимірному афінному просторі, що задані параметричними рівнянням*

$$\pi_1\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad \pi_2\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2),$$

де

$$\mathbf{r}_1 = \{0,0,0,0,0\},\ \mathbf{a}_1 = \{1,0,0,0,0\},\ \mathbf{a}_2 = \{0,1,0,0,0\},$$
$$\mathbf{r}_2 = \{0,0,0,1,0\},\ \mathbf{b}_1 = \{0,0,1,0,0\},\ \mathbf{b}_2 = \{1,1,1,0,0\}.$$

Відповідь. Мимобіжні з частковою 1-паралельністю до прямих з напрямним вектором $\{1,1,0,0,0\}$.

181. *З'ясувати взаємне розташування двох 2-вимірних площин в 5-вимірному афінному просторі, що задані параметричними рівняннями*

$$\pi_1\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad \pi_2\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2),$$

де

$$\mathbf{r}_1 = \{0,0,0,0,0\},\ \mathbf{a}_1 = \{1,0,0,0,0\},\ \mathbf{a}_2 = \{0,1,0,0,0\},$$
$$\mathbf{r}_2 = \{0,1,1,0,0\},\ \mathbf{b}_1 = \{0,0,1,0,0\},\ \mathbf{b}_2 = \{1,1,1,0,0\}.$$

Відповідь. Перетинаються.

4.3 Кут між площинами в евклідовому просторі E^n

Кутом між двома площинами в E^n $\pi^k\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + L^k, \quad \pi^l\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + L^l$ називається кут між їхніми напрямними просторами L^k і L^l. Для визначення кута між підпросторами нам будуть потрібні додаткові конструкції, що є природними узагальненнями відповідних конструкцій при $n = 2, 3$.

182. *Покажіть, що в евклідовому просторі E^n існує ортонормований базис.*

Підказка. Припустимо, що $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ – який-небудь базис у E^n. Послідовність операцій

$$\begin{array}{ll}
 & \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}, \\
\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \big\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 \big\rangle \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}, \\
\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \big\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_1 \big\rangle \mathbf{e}_1 - \big\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2 \big\rangle \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|}, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\
\mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \big\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{e}_i \big\rangle \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{b}_n}{|\mathbf{b}_n|}
\end{array}$$

називається *процесом ортогоналізації Грама–Шмідта.*

Два підпростори L^k і L^l у E^n називаються *взаємно ортогональними*, якщо для кожного $\mathbf{x} \in L^k$, для кожного $\mathbf{y} \in L^l$ маємо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Щоб вказати на ортогональність підпросторів, пишуть $L^k \perp L^l$.

Нехай $E^n = L^k \oplus L^{n-k}$ і $L^{n-k} \perp L^k$. Тоді L^{n-k} називається *ортогональним доповненням* L^k і позначається як $(L^k)^\perp$. Для даного підпростору його ортогональне доповнення завжди існує.

183. *Якщо L^k – підпростір у E^n, то існує єдиний підпростір L^{n-k} такий, що $E^n = L^k \oplus L^{n-k}$, причому $L^k \perp L^{n-k}$.*

Розв'язок. Нехай $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис в L^k. Доповнимо $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ до базису в E^n: $\underbrace{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k}_{L^k}, \underbrace{\mathbf{b}_{k+1}, \ldots, \mathbf{b}_n}_{L^{n-k}}$. Очевидно, що $E^n = L^k \oplus L^{n-k}$. Виконаємо ортогоналізацію базису L^k. Нехай $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – ортонормований базис L^k. Розглянемо вектор

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_{k+1} - \langle \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 - \ldots - \langle \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k.$$

Тоді $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ і $\mathbf{v}_1 \not\subset L^k$. Отже, $\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}$ має властивості:

$$|\mathbf{f}_1| = 1,\ \mathbf{f}_1 \perp \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k.$$

Покладемо

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_{k+2} - \langle \mathbf{b}_{k+2}, \mathbf{f}_1 \rangle - \langle \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 - \ldots - \langle \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k.$$

Тоді $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ і $\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}$ є таким, що

$$|\mathbf{f}_2| = 1,\ \mathbf{f}_2 \perp \mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k.$$

Продовжуючи процес, одержимо базис у E^n: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$; $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-k}$, причому $Lin(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-k}) = (L^k)^\perp$.

■

Нехай $\mathbf{y}$ – довільний вектор і нехай $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-k}$ — ортонормований базис у E^n такий, що $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – базис L^k, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-k}$ – базис $(L^k)^\perp$. Тоді

$$\mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + \cdots + y^k\mathbf{e}_k + y^{k+1}\mathbf{f}_1 + \cdots + y^n\mathbf{f}_{n-k}$$

і вектор

$$\mathbf{y}{\downarrow}_{L^k} = y^1\mathbf{e}_1 + \cdots + y^k\mathbf{e}_k$$

називається *ортогональною проекцією* $\mathbf{y}$ на L^k.

Кутом між вектором і підпростором називається кут між вектором і його ортогональною проекцією на цей підпростір. Таким чином,

$$\cos(\mathbf{y}\,\widehat{\ }\,L^k) = \frac{|\mathbf{y}{\downarrow}_{L^k}|}{|\mathbf{y}|}.$$

Зокрема *кутом між прямою і площиною в E^n* називається кут між напрямним вектором прямої і напрямним підпростором площини.

4.3.1 Кут між трансверсальними підпросторами в E^n

Підпростори L^l і L^k називаються *трансверсальними*, якщо $L^k \cap L^l = \mathbf{0}$. *Кутом між трансверсальними підпросторами L^l і L^k* називається найменший з кутів між $\mathbf{x} \in L^l$ і $\mathbf{y} \in L^k$.

184. *Позначимо через $L^k \widehat{\ } L^l$ між підпросторами L^l і L^k. Тоді*

$$\cos(L^k \widehat{\ } L^l) = \max_{\mathbf{y} \in L^l} \frac{|\mathbf{y}\downarrow_{L^k}|}{|\mathbf{y}|} = \max_{\mathbf{y} \in L^k} \frac{|\mathbf{y}\downarrow_{L^l}|}{|\mathbf{y}|}$$

коли $\mathbf{y}$ пробігає весь простір L^l або $\mathbf{y}$ пробігає весь простір L^k.

Для довільної прямокутної матриці $A_{k\times l}$ матриця AA^t є симетричною $k \times k$ матрицею, власні числа якої дійсні і невід'ємні [14, 4]. Арифметичні корені з власних чисел матриці AA^t називаються *сингулярними числами* матриці A.

185. *Косинус кута між двома трансверсальними підпросторами L^k і L^l в E^n дорівнює найбільшому сингулярному числу матриці $P_{l\times k} = \big(\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_j\rangle\big)_{i=1\ldots l,\ j=1\ldots k}$ або матриці $P_{k\times l} = \big(\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{f}_i\rangle\big)_{j=1\ldots k,\ i=1\ldots l}$, де $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ і $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_l$ ортонормовані базиси в L^k і L^l, відповідно.*

Розв'язок. Нехай $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – ортонормований базис L^k, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_l$ – ортонормований базис L^l. Доповнимо базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ до базису E^n так, що $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{n-k}$ складуть ортонормований базис E^n.

Нехай $\mathbf{y} = y^1\mathbf{f}_1 + \ldots + y^l\mathbf{f}_l$ – довільний вектор у L^l. Тоді $|\mathbf{y}|^2 = \sum_{i=1}^l (y^i)^2$. З іншого боку, розкладемо $\mathbf{y}$ за базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{n-k}$. Тоді $\mathbf{y} = \tilde{y}^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \tilde{y}^k\mathbf{e}_k + \tilde{y}^{k+1}\mathbf{g}_1 + \ldots + \tilde{y}^n\mathbf{g}_{n-k}$, і частина розкладання $\tilde{y}^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \tilde{y}^k\mathbf{e}_k$ визначить ортогональну проєкцію $\mathbf{y}$ на L^k. Знайдемо координати цієї частини розкладання.

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}^1 = \big\langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_1\big\rangle = \big\langle \textstyle\sum_{i=1}^l y^i\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_1\big\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^l y^i\big\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_1\big\rangle \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad , \\
&\tilde{y}^k = \big\langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_k\big\rangle = \big\langle \textstyle\sum_{i=1}^l y^i\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_k\big\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^l y^i\big\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_k\big\rangle.
\end{aligned}$$

Позначимо $p_{ij} = \big\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_j\big\rangle \quad (i = 1, \ldots, l\,; j = 1, \ldots, k)$. Тоді

$$\tilde{y}^1 = \sum_{i=1}^l p_{i1}y^i, \quad \ldots \quad \tilde{y}^k = \sum_{i=1}^l p_{ik}y^i.$$

Тепер легко знаходимо

$$|\mathbf{y}\downarrow_{L^k}|^2 = \sum_{j=1}^k (\tilde{y}^j)^2 = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^l p_{ij}y^i\right)^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i,s=1}^l p_{ij}p_{sj}y^iy^s.$$

Таким чином, вираз для $|\mathbf{y}\downarrow_{L^k}|^2$ набуває вигляду симетричної квадратичної форми

$$|\mathbf{y}\downarrow_{L^k}|^2 = \sum_{i,s=1}^{l} q_{is} y^i y^s,$$

з матрицею $Q_{l\times l} = \big(q_{is}\big)$ елементи якої мають вигляд

$$q_{is} = \sum_{j=1}^{l} p_{ij} p_{sj} \quad \sim \quad Q = PP^t.$$

Тоді

$$\cos^2(L^k {}^\frown L^l) = \max_{\mathbf{y}} \frac{\sum_{i,s=1}^{l} q_{is} y^i y^s}{\sum_{i=1}^{l} (y^i)^2} = \max_{|\mathbf{Y}|=1} \left(\sum_{i,s=1}^{l} q_{is} y^i y^s \right).$$

Локальні екстремуми квадратичної форми $Q(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \sum_{i,s=1}^{l} q_{is} y^i y^s$ за умови $|\mathbf{y}| = 1$ дорівнюють власним числам матриці цієї форми [4], тобто кореням характеристичного рівняння

$$\det(Q - \lambda E) = 0.$$

Отже,

$$\cos(L^k {}^\frown L^l) = \sqrt{\lambda_{\max}},$$

де λ_{max} – максимальне власне число матриці Q. Лишилося зауважити, що власні числа матриці Q є квадратами сингулярних чисел матриці

$$P_{l\times k} = \big(\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_j \rangle\big)_{i=1\ldots l,\ j=1\ldots k}.$$

Очевидно, що у зазначених обчисленнях підпростори L^k і L^l можна поміняти місцями, що призводить до матриці $P_{k\times l} = \big(\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{f}_i \rangle\big)_{j=1\ldots k,\ i=1\ldots l}$, що є транспонованою для матриці $P_{l\times k} = \big(\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_j \rangle\big)_{i=1\ldots l,\ j=1\ldots k}$.

■

186. *Обчислити кут між підпросторами* $V = Lin(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *і* $W = Lin(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, *де*

$$\mathbf{e}_1 = \big\{1, 0, 0, 0\big\}, \qquad \mathbf{e}_2 = \big\{0, 1, 0, 0\big\},$$
$$\mathbf{f}_1 = \tfrac{1}{2}\big\{1, 1, 1, 1\big\}, \qquad \mathbf{f}_2 = \tfrac{1}{6}\big\{1, 1, 3, -5\big\}.$$

Розв'язок. Визначник з координат векторів не нульовий, отже, підпростори трансверсальні. Базиси підпросторів V і W ортонормовані. Складемо матрицю $P = (\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_j \rangle)$, а саме

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Матриця
$$Q = PP^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$
Власними числами матриці Q є $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{5}{9}$. Отже, сингулярними числами матриці P є $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Таким чином, кут між V і W дорівнює $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$.
Відповідь. $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$.

∎

187. *Знайти ортогональну проекцію вектора* $\mathbf{y} = \{4, -1, -3, 4\}$ *на підпростір, що заданий своїм базисом* $\mathbf{f}_1 = \{1, 1, 1, 1\}$, $\mathbf{f}_2 = \{1, 2, 2, -1\}$.

Розв'язок. Запишемо розкладання $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \mathbf{z}$, де $\mathbf{z} \perp Lin(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Координати x_1, x_2 в розкладанні знайдемо, склавши систему
$$\begin{cases} \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}_1 \rangle = x_1|\mathbf{f}_1|^2 + x_2\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}_2 \rangle = x_1\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle + x_2|\mathbf{f}_2|^2. \end{cases}$$
Для даних задачі система отримає вигляд
$$\begin{cases} 4 = 4x_1 + 4x_2, \\ -8 = 4x_1 + 10x_2. \end{cases}$$
Розв'язок системи складають $x_1 = 3, x_2 = -2$. Отже, $\mathbf{x} = 3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 = \{1, -1, -1, 5\}$.
Відповідь. $\{1, -1, -1, 5\}$.

∎

188. *Знайти кут між вектором* $\{2, 2, 1, 1\}$ *і підпростором, що заданий своїм базисом* $\{3, 4, -4, -1\}$, $\{0, 1, -1, 2\}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.

189. *Знайти кут між підпростором, що заданий базисом* $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0, 0\}$, *і підпростором, що заданий базисом* $\mathbf{a}_1 = \{2, 3, 1, 6\}$, $\mathbf{a}_2 = \{3, 2, -6, -1\}$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

4.3.2 Кут між нетрансверсальними підпросторами в E^n

Нехай L^k і L^l – два підпростори такі, що $L^k \cap L^l = L^m$.

190. *Нехай* $L^m \subset L^k$. *Тоді має місце розкладання* $L^k = L^m \oplus L^{k-m}$, *де* $L^m \perp L^{k-m}$. *Підпростір* L^{k-m} *називаеться ортогональним доповненням* L^m *у* L^k.

Розв'язок. Нехай $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m$ – базис L^m. Починаючи з вектора $\mathbf{q}_1$, побудуємо ортонормований базис L^m: $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$. На $m+1$-му кроці процесу ортогоналізації ми одержимо вектор $\mathbf{p}_{m+1}$, ортогональний усім векторам $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$, а значить, і всьому підпростору L^m. Продовжуючи процес, прийдемо до базису в L^k

$$\{\underbrace{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m}_{L^m}, \underbrace{\mathbf{p}_{m+1}, \ldots, \mathbf{p}_k}_{L^{k-m}}\},$$

причому $L^m \perp L^{k-m}$.

■

191. *Нехай L^k і L^l – два підпростори в L^n і нехай $L^m = L^k \cap L^l$. Тоді*

$$L^k = L^m \oplus L^{k-m} \quad L^l = L^m \oplus L^{l-m},$$

де L^{k-m} і L^{l-m} – ортогональні доповнення L^m у L^k і L^l відповідно.

В отриманих розкладаннях підпростори L^{k-m} і L^{l-m} трансверсальні. Тому кутом між двома нетрансверсальними підпросторами L^k і L^l називається кут між ортогональними доповненнями підпростору $L^m = L^k \cap L^l$ у L^k і L^l відповідно.

192. *Знайти кут між підпросторами $V = Lin(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ та $W = Lin(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, якщо*

$$\mathbf{e}_1 = \{1, 1, 1, 1\}, \quad \mathbf{e}_2 = \{1, -1, 1, -1\},$$
$$\mathbf{f}_1 = \{2, 2, 1, 0\}, \quad \mathbf{f}_2 = \{1, -2, 2, 0\}.$$

Розв'язок. Вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ лінійно залежні, оскільки

$$3(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = \{6, 0, 6, 0\}.$$

Базис у $V \cap W$ складає вектор $\mathbf{a} = \{1, 0, 1, 0\}$. Його ортогональне доповнення в підпросторі V складається з вектору

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - \frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \{0, 1, 0, 1\},$$

а в підпросторі W з вектора

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_1 - \frac{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{a} \rangle}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \left\{\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Отже,

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь. $\arccos\frac{2}{3}$.

■

Многовидом Грасмана $G(n,k)$ називається множина k -вимірних площин в n -вимірному просторі, що проходять через початок координат. Многовид Грасмана є узагальненням проєктивного простору $\mathbb{R}P^n = G(n,1)$. В якості відстані між точками многовиду Грасмана обирається кут між відповідними площинами. Задача **185** дає спосіб обчислення відстані між точками многовиду Грасмана.

4.4 Відстань між точками і площинами в E^n

Матрицею Грама системи векторів $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ називається матриця

$$G = G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k) = \big(\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle\big) \quad (i,j = 1\ldots k),$$

що складається з попарних скалярних добутків векторів даної системи.

193. *Вектори* $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ *лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли їх матриця Грама невироджена, тобто* $\det G \neq 0$.

Підказка. Покажіть, що $G = A^tA$, де A – матриця, сформована координатами векторів, записаними у стовпчики.

Нехай $L \subset E^n$ підпростір вимірності $k < n$. Для довільного вектора $\mathbf{x} \in E^n$ запишемо розкладання $\mathbf{x} = \mathbf{x}_L + \mathbf{x}_L^{\perp}$, де $\mathbf{x}_L \in L$, $\mathbf{x}_L^{\perp} \in L^{\perp}$. Вектор $\mathbf{x}_L^{\perp}$ називається *нормальною складовою* вектора $\mathbf{x}$ відносно підпростору L. Очевидно, що $\mathbf{x}_L^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_L$.

194. *Нехай підпростір* $L = Lin(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$. *Тоді для довільного вектора* $\mathbf{x} \in E^n$

$$\mathbf{x}_L = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k,$$

де коефіцієнти розкладання є розв'язком системи

$$\begin{cases} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1\rangle\lambda_1 + \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle\lambda_2 + \ldots + \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k\rangle\lambda_k = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x}\rangle, \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\rangle\lambda_1 + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2\rangle\lambda_2 + \ldots + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k\rangle\lambda_k = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x}\rangle, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1\rangle\lambda_1 + \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2\rangle\lambda_2 + \ldots + \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k\rangle\lambda_k = \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}\rangle, \end{cases}$$

матрицею якої є матриця Грама базису підпростору.

Паралелепіпедом з вершиною у початку координат, що утворений векторами $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$, називається множина точок

$$P(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k) = \{M(\mathbf{r}) \in E^n : \mathbf{r} = x^1\mathbf{a}_1 + \ldots + x^k\mathbf{a}_k, \quad 0 \le x^i \le 1\}.$$

Визначимо об'єм k-паралелепіпеда індуктивно:

- $k = 1$, об'єм$P(\mathbf{a}_1) = |\mathbf{a}_1|$;
- об'єм$P(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$=об'єм$P(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}) \cdot |\mathbf{a}_k^{\perp}|$, де $\mathbf{a}_k^{\perp}$ – нормальна складова вектора $\mathbf{a}_k$ відносно підпростору $Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1})$.

Об'єм k-паралелепіпеда позначимо $Vol(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

195. *Має місце формула* $\big(Vol(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)\big)^2 = \det G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Підказка. Використати індукцію за вимірністю паралелепіпеда.

Відстанню від точки M до k-площини Π^k називається найменша відстань між точкою M і довільною точкою M_0 площини Π^k.

196. *Покажіть, що відстань від точки* $M(\mathbf{r}_1)$ *до площини* $\Pi^k : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *обчислюється за формулою*

$$d(M, \Pi^k) = \frac{Vol(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)}{Vol(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)}.$$

Підказка. Об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі (об'єму) основи на його висоту.

Відстанню між мимобіжними площинами Π^k і Π^m в евклідовому просторі E^n називається найменша відстань між довільними точками площин Π^k і Π^m.

197. *Покажіть, що відстань між мимобіжними площинами* $\Pi^k : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + Lin(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *і* $\Pi^m : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + Lin(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)$ *обчислюється за формулою*

$$d(\Pi^k, \Pi^m) = \frac{Vol(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{Vol(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)}.$$

Докладніше про геометрію багатовимірних просторів дивіться, наприклад, в підручнику [5].

Список рекомендованої літератури

[1] Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов/В. И. Арнольд. – М.: МЦМО, 2002. – 40 с.

[2] Банди Б. Основы линейного программирования/Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.

[3] Борисенко О. А. Аналітична геометрія/О. А. Борисенко, Л. М. Ушакова. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.

[4] Воеводин В. В. Линейная алгебра/В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1974. – 336 с.

[5] Ефимов Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия/Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

[6] Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа/И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – М.: Наука, 1973. – 114 с.

[7] В. В. Кириченко. Збірник задач з аналітичної геометрії/За ред. В. В. Кириченка. – Кам’янець-Подільський: Аксіома, 2013. – 200 с.

[8] Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия/А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – М.: Наука, 1985. – 303 с.

[9] Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров/Г. Корн, Г. Корн. – М.: Наука, 1973. – 838 с.

[10] Курінний Г. Ч. Елементи лінійної алгебри в курсі аналітичної геометрії/Г. Ч. Курінний, О. О. Шугайло. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2012. – 35 с.

[11] Лейхтвейс К. Выпуклые множества/К. Лейхтвейс. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

[12] Моденов П. С. Сборник задач по аналитической геометрии/П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

[13] Погорелов А.В. Аналитическая геометрия/А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1968. – 176 с.

[14] Хорн Р. Матричный анализ/Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир,1989. – 655 с.

Покажчик

Навчальне видання

Ямпольський Олександр Леонідович

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
Вектори, прямі і площини

Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії
для студентів математичних факультетів університетів

Коректор О. В. Анцибора
Комп'ютерне верстання О. Л. Ямпольський
Макет обкладинки І. М. Дончик

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 8888 . Тираж 88888 прим. Зам. № 234/19.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32