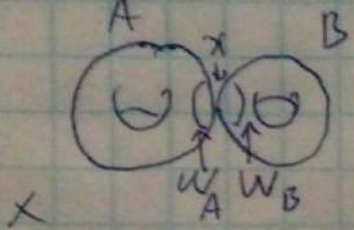
Косньовскі, 24.4(d). $X \cong T^2 \vee T^2$: $X = A \cup B$, $A \cong T^2$, $B \cong T^2$ і $A \cap B = \{x\}$. Знайти $\pi_1(X, x)$.

$U := A \cup W_B$, де W_B – стяжний окіл x у B, $V := B \cup W_A$, де W_A – стяжний окіл x у A. Тоді: U, V – лін. зв'язні і



$U \sim V \sim T^2 \Rightarrow \pi_1(U, x) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$, $\pi_2(V, x) = \langle c, d \mid cdc^{-1}d^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$; $U \cap V \neq \emptyset$ – стяжний (зокрема, лін. зв.) $\Rightarrow \pi_1(U \cap V, x) = \langle \rangle$. За Th. З-в.К., $\pi_1(X, x) \cong \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}d^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$ (вільний добуток)

Косньовскі 24.4(g). $X = U \cup V$, де U і V відкр., лін. зв, $U \cap V \neq \emptyset$ і лін. зв. (тобто ми в умовах Th. З.-в.К.). Нехай V однозв'язний. Оберемо якусь $x \in U \cap V$.

1. $i_{U*} : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ – сюр.
2. Ker i_{U*} – найменша норм. підгрупа $\pi_1(U, x)$, що включає Im $i_{UV*} = i_{UV*}(\pi_1(U \cap V, x))$

(Нагадаємо позн. з лекції! $\begin{array}{ccccc} & \overset{i_{UV}}{\nearrow} & U & \overset{i_U}{\searrow} & \\ U \cap V & & & & X \\ & \underset{i_{VU}}{\searrow} & V & \underset{i_V}{\nearrow} & \end{array}$)

Нехай $\pi_1(U,x) = \langle a_1,\dots,a_n \mid r_1,\dots,r_m \rangle$ і $\pi_1(U\cap V,x) = \langle c_1,\dots,c_p \mid t_1,\dots,t_o \rangle$,

За умовою, $\pi_1(V,x) = \langle\,\rangle$. Тоді за $\underline{\text{Тм}}$. З.-в.К.

$$\pi_1(X,x) \cong \langle a_1,\dots a_n \mid r_1,\dots,r_m,\ i_{UV*}(c_1),\dots,i_{UV*}(c_p) \rangle,$$

бо $i_{VU*} = 0$ ($i_{VU*} : \pi_1(U\cap V,x) \to \pi_1(V,x)$ – трив.).

$\underline{1}$. За побудовою у доведенні $\underline{\text{Тм}}$., твірні $\pi_1(X,x)$, що відп. $a_1,\dots,a_n$ – це $i_{U*}(a_1),\dots,i_{U*}(a_n)$, тобто $\forall$ ел-т $\pi_1(X,x)$ – це добуток (слово) цих ел-тів і обернених до них: $i_{U*}(a_{i_1})^{\varepsilon_1}\dots i_{U*}(a_{i_k})^{\varepsilon_k} = i_{U*}(a_{i_1}^{\varepsilon_1}\dots a_{i_k}^{\varepsilon_k})$, де $i_1,\dots,i_k = \overline{1,n}$ і $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k = \pm 1$. Це й означає, що i_{U*} – сюр.

бо i_{U*} – гом-зм

$\underline{2}$. $\forall\ i = \overline{1,p}$ $\ i_{U*}(i_{UV*}(c_i))$ – трив. елемент $\pi_1(X,x)$, бо

$\pi_1(X,x)$ має співвідношення $i_{UV*}(c_i)$ (що насправді означає $i_{U*}(i_{UV*}(c_i))$ за побудовою). Отже, $\operatorname{Im} i_{UV*} \subset \operatorname{Ker} i_{U*}$ (бо $c_1, \dots, c_p$ - твірні $\pi_1(U \cap V, x)$). Тоді й $H \subset \operatorname{Ker} i_{U*}$, де H - найменша норм. підгр. $\pi_1(U,x)$, що містить $\operatorname{Im} i_{UV*}$ і складається з усіх можливих добутків ел-тів $\operatorname{Im} i_{UV*}$, можливо, спряжених з ел-тами $\pi_1(U,x)$. Але якщо ел-т $a \in \pi_1(U,x)$ належить до $\operatorname{Ker} i_{U*}$, тобто тривіальний у $\pi_1(X,x)$ зі співвідн. $u_1, \dots, u_m, i_{UV*}(c_1), \dots, i_{UV*}(c_p)$ (ототожнюємо ел-ти з їх образами під дією i_{U*}), то він після викреслювання підслів, що тривіальні у $\pi_1(U,x)$ має вигляд

$a = w_1 i_{UV*}(c_{i_1})^{\varepsilon_1} w_2 i_{UV*}(c_{i_2})^{\varepsilon_2} w_3 \dots w_k i_{UV*}(c_{i_k})^{\varepsilon_k} w_{k+1}$, де $i_1, \dots, i_k = \overline{1,p}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k = \pm 1$, і $w_1 w_2 \dots w_{k+1} = e$. Тоді перепишемо: $a = w_1 i_{UV*}(c_{i_1})^{\varepsilon_1} w_1^{-1} w_1 w_2 i_{UV*}(c_{i_2})^{\varepsilon_2} (w_1 w_2)^{-1} w_1 w_2 w_3 \dots \dots w_1 w_2 \dots w_k i_{UV*}(c_{i_k})^{\varepsilon_k} w_{k+1}$ - це добуток спряжених до $i_{UV*}(c_{i_j})^{\varepsilon_j}$, бо $w_{k+1} = (w_1 \dots w_k)^{-1}$.

Т.ч., $a \in H$. Отже, $\operatorname{Ker} i_{U*} \subset H \Rightarrow \operatorname{Ker} i_{U*} = H$.

37. Кл. $\varphi : D^n \to \mathbb{R}^n$ – неперервне, $\varphi(S^{n-1}) \not\ni 0$ і $\varphi|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ індукує нетривіальний гом-зм $\varphi_* : \pi_{n-1}(S^{n-1}, x) \to \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \varphi(x))$

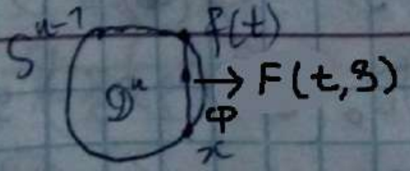
$n \geq 2$: $\pi_{n-1}(S^{n-1}, x) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \varphi(x)) \cong \mathbb{Z}$

($\exists x \Leftrightarrow \forall x$ в силу лін. зв'язності). Тоді $\exists\, y \in D^n : \varphi(y) = 0$.

При $n = 1$ можемо розуміти $\varphi_* : \pi_0(S^0) \to \pi_0(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ як відобр., що демонструє, які зв'язні компоненти переходять у які. $D^1 = [-1,1]$, $S^0 = \{-1,1\}$, тому нетривіальність φ_* означає, що $\varphi(-1)$ і $\varphi(1)$ мають різні знаки. Тобто це просто теорема про проміжне значення (що випливає зі зв'язності D^1).

Для $n \geq 2$: $\nearrow$ $\forall y \in D^n$ $\varphi(y) \neq 0$. Нехай f – сфероїд в $x \in S^{n-1}$: $[f]$ – твірна $\pi_{n-1}(S^{n-1}, x) \simeq \mathbb{Z}$. φ_* – нетрив. $\Rightarrow \varphi_*([f]) \neq 0$ (бо інакше $\forall\, k[f] \in \pi_{n-1}(S^{n-1}, x)$ $\varphi_*(k[f]) = k\varphi_*([f]) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто $\varphi_* = 0$). З іншого боку, $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$, а

$$F(t,s) := \varphi\big((1-s)f(t) + sx\big) : I^{n-1} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$ кор.



визначене, непер. $\forall s$ $F(\partial I^{n-1}, s) = \varphi\big((1-s)x + sx\big) = \varphi(x)$,

$F(\cdot, 0) = \varphi \circ f$, $F(\cdot, 1) = \varphi(x)$, тобто це ∂I^{n-1}-гомотопія

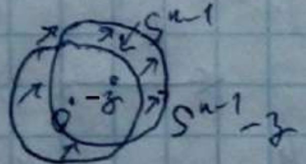
$\varphi\circ f$ і $e_{\varphi(x)}$ у $\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \Rightarrow [\varphi\circ f] = [e_{\varphi(x)}] = 0$. ↯ ∎

<u>37.6x.</u> $\varphi : \mathcal{D}^n \to \mathbb{R}^n$: $\varphi|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$. Тоді $\mathcal{D}^n \subset \varphi(\mathcal{D}^n)$.
Неперервне

$S^{n-1} \subset \varphi(\mathcal{D}^n)$ за умови.

$\forall\, z \in B^n$ застосуємо <u>37.Kx</u> до $\psi := \varphi - z$: непер.,

$0 \notin \psi(S^{n-1})$, і $\psi|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}} - z$ переводить S^{n-1} у сферу

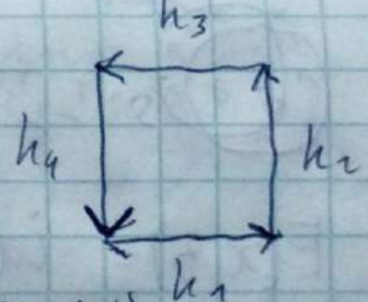


з центром $-z$, що міститься у $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
(0 є її внутрішньою точкою). Оскільки $\psi|_{S^{n-1}} \sim id_{S^{n-1}}$
($F(x,s) = id_{S^{n-1}} - sz$ — гомотопія), $(\psi|_{S^{n-1}})_*$ нетрив. $\Rightarrow \exists\, y \in \mathcal{D}^n$:
$\psi(y) = 0$, тобто $\varphi(y) = z$. Т.ч., $z \in \varphi(\mathcal{D}^n)$.

<u>37.8x.</u> Нехай $f, g : I \to I^2$ — шляхи : $f(0) = (0,0)$,
$f(1) = (1,1)$, $g(0) = (0,1)$, $g(1) = (1,0)$. Тоді $f(I) \cap g(I) \neq \varnothing$.

Розглянемо $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}^2$: $\varphi(t,s) = f(t) - g(s)$ — непер. Треба
показати, що $\exists\, t,s$: $\varphi(t,s) = 0$. Застосуємо <u>37.Kx</u> :
$I^2 \cong \mathcal{D}^2$ і $\partial I^2 \cong S^1$, тому вона працює. ↯ $\forall\, t,s$ $\varphi(t,s) \neq 0$,
тому, зокрема, $\varphi(\partial I^2) \not\ni 0$. Параметризуємо ∂I^2 як

петля - добуток 4 шляхів!

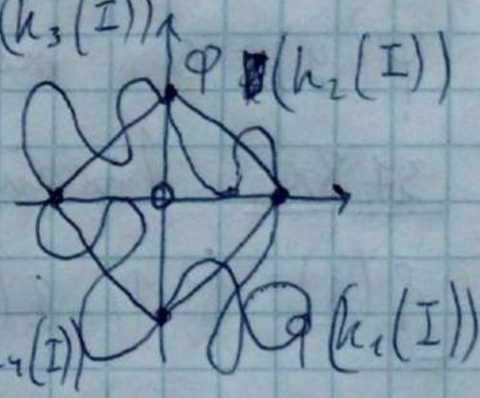


$$\varphi\circ h_1(t) := \varphi(t,0) = f(t) - g(0) = f(t) - (0,1) \neq 0$$

за припущенням, $0 \mapsto f(0)-(0,1) = (0,-1)$, $1 \mapsto f(1)-(0,1) =$

$= (1,0)$, і $f(t) \in I^2 \to (\varphi\circ h_1)^1(t) \geq 0$ і $(\varphi\circ h_1)^2(t) \leq 0$ $\forall t$,

тобто $\varphi(h_1(I))$ - у $\underline{\text{IV}}$ октанті (без 0).



$$\varphi\circ h_2(t) := \varphi(1,t) = f(1) - g(t) = (1,1) - g(t) \neq 0,$$

$0 \mapsto (1,0)$, $1 \mapsto (0,1)$, $\varphi(h_2(I))$ у I окт.

$$\varphi\circ h_3(t) := \varphi(1-t,1) = f(1-t) - g(1) = f(1-t) - (1,0) \neq 0,$$

$0 \mapsto (0,1)$, $1 \mapsto (-1,0)$, $\varphi(h_3(I))$ у II окт.

$$\varphi\circ h_4(t) := \varphi(0,1-t) = f(0) - g(1-t) = -g(1-t) \neq 0,$$

$0 \mapsto (-1,0)$, $1 \mapsto (0,-1)$, $\varphi(h_4(I))$ у $\underline{\text{III}}$ окт.

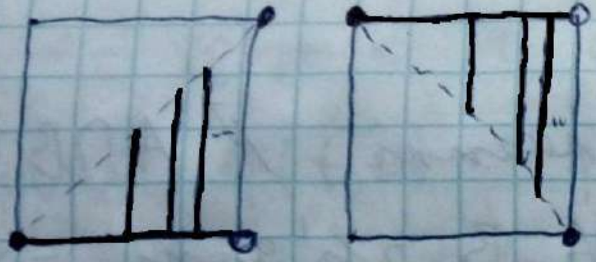
З опуклості октантів, кожен з φh_i гомотопний відрізку, що сполучає кінці, тобто для $h := ((h_1 * h_2) * h_3) * h_4$ $\varphi \circ h \sim$ ромбу $\Rightarrow$ $[\varphi \circ h] \neq 0$ у $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \varphi(x))$. Тому φ_* – нетрив. $\Rightarrow$ $\exists\ s, t : \varphi(s,t) = 0$ $\lightning$.

<u>37.10x.</u> $\forall$ замкнених зв'язних $A, B \subset I^2$ якщо $(0,0), (1,1) \in A$, $(1,0), (0,1) \in B$, то $A \cap B \neq \varnothing$.

A, B – обмежені і замкнені $\Rightarrow$ компактні. Нехай $A \cap B = \varnothing$. Тоді $\varepsilon := \rho(A, B) > 0$ (евкл. відстань). A, B зв'язні $\Rightarrow$ $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) := \bigcup_{x \in A} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(B) := \bigcup_{x \in B} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ лін. зв'язні.

(Дійсно, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) = A \cup \left(\bigcup_{x \in A} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\right)$ – об'єднання зв'язних і $\forall x \in A$ $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A \neq \varnothing$ ($\ni x$) $\Rightarrow$ зв'язна. Вона відкрита і зв. у $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ лін. зв'язна). За побудовою, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(B) = \varnothing$. За лін. зв. $\exists$ шляхи $f : I \to B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A) : f(0) = (0,0), f(1) = (1,1)$ і $g : I \to B_{\frac{\varepsilon}{2}}(B) : g(0) = (0,1), g(1) = (1,0)$ і тоді $f(I) \cap g(I) = \varnothing$ $\lightning$.

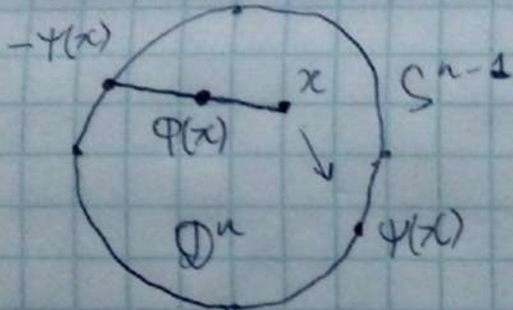
<u>37.9x.</u> Незамкнені такі A і B існують:



A B

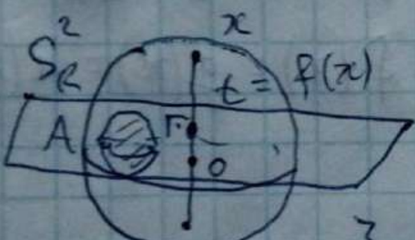
Дві "зрізані" гребінки з блохами, зубці обрані так, що не перетинаються (тобто задані двома послідовностями $\{x_n\}, \{y_n\} \subset I$: $x_n \neq y_m$ $\forall$ n, m і $x_n \to 1$, $y_n \to 1$).

Впр. 15.1 лекцій. Вивести теорему про барабан з т. Брауера.
Тобто відомо: $\forall$ непер. $\varphi : D^n \to D^n$ $\exists\, x \in D^n$: $\varphi(x) = x$.
Треба довести: $\nexists$ ретракції $\psi : D^n \to S^{n-1}$.
Нехай ретракція ψ існує. Покладемо $\varphi(x) := \dfrac{x - \psi(x)}{2}$ – непер. за непер. ψ, є відобр. $D^n \to D^n$ за опуклістю. $\exists\, x : \varphi(x) = x$, тобто $x - \psi(x) = 2x \Rightarrow x = -\psi(x) \in S^{n-1}$. Але тоді $x = \psi(x)$ $\lightning$.



<u>Впр. 15.2</u> лекцій або Косньовскі, <u>Th. 20.6</u> (задача про сендвіч з шинкою). $\forall$ вимірних обмежених $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ $\exists$ площина α, що ділить кожну з A, B, C навпіл. Ідея:

Обмеж. $\Rightarrow$ $\exists\, R:$ $A, B, C \subset \mathcal{D}^3_R$. $\forall\, x \in S^2_R = \partial \mathcal{D}^3_R$ розглянемо площини, що ортогональні діаметру Ox сфери:



Нехай α_t – така площина, що знаходиться на відст. t від x, $t \in [0, 2R]$.

З міркувань неперервності, $\exists\, t:$ α_t ділить A навпіл. Якщо їх проміжок, візьмемо середину. Позначимо $f(x) := t$. Тоді f – непер. $S^2 \to [0, 2R]$ і за побудовою $f(-x) = 2R - f(x)$. Ан-но визначаємо $g, h : S^2 \to [0, 2R]$ для B і C відп. Покладемо

$\Phi: S^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (f(x)-g(x),\ f(x)-h(x))$ – неперервне.

Тоді $\Phi(-x) = (2R - f(x) - (2R - g(x)),\ 2R - f(x) - (2R - h(x))) =$

$= (g(x)-f(x),\ h(x)-f(x)) = -\Phi(x)$. За наслідком з Th. Борсука-Улама, $\exists\, x \in S^2 : \Phi(x) = 0$, тобто $f(x) = g(x) = h(x)$.

Тоді $\alpha_{f(x)}$ – потрібна площина.

Впр. 15.8. лекцій: Відомо: $\forall$ непер. непарного $\Phi: S^n \to S^n$ $\deg \Phi$ непарна.

Вивести: $\forall\, m > n$ $\nexists$ непер. непарного $\Phi: S^m \to S^n$.

Н $\exists$ непер. непарне $\Phi: S^m \to S^n$. Виділимо $S^n \subset S^m$ $(\{(x^1, \dots, x^{m+1}) \in S^m \mid x^{n+2} = \dots = x^{m+1} = 0\})$

Тоді $\Phi|_{S^n}: S^n \to S^n$ – непарне $\Rightarrow \deg \Phi|_{S^n}$ непарна $\Rightarrow \neq 0$. Але $\Phi|_{S^n}$ гомотопне постійному: $F(x, s) = \Phi(f_x(s))$, де f_x – дуга великого кола S^m, що з'єднує $x \in S^n$ і N. (або вик. стереограф. пр. відносно S)