807(1) – ан-но 807(2) (осі симетрії)

876(3) Знайти співвідношення між кутовими коеф. k_1 і k_2 спряж. діаметрів гіперболи $xy = c$.

Центр у $(0,0)$, тому діаметри – $y = k_1 x$ і $y = k_2 x$. Напр. вектор першого – $(1, k_1)$, спряжений йому відн. $xy - c = 0$ ($\Leftrightarrow 2xy - 2c = 0$):

$$1 \cdot y + k_1 \cdot x = 0,$$

$y = -k_1 x$, тобто $k_2 = -k_1$, $k_1 + k_2 = 0$ – шук. умова.

878. Знайти рівн. двох спряжених діаметрів гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$, один з яких проходить через $(2,1)$.

l_1 прох. через $(2,1)$ і центр $(0,0)$ гіперболи $\Rightarrow$ має рівн. $\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-1}{0-1}$, $x - \cancel{2} = 2y - \cancel{2}$, $x - 2y = 0$, тобто $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$. Тоді за ф-лою з 876(2) $k_2 = \frac{b^2}{a^2 k_1} = \frac{12}{16 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$. Оскільки l_2 теж прох. через $(0,0)$, його рівн. $y = \frac{3}{2}x$.

Або: нехай l_1 спряжений до (λ, μ):

$$\lambda \cdot \frac{x}{16} - \mu \cdot \frac{y}{12} = 0$$

Прох. через $(2,1)$: $\lambda \cdot \frac{2}{16} - \mu \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow 3\lambda - 2\mu = 0$.

Для $(\lambda, \mu) = (2,3)$ маємо $\frac{x}{8} - \frac{y}{4} = 0$, тобто $l_1: x - 2y = 0$.

Напр. $(2,1)$, спряж. $2 \cdot \frac{x}{16} - 1 \cdot \frac{y}{12} = 0$, $y = \frac{3}{2}x$ (l_2).

1046(3) Знайти площини симетрії поверхні

$7x^2+7y^2+16z^2-10xy-8yz-8xz-16x-16y-8z+72=0$

Матриця квадр. частини:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -5 & -4 \\ -5 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

це еліпт. параболоїд (див. д/з або бо $I_4 \neq 0$),

Власт. знач. (було у д/з): $\lambda_1=18$, $\lambda_2=12$, $\lambda_3=0$.

Відп. вл. вектори: $a_1=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $a_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$,

$a_3=\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Площина симетрії спр. до векторів, що відп. ненульовим вл. значенням:

$$1\cdot(7x-5y-4z-8)+1\cdot(-5x+7y-4z-8)-4\cdot(-4x-4y+16z-4)=0$$

$$18x+18y-72z=0$$

$$x+y-4z=0$$

$$1\cdot(7x-5y-4z-8)-1\cdot(-5x+7y-4z-8)+0=0$$

$$12x-12y=0$$

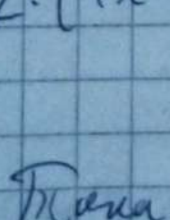
$$x-y=0$$

Що буде, якщо спробувати знайти площину, що спр. до третього вектора?

$$2\cdot(7x-5y-4z-8)+2\cdot(-5x+7y-4z-8)+1\cdot(-4x-4y+16z-4)=0$$

$$-36=0$$

Така площина $\nexists$ (це напрямок осі параболоїда,



тому йому не паралельні ніякі хорди).

Знайдені площини симетрії можна

використати, щоб знайти вершину параболоїда: це перетин цих двох площин і параболоїда (аналогічно, вершина параболи – її перетин з віссю сим.):

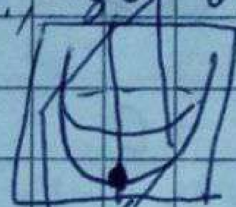
$$\begin{cases} 7x^2+7y^2+16z^2-10xy-8yz-8xz-16x-16y-8z+72=0 \\ x+y-4z=0 \\ x-y=0. \end{cases}$$

$x=y \Rightarrow 2x-4z=0,\ x=y=2z$. Підставимо:

$$28z^2+28z^2+16z^2-40z^2-16z^2-16z^2-32z-32z-8z+72=0$$

$$-72z+72=0$$

$z=1 \Rightarrow x=y=2$. Отже, вершина $(2,2,1)$ – збіг. з початком напрям. с.к., що був знайдений у д/з іншим методом.



892. Знайти рівн. еліпса з центром $C(2,1)$ та кінцями спряжених діаметрів $A(5,1)$, $B(0,3)$.

Будемо шукати рівняння у вигляді

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

$A \in$ еліпсу:

$$25a_{11} + 10a_{12} + a_{22} + 10a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

В ∈ еліпсу:

$$9a_{22} + 6a_{23} + a_{33} = 0. \qquad (2)$$

С – центр:

$$\begin{cases} 2a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 & (3) \\ 2a_{12} + a_{22} + a_{23} = 0 & (4) \end{cases}$$

$\overline{AC} = (-3, 0)$ – напр. вектор діаметра AC.

Спряжений до нього:

$$-3\cdot(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + 0\cdot(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

Це повинен бути BC з напр. вектором

$\overline{BC} = (2,-2) \sim (1,-1)$, а отже в. нормалі $(1,1)$:

$$\frac{a_{11}}{1} = \frac{a_{12}}{1}$$

$$a_{11} = a_{12} \qquad (5)$$

Підставимо у (3): $3a_{11} + a_{13} = 0 \Rightarrow a_{13} = -3a_{11}$.

(2) і (4) з урах. (5):

$$-6\cdot\begin{cases} 9a_{22} + 6a_{23} + a_{33} = 0 \\ 2a_{11} + a_{22} + a_{23} = 0 \end{cases}$$

$$3a_{22} - 12a_{11} + a_{33} = 0$$

$a_{33} = 12a_{11} - 3a_{22}$ і $a_{23} = -2a_{11} - a_{22}$ у (1):

$$25a_{11} + 10a_{11} + a_{22} - 30a_{11} - 4a_{11} - 2a_{22} + 12a_{11} - 3a_{22} = 0$$

$$13a_{11} - 4a_{22} = 0$$

Тоді для $a_{11} = 4$; $a_{22} = 13$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = -12$,

$a_{23} = -21$, $a_{33} = 9$:

$4x^2 + 8xy + 13y^2 - 24x - 42y + 9 = 0$.

1104. Знайти рівн. поверхні II порядку, що проходить через $(0,0,1)$, має центр у $(0,0,-1)$ і перетинає Oxy по $\begin{cases} 3x^2-4xy-3=0 \\ z=0 \end{cases}$

Шукаємо у загальному вигляді (**). Прох. через $(0,0,1)$, підставимо:

$$a_{33}+2a_{34}+a_{44}=0$$

Рівн. центра:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0 \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34}=0 \end{cases}$$

Підставляємо $(0,0,-1)$:

$$-a_{13}+a_{14}=0$$
$$-a_{23}+a_{24}=0$$
$$-a_{33}+a_{34}=0$$

Перетин з Oxy $(z=0)$:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{14}x+2a_{24}y+a_{44}=0$$

це рівняння лінії другого пор. у площ. Вона повинна збігатись з

$$3x^2-4xy-3=0,$$

тобто $a_{22}=a_{14}=a_{24}=0$, і

$$\frac{a_{11}}{3}=\frac{2a_{12}}{-4}=\frac{a_{44}}{-3},$$

тобто $2a_{11}=-3a_{12}$, $a_{11}=-a_{44}$. З усіх цих умов маємо: $a_{13}=a_{14}=0$, $a_{23}=a_{24}=0$, $a_{33}=a_{34}$ підставляємо у перше: $3a_{33} + a_{44} = 0$, $a_{44} = -3a_{33}$.

Тоді $a_{11} = -a_{44} = 3a_{33}$ і $a_{12} = -\frac{2}{3} a_{11} = -2a_{33}$.

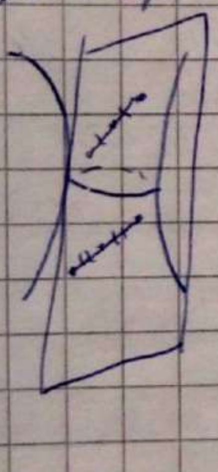
Поклавши $a_{33} = 1$ маємо:

$a_{11} = 3, a_{22} = 0, a_{33} = 1, a_{12} = -2, a_{13} = a_{23} = 0, a_{14} = a_{24} = 0, a_{34} = 1,$

$a_{44} = -3$:

$3x^2 + z^2 - 4xy + 2z - 3 = 0.$

1105. Знайти напрямок хорд, яким спряжена діаметральна площина гіп. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, що паралельна $6x + 4y - 3z - 12 = 0$.



$\nearrow (\lambda, \mu, \nu)$

Діам. площина гіперболоїда, що спряжена до (λ, μ, ν):

$$\lambda \cdot \frac{x}{4} + \mu \cdot \frac{y}{9} - \nu \cdot \frac{z}{16} = 0$$

Паралельна $6x + 4y - 3z - 12 = 0$:

$$12 \cdot \quad \frac{\lambda}{4 \cdot 6} = \frac{\mu}{9 \cdot 4} = \frac{\nu}{16 \cdot 3}$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{3} = \frac{\nu}{4}.$$

Оскільки (λ, μ, ν) шукаємо з точністю до множ. на скаляр, підходить $(\lambda, \mu, \nu) = (2, 3, 4)$.

1107. Знайти рівн. діам. площини параболоїда $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 2z$, що проходить через $(3, 0, 5)$ і $(0, 4, 7)$, і напрямок спряжених до неї хорд.

Діам. площина, що спряжена до (λ, μ, ν) відн.

$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} - 2z = 0$:

$$\lambda \cdot \frac{x}{8} + \mu \cdot \frac{y}{18} + \nu(-1) = 0$$

Підставляємо $(3,0,5)$: $\frac{3}{8}\lambda - \nu = 0$

$(0,4,7)$: $\frac{4}{18}\mu - \nu = 0$

Т.ч. $\frac{3}{8}\lambda = \frac{2}{9}\mu = \nu$, тобто $(\lambda, \mu, \nu) \sim$ $\sim \left(\frac{8}{3}, \frac{9}{2}, 1\right) \sim (16, 27, 6)$. Рівн. діам. площини: $2x + \frac{3}{2}y - 6 = 0$

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

<u>1108.</u> Знайти рівн. спільної діаметральної площини параболоїда $x^2 + y^2 = 2pz$ і циліндра $(x-a)^2 + z^2 = 4^2$.

<u>I спосіб (алгебраїчний):</u> Нехай площина спряжена до $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ відн. параб. $x^2 + y^2 - 2pz = 0$:

$$\lambda_1 \cdot x + \mu_1 y + \nu_1(-p) = 0$$

і відн. $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ відн. цил. $x^2 + z^2 - 2ax + a^2 - 4^2 = 0$:

$$\lambda_2(x-a) + \mu_2 \cdot 0 + \nu_2 \cdot z = 0.$$

$$\lambda_2 x + \nu_2 z - \lambda_2 a = 0.$$

Звідси $\mu_1 = \nu_2 = 0$ і

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-\nu_1 p}{-\lambda_2 a}$$

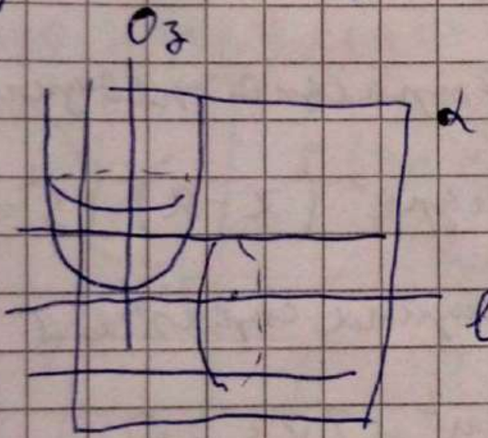
$\lambda_2 \neq 0$ (інакше друге рівн. не задає площину) $\Rightarrow$

$\lambda_1 = \frac{p}{a}\nu_1$, отже $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) \sim (p, 0, a)$, і площина:

$px - ap = 0 \Rightarrow x - a = 0.$

Для цил. маємо, що ця площ. спряжена $(1, m_2, 0)$ $\forall m_2$.

II спосіб (геометричний) Відомо, що $\forall$ діам. площина параболоїда паралельна його осі, тобто Oz. $\forall$ діам. площ. циліндра містить вісь, тобто $l: \begin{cases} x = a \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-a}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$. Тобто рівн. площини:
$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x - a = 0.$$



1078. Знайти рівняння дотичних площин поверхні $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0$, що проходять через пряму $\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

Дотична площина до поверхні $F(x,y,z) = 0$ у її точці (x_0, y_0, z_0):
$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z - z_0) = 0.$$

Тобто для (**) (після ділення на 2)

$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})(x-x_0)+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+$
$+a_{23}z_0+a_{24})(y-y_0)+(a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34})(z-z_0)=0$

У нас:

$(2x_0-y_0-2)(x-x_0)+(-x_0+5y_0+3z_0-\frac{1}{2})(y-y_0)+(3y_0+2z_0-1)(z-z_0)=0$

$(2x_0-y_0-2)x+(-x_0+5y_0+3z_0-\frac{1}{2})y+(3y_0+2z_0-1)z-2x_0^2-$
$-5y_0^2-2z_0^2+2x_0y_0-6y_0z_0+2x_0+\frac{1}{2}y_0+z_0=0$

З рівняння пов-ні:

$(2x_0-y_0-2)x+(-x_0+5y_0+3z_0-\frac{1}{2})y+(3y_0+2z_0-1)z-2x_0-\frac{1}{2}y_0-z_0=0$

Умова проходження через ℓ: $\begin{cases}4x-5y=0\\ z-1=0\end{cases}$;

<u>I спосіб</u> ℓ проходить через $(0,0,1)$ у напрямку

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-5,-4,0),$$ тобто має канон. рівн.

$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{0}$. Тоді дот. площина тепс $\ni(0,0,1)$:

$-2\cdot|\ 3y_0+2z_0-1-2x_0-\frac{1}{2}y_0-z_0=0$

$4x_0-5y_0-2z_0+2=0$

і $\parallel (5,4,0)$:

$5(2x_0-y_0-2)+4(-x_0+5y_0+3z_0-\frac{1}{2})=0$

$6x_0+15y_0+12z_0-12=0$

$2x_0+5y_0+4z_0-4=0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_0-5y_0-2z_0+2=0 \\ 2x_0+5y_0+4z_0-4=0 \end{cases}$$

Маємо $6x_0+2z_0-2=0 \Rightarrow z_0=1-3x_0$:

$$4x_0-5y_0-\cancel{2}+6x_0+\cancel{2}=0 \Rightarrow y_0=2x_0.$$

Підставляємо у рівн. поверхні:

$$2x_0^2+5(2x_0)^2+2(1-3x_0)^2-2x_0(2x_0)+6\cdot 2x_0(1-3x_0)-$$
$$-4x_0-2x_0-2(1-3x_0)=0$$
$$-10x_0^2=0$$

$x_0=0 \Rightarrow y_0=0,\ z_0=1$. Рівн. площини:

$$-2x+\frac{5}{2}y+z-1=0$$
$$4x-5y-2z+2=0.$$

II спосіб Використаємо рівн. жмутку площин

$\lambda(4x-5y)+\mu(z-1)=0$. Пар. рівняння дотичної

з $4\lambda x-5\lambda y+\mu z-\mu$:

$$\frac{2x_0-y_0-2}{4\lambda}=\frac{-x_0+5y_0+3z_0-\frac{1}{2}}{-5\lambda}=\frac{3y_0+2z_0-1}{\mu}=\frac{-2x_0-\frac{1}{2}y_0-z_0}{-\mu}$$

Звідси так само маємо

$$5(2x_0-y_0-2)=4\left(x_0-5y_0-3z_0+\frac{1}{2}\right)$$

(це вірно і при $\lambda=0$, бо тоді обидві сторони нульові) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_0+5y_0+4z_0-4=0$ і $3y_0+2z_0-1=2x_0+\frac{1}{2}y_0+z_0 \Rightarrow 4x_0-5y_0-2z_0+2=$

$=0$, і звідси $y_0=2x_0,\ z_0=1-3x_0$. Підставимо:

$$\frac{\cancel{2x_0}-\cancel{2x_0}-2}{4\lambda}=\frac{3\cdot \cancel{2x_0}+2(1-\cancel{3x_0})-1}{\mu}$$

$2\lambda=-\mu$, тобто $(\lambda,\mu)\sim(1,-2)$. Підставимо:

$$4x-5y-2z+2=0.$$

860. Знайти рівняння гіперболи з асимптотами $x-1=0$, $2x-y+1=0$, що дотикається до прямої $4x+y+5=0$.

Пам'ятаємо з 875., що рівняння пари асимптот відрізняється від рівняння гіперболи лише константою, тобто гіпербола:

$$(x-1)(2x-y+1)+C=0$$

$$2x^2-xy+x-2x+y\underbrace{-1+C}_{=:d}=0$$

$$2x^2-xy-x+y+d=0$$

Нехай $4x+y+5=0$ – дотична у $(x_0,y_0)\in$ гіперболі, тобто

$$2x_0^2-x_0y_0-x_0+y_0+d=0$$

$$(4x_0^2-2x_0y_0-2x_0+2y_0+2d=0)$$

У рівн. дотичної:

$$(4x_0 - y_0 - 1)(x - x_0) + (-x_0 + 1)(y - y_0) = 0$$

$$(4x_0 - y_0 - 1)x + (-x_0 + 1)y - 4x_0^2 + x_0y_0 + x_0 + x_0y_0 - y_0 = 0$$

$$(\cdot 4x_0^2 - 2x_0y_0 - x_0 + y_0 = x_0 - y_0 - 2d)$$

$$(4x_0 - y_0 - 1)x + (-x_0 + 1)y - x_0 + y_0 + 2d = 0$$

Збігається з $4x + y + 5 = 0$:

$$\frac{4x_0 - y_0 - 1}{4} = \frac{-x_0 + 1}{1} = \frac{-x_0 + y_0 + 2d}{5}$$

$$4x_0 - y_0 - 1 = -4x_0 + 4 \Rightarrow 8x_0 - y_0 - 5 = 0$$

$$-5x_0 + 5 = -x_0 + y_0 + 2d \Rightarrow 4x_0 + y_0 - 5 + 2d = 0$$

$$\begin{cases} 8x_0 - y_0 - 5 = 0 \\ 4x_0 + y_0 - 5 + 2d = 0 \end{cases}$$

$$12x_0 - 10 + 2d = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{5-d}{6} \Rightarrow y_0 = 8x_0 - 5 =$$

$$= \frac{20 - 4d}{3} - 5 = \frac{5 - 4d}{3}.$$

Підставимо:

$$2 \cdot \left(\frac{5-d}{6}\right)^2 - \left(\frac{5-4d}{3}\right)\left(\frac{5-d}{6}\right) - \frac{5-d}{6} + \frac{5-4d}{3} + d = 0$$

$$\frac{1}{18}(\cancel{25} - 10d + d^2 - \cancel{25} + 25d - 4d^2 - 15 + 3d +$$

$$+ 30 - 24d + 18d) = 0$$

$$-3d^2 + 12d + 15 = 0$$

$$d^2 - 4d - 5 = 0.$$

$$d = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3$$

$$d = -1, \ d = 5.$$

Але $d=-1$ відповідає $c=0$, тобто це пара асимптот (тоді $(x_0,y_0)=(1,3)$, тобто точка їх перетину - центр гіперболи, де $F'_x=F'_y=0$). Тому $d=5$. Рівняння:

$$2x^2-xy-x+y+5=0.$$

1106. Знайти рівн. діам. площини поверхні $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} = 2z$, що прох. через пряму $\begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases}$, і напрямок спряжених до неї хорд (до якого вона спряжена).

Пл., що спряжена до (λ, μ, ν) відн. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} - 2z = 0$:

$$\lambda \frac{x}{6} - \mu \frac{y}{9} - \nu = 0.$$

Проходить через $\begin{cases} x = y \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$:

$-\nu = 0$, $\frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{9} = 0 \Rightarrow (\lambda, \mu, \nu) \sim (2, 3, 0)$,

рівн.: $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 0$; $x - y = 0$.

Або використати жмуток площин.

1079. Знайти дотичні площини до поверхні

$4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$, що пар. $x+2y+z=0$.

Дот. площина у $(x_0, y_0, z_0) \in$ поверхні:

$$(4x_0+2z_0)(x-x_0)+(6y_0-4)(y-y_0)+(2x_0+4z_0-2)(z-z_0)=0$$

$$(4x_0+2z_0)x+(6y_0-4)y+(2x_0+4z_0-2)z-4x_0^2-6y_0^2-4z_0^2-4x_0z_0+$$

$$+4y_0+2z_0=0$$

$$(4x_0+2z_0)x+(6y_0-4)y+(2x_0+4z_0-2)z-4y_0-2z_0+3=0$$

$\parallel x+2y+z=0$!

$$\frac{4x_0+2z_0}{1}=\frac{6y_0-4}{2}=\frac{2x_0+4z_0-2}{0}$$

Залишилося розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x_0-3y_0+2z_0+2=0 \\ x_0+2z_0-1=0 \\ 4x_0^2+6y_0^2+4z_0^2+4x_0z_0-8y_0-4z_0+3=0 \end{cases}$$

і підставити розв'язки у рівн. площини.