теся у цьому самостійно). Довільна лінійчата поверхня має параметризацію

$$r(u,v) = \rho(u) + v\,a(u),$$

де напрямна ρ – регулярна крива, а вектор-функція $a \neq 0$ задає поле напрямних векторів прямолінійних твірних. Часто вважають $|a| = 1$, але тут це нам не знадобиться, також ми не будемо вважати параметр u кривої ρ натуральним. Маємо

$$r_u = \rho' + v\,a',$$

$$r_v = a,$$

$$[r_u, r_v] = [\rho', a] + v\,[a', a].$$

Спробуйте самостійно дослідити (аналогічно до міркувань у попередній задачі), за яких умов $[r_u, r_v] \neq 0$, тобто які точки є регулярними. Далі вважаємо, що маємо справу лише з такими точками. Отже, нехай дотична площина зберігається уздовж кожної прямолінійної твірної поверхні, тобто координатної лінії $u = u_0$ (у цьому випадку також говорять, що ця лінійчата поверхня розгортається). З цього випливає, що напрямок її нормального вектора $[r_u, r_v]$ при фіксованому u не залежить від v. І навпаки, якщо напрямок цього вектора зберігається, то, оскільки дотичні площини при різних v повинні містити цю прямолінійну твірну (див. зауваження наприкінці попередньої задачі), вони всі співпадають.

Отже, умова збереження дотичної площини уздовж прямолінійних твірних еквівалентна збереженню напрямку вектор-функції $v \mapsto [r_u, r_v] \neq 0$ для кожного фіксованого u. У задачі 1.5 з теорії кривих встановлено, що ця умова, в свою чергу, еквівалентна тому, що

$$0 = [[r_u, r_v], [r_u, r_v]_v] = [[\rho', a] + v\,[a', a], [a', a]] = [[\rho', a], [a', a]] =$$

$$= \langle [\rho', a], a\rangle a' - \langle [\rho', a], a'\rangle a = -(\rho', a, a')a.$$

де у передостанній рівності використано формулу подвійного векторного добутку. Таким чином, оскільки $a \neq 0$, наша лінійчата поверхня розгортається тоді й тільки тоді, коли $(\rho', a, a') = 0$, тобто вектори ρ', a і a' компланарні (це можна було встановити і з чисто геометричних міркувань – спробуйте це зробити). Це і потрібно було довести.

Зокрема, для поверхні дотичних з попередньої задачі ця умова виконується, бо ρ' і a колінеарні, а для циліндричних поверхонь (зокрема площин) – бо $a' = 0$. Ще один клас таких поверхонь складають конічні (перевірте це, використавши параметризацію, що була знайдена в задачі 2.11). Виявляється, що локально (тобто в деякому околі кожної точки) будь-яка лінійчата поверхня, що розгортається, відноситься до одного з перелічених класів, (див., наприклад, П.К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, 3-е изд., с. 294-307).

Задача 3.17. Нехай усі нормалі деякої поверхні, що параметризована вектор-функцією

$$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

проходять через фіксовану точку $(x_0, y_0, z_0) = r_0$. Як ми бачили, рівняння цих нормалей мають вигляд

$$\frac{x - x(u,v)}{[r_u, r_v]^1(u,v)} = \frac{y - y(u,v)}{[r_u, r_v]^2(u,v)} = \frac{z - z(u,v)}{[r_u, r_v]^3(u,v)},$$

отже за умовою в усіх точках поверхні маємо

$$\frac{x_0 - x(u,v)}{[r_u, r_v]^1(u,v)} = \frac{y_0 - y(u,v)}{[r_u, r_v]^2(u,v)} = \frac{z_0 - z(u,v)}{[r_u, r_v]^3(u,v)}.$$

Це означає, що вектор $r_0 - r$ колінеарний $[r_u, r_v]$. Тому

$$\frac{\partial}{\partial u}\langle r_0 - r, r_0 - r\rangle = -2\langle r_u, r_0 - r\rangle = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle r_0 - r, r_0 - r\rangle = -2\langle r_v, r_0 - r\rangle = 0.$$

Оскільки r задана на зв'язній множині, звідси випливає, що функція $|r-r_0|^2 = \langle r-r_0, r-r_0\rangle$ постійна і дорівнює якомусь $R^2 \geqslant 0$ (можемо вважати, що $R > 0$, бо інакше поверхня вироджиться в точку r_0 і не буде регулярною). Це означає, що поверхня є областю на сфері з центром у r_0 радіуса R (у т.ч. всією сферою). Обернене, звичайно, також вірне: нормалі поверхні, що є областю на сфері, перетинаються у центрі цієї сфери.

Задача 5.1. Знайдемо першу фундаментальну форму довільної поверхні обертання. У таких задачах будемо вважати, не обмежуючи суттєво загальність (див. нижче), що віссю цієї поверхні є Oz, тому маємо справу з параметризацією з задачі 2.4:

$$r(u, v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u)),$$

де для регулярності нам потрібно виконання умов $f \neq 0$ і $f'^2 + g'^2 > 0$ (див. задачу 3.13). Нагадаємо, що перша фундаментальна (квадратична) форма регулярної поверхні – це обмеження на її дотичні площини евклідового скалярного добутку $\mathbb{R}^3$. На практиці обчислити цю форму означає обчислити її коефіцієнти у базисі $\{r_u, r_v\}$, що відповідає обраній параметризації. Згадаємо, що для нашої поверхні

$$r_u = (f'\cos v,\ f'\sin v,\ g'),$$

$$r_v = (-f\sin v,\ f\cos v,\ 0).$$

Тому коефіцієнтами першої форми є

$$g_{11} = \langle r_u, r_u\rangle = (f'\cos v)^2 + (f'\sin v)^2 + g'^2 = f'^2 + g'^2,$$

$$g_{12} = \langle r_u, r_v\rangle = -ff'\cos v\sin v + ff'\sin v\cos v + 0 = 0,$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v\rangle = (-f\sin v)^2 + (f\cos v)^2 + 0 = f^2.$$

Саму форму при цьому записують у вигляді

$$I = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2 = (f'(u)^2 + g'(u)^2)\,du^2 + f(u)^2\,dv^2$$

або

$$ds^2 = (f'(u)^2 + g'(u)^2)\,du^2 + f(u)^2\,dv^2.$$

Сенс цих позначень розкривається у лекції. Зауважимо, що поверхню обертання з будь-якою іншою віссю можна отримати з нашої рухом евклідового простору $\mathbb{R}^3$, тому при аналогічному виборі координат (u – параметр напрямної кривої, v – кут обертання) її перша форма буде такою ж.

Задача 5.4. У цій задачі потрібно перевірити, що першу фундаментальну форму поверхні обертання можна привести до вигляду

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2,$$

тобто обрати параметризацію (локальні координати) так, що у відповідному базисі форма прийме вказаний вигляд. Тут для цього достатньо, як ми це вже робили у задачі 3.13, за u взяти натуральний параметр напрямної кривої $\rho = (f, 0, g)$ поверхні. Тоді $f'^2 + g'^2 = 1$, і в силу попередньої задачі перша форма прийме вигляд

$$ds^2 = du^2 + f(u)^2\,dv^2.$$

Це і є потрібний нам вираз, де $G = f^2$. Це приклад т.зв. напівгеодезичної параметризації поверхні (коли $g_{12} = 0$ і $g_{11} = 1$ або $g_{22} = 1$).

Задача 5.2. Знайдемо першу форму (прямого) гелікоїда – поверхні з параметризацією

$$r(u, v) = (u\cos v,\, u\sin v,\, a\,v),$$

де $a > 0$. Ми вже досліджували її у задачі 3.4, де встановили, що вона регулярна, і

$$r_u = (\cos v,\, \sin v,\, 0),$$

$$r_v = (-u\sin v,\, u\cos v,\, a).$$

Тому коефіцієнти першої форми гелікоїда мають вигляд

$$g_{11} = \langle r_u, r_u\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 0 = 1,$$

$$g_{12} = \langle r_u, r_v\rangle = -u\cos v\sin v + u\sin v\cos v + 0 = 0,$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v\rangle = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 + a^2 = u^2 + a^2.$$

Таким чином, для гелікоїда координати також напівгеодезичні:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2.$$

Задача 5.3а. Розглянемо поверхню з наступною параметризацією у векторній формі:

$$r(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda\, e.$$

Як ми знаємо з задачі 2.7, це циліндрична поверхня, напрямною якої є регулярна крива ρ, а прямолінійні твірні напрямлені уздовж постійного вектора $e \neq 0$. Тут нам зручно буде з самого початку вважати параметр s натуральним для ρ. Тоді (тут і далі використовуємо стандартні позначення з теорії кривих)

$$r_s = \rho' = \tau,$$

$$r_\lambda = e,$$

Зокрема, ця поверхня регулярна, якщо $\tau(s)$ і e неколінеарні для будь-якого s. Далі маємо

$$g_{11} = \langle r_s, r_s\rangle = 1,$$

$$g_{12} = \langle r_s, r_\lambda\rangle = \langle \tau, e\rangle,$$
$$g_{22} = \langle r_\lambda, r_\lambda\rangle = \langle e, e\rangle = |e|^2.$$

Таким чином, перша форма циліндричної поверхні має вигляд

$$I = ds^2 + 2\langle \tau(s), e\rangle\, ds\, d\lambda + |e|^2\, d\lambda^2.$$

Ми можемо, не обмежуючи загальність, вважати, що $|e| = 1$, тому

$$I = ds^2 + 2\langle \tau(s), e\rangle\, ds\, d\lambda + d\lambda^2.$$

Якщо крім того e ортогональний до τ уздовж напрямної кривої, тобто циліндр прямий, перша форма набуває вигляду

$$I = ds^2 + d\lambda^2.$$

Неважко перевірити, що таку ж першу форму має будь-яка евклідова площина, якщо її параметризувати афінними координатами, що відповідають ортонормованому базису $\{a, b\}$ (тобто функцією $r = r_0 + s\,a + \lambda\, b$). Як відомо з лекцій, це означає, що прямі циліндри локально ізометричні площинам в околі кожної точки.

Задача 5.3b. Тепер розглянемо поверхню з параметризацією

$$r(s, v) = v\,\rho(s),$$

де $\rho \neq 0$ – знову регулярна крива з натуральним параметром s. З міркувань задачі 2.11 випливає, що це конічна поверхня з вершиною у початку координат 0 і напрямною ρ (перевірте це). Для неї

$$r_s = v\,\rho' = v\,\tau,$$

$$r_v = \rho.$$

Регулярність порушується у вершині (бо там $v = 0$) і у точках, де вектор-функція ρ колінеарна її похідній τ (як знаємо з задачі 1.5 з теорії кривих, ρ зберігає напрямок на проміжках, де це так, отже конус вироджується в пряму). Маємо

$$g_{11} = \langle r_s, r_s\rangle = v^2,$$

$$g_{12} = \langle r_s, r_v\rangle = v\langle \tau, \rho\rangle,$$

$$g_{22} = \langle r_v, r_v\rangle = \langle \rho, \rho\rangle = |\rho|^2,$$

отже

$$I = v^2\, ds^2 + 2v\langle \tau(s), \rho(s)\rangle\, ds\, dv + |\rho(s)|^2\, dv^2.$$

Зазвичай вважають, не особливо обмежуючи загальність, що $|\rho| = 1$. Геометрично це означає, що у якості напрямної кривої ми беремо перетин конуса з одиничною сферою з центром у його вершині 0. Для такої параметризації $\langle \tau, \rho\rangle = 0$ в силу задачі 1.4 з теорії кривих, отже

$$I = v^2\, ds^2 + dv^2.$$

Це теж приклад напівгеодезичної параметризації.

Задача 5.10. Тепер розглянемо застосування першої форми. Нам відомо, що для даної поверхні вона має вигляд

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2,$$

де $a > 0$, тобто

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = u^2 + a^2.$$

Потрібно знайти периметр та внутрішні кути криволінійного трикутника, сторони якого утворені кривими на поверхні $u = \pm\frac{av^2}{2}$ і $v = 1$ (див. рисунок знизу). Цей трикутник має вершини A $(u = 0, v = 0)$, B $\left(u = \frac{a}{2}, v = 1\right)$ і C $\left(u = -\frac{a}{2}, v = 1\right)$. Зауважимо, що нам не потрібно знати, як саме виглядає поверхня: лише її першу форму та вигляд трикутника у локальних координатах.

Нагадаємо деякі загальні формули. Нехай M – регулярна поверхня в $\mathbb{R}^3$, що локально параметризована вектор-функцією $r\colon (u, v) \mapsto r(u, v)$, і перша форма якої у цій параметризації має вигляд

$$g_{11}(u, v)\, du^2 + 2g_{12}(u, v)\, du\, dv + g_{22}(u, v)\, dv^2.$$

Нехай $\gamma\colon [a, b] \to M$ – гладкий або принаймні кусково гладкий шлях у цій поверхні (точніше, в області параметризації r), що у локальних координатах (u, v) задається функціями $(u(t), v(t))$, тобто як крива в $\mathbb{R}^3$ має вигляд $t \mapsto r(u(t), v(t))$. Тоді її дотичний вектор матиме вигляд

$$\gamma' = u'\, r_u + v'\, r_v.$$

Далі у такому випадку ми можемо писати просто $\gamma = (u, v)$ і $\gamma' = (u', v')$. Тоді довжина цього шляху (дуги) дорівнює

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{g_{11}(u(t), v(t))\, u'(t)^2 + 2g_{12}(u(t), v(t))\, u'(t)\, v'(t) + g_{22}(u(t), v(t))\, v'(t)^2}\, dt.$$

У нашому випадку сторона AB трикутника – це крива $u = \frac{av^2}{2}$, де $v \in [0, 1]$, що може бути параметризована як $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, t\right)$, $t \in [0, 1]$. Для неї $\gamma'(t) = (at, 1)$. Отже, ця сторона дорівнює

$$l(AB) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 \cdot (at)^2 + 0 + \left(\left(\frac{at^2}{2}\right)^2 + a^2\right) \cdot 1^2}\, dt = a \int\limits_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{t^4}{4} + 1}\, dt =$$

$$= a \int\limits_0^1 \left(\frac{t^2}{2} + 1\right) dt = a \left(\frac{t^3}{6} + t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7a}{6}.$$

Аналогічно, сторона AC – крива $u = -\frac{av^2}{2}$, де $v \in [0, 1]$, тобто $\mu(t) = \left(-\frac{at^2}{2}, t\right)$, $t \in [0, 1]$ і $\mu'(t) = (-at, 1)$. Тому так само

$$l(AC) = \int\limits_0^1 \sqrt{(-at)^2 + \left(\left(-\frac{at^2}{2}\right)^2 + a^2\right)}\, dt = \frac{7a}{6}.$$

Нарешті, сторона трикутника BC – це координатна лінія $v = 1$, $u \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, що параметризується як $\nu(t) = (t, 1)$, $t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ і для якої $\nu'(t) = (1, 0)$. Тому

$$l(BC) = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1^2 + 0 + 0}\, dt = t\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = a.$$

Зокрема, периметр трикутника дорівнює $l(AB) + l(AC) + l(BC) = \frac{10a}{3}$.

Нехай тепер γ і μ – криві у поверхні M, що перетинаються у точці $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p \in M$ з локальними координатами (u_0, v_0). Тепер позначимо локальні параметризації цих кривих через $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ і $\mu(t) = (\mu^1(t), \mu^2(t))$ відповідно. Кут між кривими в p – це просто кут між ними в $\mathbb{R}^3$, тобто кут між їхніми дотичними векторами в p. Його косинус дорівнює

$$\frac{\langle \gamma'(t_0), \mu'(s_0) \rangle}{|\gamma'(t_0)|\, |\mu'(s_0)|} = \frac{\sum\limits_{i,\, j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\, (\gamma^i)'(t_0)\, (\mu^j)'(s_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,\, j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\, (\gamma^i)'(t_0)\, (\gamma^j)'(t_0)} \sqrt{\sum\limits_{i,\, j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\, (\mu^i)'(s_0)\, (\mu^j)'(s_0)}}.$$

В нашій задачі нам потрібно ще слідкувати за тим, щоб кути були внутрішніми, відповідним чином обираючи параметризації. Так, у точці A для обраних раніше параметризацій сторін $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, t\right)$ і $\mu(s) = \left(-\frac{as^2}{2}, s\right)$ маємо $\gamma(0) = \mu(0) = (0, 0) = A$, і дотичні вектори $\gamma'(0) = (0, 1)$, $\mu'(0) = (0, 1)$ збігаються, отже $\angle A = 0$.

У B, щоб отримати внутрішній кут, оберемо параметризації, для яких дотичні вектори напрямлені вліво на площині (u, v) (див. малюнок): $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, -t\right)$ і $\nu(s) = (-s, 1)$, отже $\gamma'(t) = (at, -1)$ і $\nu'(s) = (-1, 0)$. Дійсно, для них точка перетину $\gamma(-1) = \nu\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 1\right) = B$, і $\gamma'(-1) = (-a, -1)$, $\nu'\left(-\frac{a}{2}\right) = (-1, 0)$ мають від'ємні перші координати. Таким чином,

$$\left\langle \gamma'(-1), \nu'\left(-\frac{a}{2}\right) \right\rangle = g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, (-a)\cdot(-1) + g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, ((-a)\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)) + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, (-1)\cdot 0 =$$

$$= 1 \cdot a + 0 + 0 = a,$$

$$|\gamma'(-1)| = \sqrt{g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, (-a)^2 + 2g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, (-a)\cdot(-1) + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{1 \cdot a^2 + 0 + \left(\frac{a^2}{4} + a^2\right) \cdot 1} = \frac{3a}{2},$$

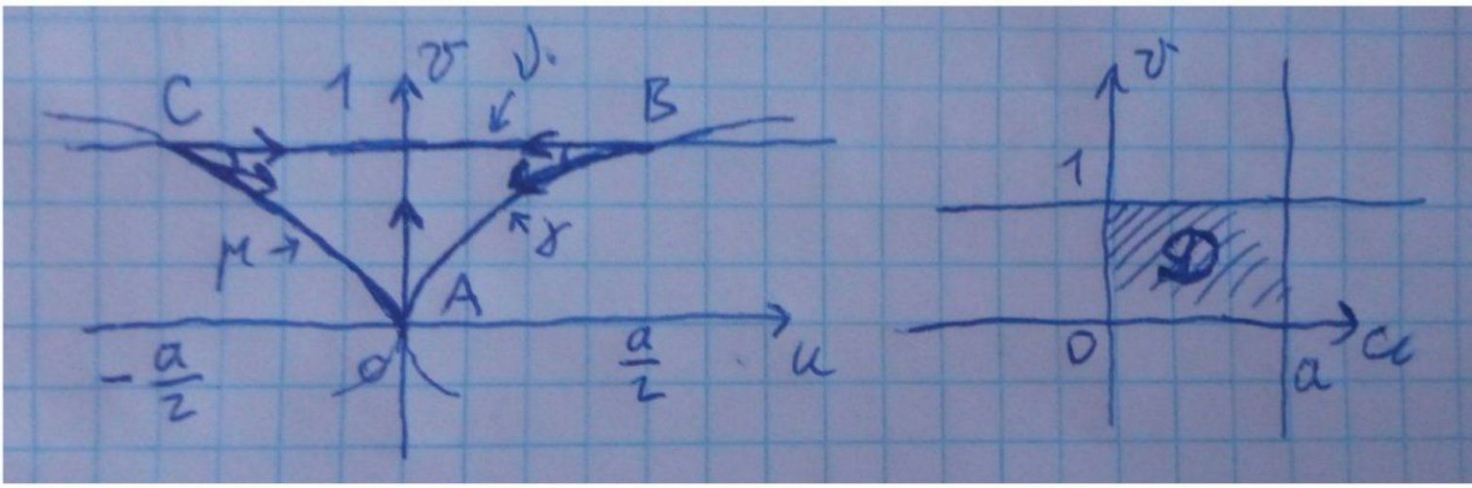
$$\left|\nu'\left(-\frac{a}{2}\right)\right| = \sqrt{g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, (-1)^2 + 2g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, (-1)\cdot 0 + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\, 0^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1,$$

отже

$$\cos \angle B = \frac{a}{\frac{3a}{2} \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Аналогічним чином у C оберемо параметризації, дотичні вектори яких "дивляться" вправо: $\mu(t) = \left(-\frac{at^2}{2}, -t\right)$ і $\nu(s) = (s, 1)$, для яких $\mu'(t) = (-at, -1)$ і $\nu'(s) = (1, 0)$. Тоді точка перетину $\mu(-1) = \nu\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}, 1\right) = C$, у ній перші координати дотичних векторів $\mu'(-1) = (a, -1)$ і $\nu'\left(-\frac{a}{2}\right) = (1, 0)$ додатні. Аналогічно першому куту обчислюємо:

$$\cos\angle C = \frac{1\cdot a + 0 + 0}{\sqrt{1\cdot a^2 + 0 + \left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)\cdot 1}\sqrt{1+0+0}} = \frac{2}{3}.$$



Задача 5.12. Знайдемо на гелікоїді з задачі 5.2 площу області D, що у координатах (u, v) обмежена лініями $u = 0$, $u = a$, $v = 0$ і $v = 1$ (див. ілюстрацію зверху).

У загальному випадку площа області D, що міститься в області параметризації r регулярної поверхні M з першою формою

$$g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2,$$

знаходиться за формулою

$$S(D) = \int\limits_D \sqrt{\det G}\,du\,dv = \int\limits_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv,$$

де

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

позначає матрицю першої форми. Це те, що в аналізі зветься поверхневим інтегралом першого роду (від постійної функції 1). Строго кажучи, інтегрування тут іде не по D, а по її прообразу $r^{-1}(D)$ у площині (u, v), але ми трохи спрощуємо позначення. Зауважимо також, що $\sqrt{\det G} = |[r_u, r_v]|$ (доведіть це самостійно).

Ми вже знаємо, що перша форма гелікоїда має вигляд

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2$$

(до речі, це форма з попередньої задачі). Тому

$$S(D) = \int\limits_D \sqrt{1 \cdot (u^2 + a^2) - 0^2}\, du\, dv = \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\, du \int\limits_0^1 dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+a^2} + a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right)\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a^2 + a^2 \ln\left(a\left(1+\sqrt{2}\right)\right) - a^2 \ln a\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Задача 5.3с. Для загальної лінійчатої поверхні маємо параметризацію

$$r(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda\, e(s),$$

де s – регулярний параметр напрямної ρ. Крім того, не обмежуючи загальність, будемо відразу вважати напрямне поле твірних одиничним ($|e| = 1$), як вказано в умові. Тоді

$$r_s = \rho' + \lambda\, e' = \tau + \lambda\, e',$$

$$r_\lambda = e,$$

Тоді в околі кожної регулярної точки маємо

$$g_{11} = \langle r_s, r_s \rangle = |\tau + \lambda\, e'|^2 = 1 + 2\lambda \langle \tau, e' \rangle + \lambda^2 |e'|^2,$$

$$g_{12} = \langle r_s, r_\lambda \rangle = \langle \tau + \lambda\, e', e \rangle = \langle \tau, e \rangle,$$
$$g_{22} = \langle r_\lambda, r_\lambda \rangle = \langle e, e \rangle = |e|^2 = 1.$$

Тут ми використали, що $|e| = 1$, а отже $\langle e', e \rangle = 0$. Таким чином, перша форма має вигляд

$$I = (1 + 2\lambda \langle \tau(s), e'(s) \rangle + \lambda^2 |e'(s)|^2)\, ds^2 + 2\langle \tau(s), e(s) \rangle\, ds\, d\lambda + d\lambda^2.$$

Зокрема, для гелікоїда $\rho(s) = (0, 0, s)$ – вертикальна пряма з натуральним параметром $s = a\, v$, $e(s) = \left(\cos \frac{s}{a}, \sin \frac{s}{a}, 0\right)$ і $u = \lambda$; для циліндра $e' = 0$; для конуса $e = -\rho$ і $v = 1 - \lambda$. Якщо вважати, що напрямна ортогональна до твірних, тобто $\langle \tau, e \rangle = 0$, то знову маємо напівгеодезичну параметризацію:

$$I = (1 + 2\lambda \langle \tau(s), e'(s) \rangle + \lambda^2 |e'(s)|^2)\, ds^2 + d\lambda^2.$$

Розглянемо ще випадок поверхні дотичних (торса) натурально параметризованої кривої ρ. Для неї $e = \tau$, отже в силу формул Френе $e' = k\nu$. Звідси маємо, що $\langle \tau, e' \rangle = 0$, $|e'|^2 = k^2$ і $\langle \tau, e \rangle = 1$. Підставляючи у загальну формулу, маємо

$$I = (1 + \lambda^2 k(s)^2)\, ds^2 + 2 ds\, d\lambda + d\lambda^2.$$

Задача 5.3d. Розглянемо параметризацію

$$r(s, \varphi) = \rho(s) + \cos\varphi\, \nu(s) + \sin\varphi\, \beta(s),$$

що, як ми знаємо, відповідає трубчатій поверхні радіуса 1 навколо кривої ρ з натуральним параметром s. Згадаємо, що в силу формул Френе

$$r_s = (1 - k\cos\varphi)\, \tau - \varkappa \sin\varphi\, \nu + \varkappa \cos\varphi\, \beta,$$

$$r_\varphi = -\sin\varphi\, \nu + \cos\varphi\, \beta,$$

і регулярними є точки, де $1 - k\cos\varphi \neq 0$. В околах таких точок в силу ортонормованості репера Френе маємо

$$g_{11} = \langle r_s, r_s \rangle = (1 - k\cos\varphi)^2 + (-\varkappa\sin\varphi)^2 + (\varkappa\cos\varphi)^2 = (1 - k\cos\varphi)^2 + \varkappa^2,$$

$$g_{12} = \langle r_s, r_\varphi \rangle = \varkappa\sin^2\varphi + \varkappa\cos^2\varphi = \varkappa,$$
$$g_{22} = \langle r_\varphi, r_\varphi \rangle = (-\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1,$$

отже

$$I = \left((1 - k(s)\cos\varphi)^2 + \varkappa(s)^2\right) ds^2 + 2\varkappa(s)\, ds\, d\varphi + d\varphi^2.$$

Зокрема, ці координати напівгеодезичні для пласких кривих (де $\varkappa = 0$).