def. Нормальним лапласіаном підмноговида (M,g) назвемо відображення $\Delta^{\perp}$, що гл. норм. полю ξ ставить у відп.

$$\Delta^{\perp}\xi := \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla^{\perp}_{E_i}\nabla^{\perp}_{E_i}\xi - \nabla^{\perp}_{\nabla_{E_i}E_i}\xi\right)$$ – теж гладке норм. поле;

тут $\{E_i\}_{i=1}^n$ – ортонорм. лок. репер (M, g).

<u>Впр.</u> Перевірити коректність (аналогічно до звичайного лапласіана).

<u>Crl.</u> Друга варіація об'єму $\mathcal{D} \subset M$ мін. підмноговида (M, φ) для норм. варіації, що задається полем Y:

$$\delta^2 Vol(\mathcal{D}) = -\int_{\mathcal{D}} \bar{g}(Y, LY)\, dV_g, \text{ де}$$

$$LY := \Delta^{\perp} Y + \underbrace{\sum_{i=1}^n (\bar{R}(Y, E_i)E_i)^{\perp} + \sum_{i,j=1}^n \bar{g}(B(E_i, E_j), Y)\, B(E_i, E_j)}_{SY \text{ (іноді наз. оператором Саймонса)}},$$

<u>def.</u> (або оператором стійкості)

L звуть оператором Якобі, а поля Y з $LY = 0$ – полями Якобі.

<u>Rem.</u> Пор. з полями Якобі уздовж геодезичної.

<u>Rem.</u> Позначимо $\mathfrak{N}_0 M$ – простір (над $\mathbb{R}$) гладких нормальних полів (M, φ) з компактним носієм (очевидно, $\forall\, Y, Z \in \mathfrak{N}_0 M$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda Y + \mu Z \in \mathfrak{N}_0 M$). Тоді кожен з доданків у виразі для L і він сам – лінійні

оператори $\mathcal{N}_0 M \to \mathcal{N}_0 M$.

<u>def.</u> $I_D : \mathcal{N}_0 M \times \mathcal{N}_0 M \to \mathbb{R} : Y, Z \mapsto I_D(Y, Z) := -\int_D \bar{g}(Y, LZ)\, dV_g$

наз. індексною формою $D \subset M$. <u>Rem.</u> Ан-но індексній ф. геодезичної

<u>Rem.</u> Оскільки $Y, Z \in \mathcal{N}_0 M$, вона визначена і для D з

неконп. $\overline{D}$ (але ∂D нсорд. міри 0), зокрема, для $D = M$.

Очевидно, це білінійна форма. з $\operatorname{supp} Y, \operatorname{supp} Z \subset \operatorname{Int} D$

<u>Впр.</u> I_D симетрична: $I_D(Y, Z) = I_D(Z, Y)$ $\forall Y, Z \in \mathcal{N}_0 M$

(іншими словами, L самоспряжений відн. скалярного

добутку $\int_D \bar{g}(\cdot, \cdot)\, dV_g$).

<u>def.</u> Нехай (M, φ) – мін. підмноговид у $(\bar{M}, \bar{g})$. Кубовна

$D \subset M$ наз. стійкою, якщо $\delta^2 \mathrm{Vol}(D) \geq 0$ $\forall$ нормаль-

ної варіації з носієм D. (M, φ) наз. стійким,

якщо кожна кубовна $D \subset M$ стійка.

<u>Rem.</u> Очевидно D_1 нестійка і $D_1 \subset D_2 \Rightarrow D_2$ нестійка.

Сл. (M, φ) стійкий ⟺ I_M невід'ємно визначена

і полів з носіями у Int D

тобто $\forall\, Y \in \mathfrak{N}_0 M$ $\quad I_M(Y,Y) \geq 0$ (і ан-но для D).

▷ Дійсно, для Y з $\operatorname{supp} Y \subset \operatorname{Int} D$, що відп. варіації G,

$$\delta^2 \operatorname{Vol}(D) = I_D(Y,Y) = I_M(Y,Y) \geq 0 .$$

Звідси маємо ⟸, ⟹ випливає з ∃ варіації $\forall\, Y \in \mathfrak{N}_0 M$ в силу Rem. вище. △ def. Далі називаємо D (відп. (M,φ)) стійк., якщо I_D (відп. I_M) ≥ 0 визначена навіть для неорієнтовних.

Ex1. Усі підмноговиди, що мінімізують об'єм (зокрема явно задані гіперповерхні над опуклою $U \subset \mathbb{R}^n$) стійкі (просто з def.)

тоді обмежимося

але [illegible] кубовичних D, що орієнтовні, тобто по них можна інтегрувати

2. Цілком геодезичні підмноговиди у просторах з $\bar{R} = 0$ (тобто лок. ізометричних E^{n+q}, зокрема області аф. підпросторів E^{n+q}): для них $L = \Delta^\perp$, і

$$I_M(Y,Y) = -\int_M \bar{g}(Y, \Delta^\perp Y)\, dV_g = \left[\begin{smallmatrix}\text{див.}\\ \text{вище}\end{smallmatrix}\right] = \int_M \left(\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla^\perp_{E_i} Y, \nabla^\perp_{E_i} Y)\right) dV_g \geq 0$$

$\forall\, Y \in \mathfrak{N}_0 M$.

(і ан-но для цілком геодезичних у многовидах ≤ 0 секц. кривини — Впр.)

<u>def.</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ зветься власним значенням (Діріхле) L, якщо $\exists\ 0 \neq Y \in \mathfrak{N}_0 M$ таке, що

$$LY + \lambda Y = 0 \quad \text{(задача Діріхле)}.$$

<u>Пр.</u> Якщо у L існує власне значення $\lambda < 0$, то (M,φ) нестійка.

▷ Для відп. поля $Y \neq 0$

$$I_M(Y,Y) = -\int_M \bar{g}(Y, -\lambda Y)\, dV_g = \lambda \underbrace{\int_M \bar{g}(Y,Y)\, dV_g}_{>0} < 0. \ ◁$$

<u>Rem.</u> Можна поповнити $\mathfrak{N}_0 M$ за допомогою аналога норми Соболева і отримати гільбертовий простір; тоді для компактного самоспр. оператора L на ньому вірна спектральна теорема: $\exists$ зліченний набір власних значень $\{\lambda_m\} \subset \mathbb{R}$, і відп. поля утворюють ортонорм. базис. Кількість від'ємних власних значень (або найбільша вимірність підпростора, на якому $I_M < 0$) тоді зветься <u>індексом Морса (M,φ)</u> (або D для $\mathfrak{N}_0 D$). З <u>Пр.</u> вище,

якщо він $\neq 0$, (M,φ) нестійка. Виявляється, що вірно і обернене: якщо індекс Морса $= 0$ (тобто $\lambda_m \geq 0 \ \forall m$), то (M,φ) стійка (випливає з того, що власні поля утв. базис).

Аналогічне поняття індекса Морса $\exists$ і для геодезичних (див., наприклад, Бурого-Залгаллер; згідно з Т. про індекс, він дор. кількості спряжених точок до даної). Умову на нульовий індекс морса переформулювати так:

<u>Pr.</u> (M,φ) стійка $\Leftrightarrow$

$$\lambda_1(L) := \inf \{ I_M(Y,Y) \mid Y \in \mathfrak{N}_0 M : \int_M \bar{g}(Y,Y) = 1 \} \geq 0.$$

▷ Див. Colding-Minicozzi; $\lambda_1(L)$ – це перше невід'ємне власне значення L (на поповненні $\mathfrak{N}_0 M$). △

<u>Rem.</u> Нехай тепер (M,φ) – мін. гіперповерхня, і на нутовній $D \subset M$ $\exists$ одиничне нормальне поле ξ (гладке), тобто $|\xi| = 1$ (тут $|\xi| = \sqrt{\bar{g}(\xi,\xi)}$). Тоді

для $\forall$ норм. поля Y з $\operatorname{supp} Y \subset \operatorname{int} D$ $Y|_D = w\xi$ для $w \in C^\infty(D)$ (можна продовжити нулем, тоді w – фінітна ф-ція на M). Для доданків LY маємо:

$$\Delta^\perp Y = \sum_{i=1}^n \left(\nabla^\perp_{E_i} \nabla^\perp_{E_i} (w\xi) - \nabla^\perp_{\nabla_{E_i} E_i} (w\xi) \right) = \left[\begin{matrix} \text{власт. } \nabla^\perp \\ \text{і } \nabla^\perp \xi = 0 \end{matrix} \right] =$$

$$= \sum_i \Big(\nabla^\perp_{E_i} \big(E_i(w)\xi + w \underbrace{\nabla^\perp_{E_i}\xi}_{=0} \big) - \nabla_{E_i} E_i(w)\xi - w \underbrace{\nabla^\perp_{\nabla_{E_i} E_i}\xi}_{=0} \Big) = \sum_i \Big(E_i(E_i(w))\xi +$$

$$+ E_i(w) \underbrace{\nabla^\perp_{E_i}\xi}_{=0} - \nabla_{E_i} E_i(w)\xi \Big) = \Delta w \, \xi$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\bar R(Y, E_i) E_i \right)^\perp = \sum_i \bar g \left(\bar R(w\xi, E_i) E_i, \xi \right) \xi = \left[\begin{matrix} \{ d_p\varphi(E_1), \ldots, d_p\varphi(E_n), \xi_p \} - \\ \text{ортонорм. базис} \\ T_{\varphi(p)} \bar M \ \forall p \in M \end{matrix} \right] =$$

$$= \overline{Ric}(w\xi, \xi)\xi$$ (тут $\overline{Ric}$ – тензор Річчі $(\bar M, \bar g)$:

$$\overline{Ric}(X, Y) = \underbrace{\sum_{a=1}^{n+1} \bar g \left(\bar R(X, F_a) F_a, Y \right)}_{\text{для ортонорм. базиса } \{F_a\}_{a=1}^{n+1}}, \text{ у нас } F_a = \left[\begin{matrix} d\varphi(E_a), & a = \overline{1,n} \\ \xi, & a = n+1 \end{matrix} \right],$$

і $\bar g \left(\bar R(w\xi, \xi)\xi, \xi \right) = 0$).

$$\sum_{i,j=1}^n \bar g \left(B(E_i, E_j), w\xi \right) B(E_i, E_j) = \left[\begin{matrix} \text{використаємо} \\ \text{скалярну II ф.ф.} \\ b: \ B = b\xi \end{matrix} \right] = \sum_{i,j=1}^n w \, b(E_i, E_j)^2 \xi.$$

$(S^{\prime\prime}Y)$

Def. $\sum_{i,j=1}^{n} b(E_i,E_j)^2 =: |b|^2$ будемо звати квадратом норми b. **Rem.** Коректність випливає з **Впр.** вище. Очевидно, $|b|^2 \geq 0$ і $|b|^2 = 0 \iff b = 0$, тобто (M,ι) цілком геодезична (або (D,ι)).

Впр. Записати $|b|^2$ в лок. коорд.

Ex. При $n=2$ позначимо $b_{ij} := b(E_i,E_j)$; тоді

$$|b|^2 = b_{11}^2 + b_{22}^2 + 2b_{12}^2 = \left[H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} b(E_i,E_i) = 0\right] = 2(b_{11}^2 + b_{12}^2) =$$
$$= -2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = -2K_{ext},$$

де K_{ext} – (зовнішня) гауссова кривина (M,ι) (знаменник $g_{11}g_{12} - g_{12}^2 = 1$ у наших позначеннях). Звичайно, $K_{ext} = k_1k_2 = -k_1^2 \leq 0$ для мінімальних.

Cor. $L(w\xi) = (\Delta w + (\overline{Ric}(\xi,\xi) + |b|^2)w)\xi =: Lw\cdot\xi$,

де $L: C^\infty(D) \to C^\infty(D)$; у цих позначеннях

$$I_D(v,w) := I_D(v\xi, w\xi) = -\int_D \bar{g}(v\xi, Lw\cdot\xi)\,dV_g = [|\xi| = 1] = -\int_D v\cdot Lw\,dV_g$$

і для відповідної варіації $\delta^2 Vol(D) = I_D(w,w)$.

Rem. Далі розглядаємо гіперповерхні (M,ι) у $(\overline{M},\bar{g})$, для яких існує глобальне гладке одиничне нормальне поле

ξ (нормальне розшарування тривіалізується); для орієнтовного $\overline{M}$ це еквівалентно орієнтовності M.

Через $C_0^\infty(M)$ позначаємо простір фінітних гл. ф-цій на M (тобто таких, що $\overline{\operatorname{supp} w}$ - компакт).

<u>def.</u> Оператором Якобі мін. гіперповерхні (M, g) з норм. полем ξ будемо називати $L : C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$:

$$Lw := \Delta w + \left(\overline{\mathrm{Ric}(\xi, \xi)} + |b|^2 \right) w,$$

а індексною формою $D \subset M$ - $I_D : C_0^\infty(M) \times C_0^\infty(M) \to \mathbb{R}$:

$$I_D(v, w) := -\int_D v\, Lw\, dV_g \qquad \text{(зокрема, визначена } I_M\text{)}.$$

<u>Cor.</u> (M, g) стійка $\Leftrightarrow$ I_M невід'ємно визначена на $C_0^\infty(M)$.
(і ан-но для $D \subset M$ і ф-цій з носієм у $\operatorname{Int} D$)

<u>Rem.</u> Для них вірно те ж, що для загального випадку. I_M білінійна і симетрична, L самоспряжений віт.

$\langle v, w \rangle := \int_M v w \, dV_g$; індекс Морса і критерій стійкості в термінах власних значень визначаються аналогічно (див. також Colding - Minicozzi).

<u>Ex.</u> Катеноїд : $r: \mathbb{R} \times S^1 \to E^3 : (u^1, e^{iu^2}) \mapsto (\operatorname{ch} u^1 \cos u^2, \operatorname{ch} u^1 \sin u^2, u^1)$.

$r_1 = (\operatorname{sh} u^1 \cos u^2, \operatorname{sh} u^1 \sin u^2, 1)$,

$r_2 = (-\operatorname{ch} u^1 \sin u^2, \operatorname{ch} u^1 \cos u^2, 0)$.

I ф.ф : $(g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle)$ $g_{11} = g_{22} = \operatorname{ch}^2 u^1$, $g_{12} = 0$ (зокрема, координати ізотермічні, як і повинно бути згідно теорем. Веєрштрасса)

Глобальне одиничне норм. поле $\xi = \frac{1}{\operatorname{ch} u^1} (\cos u^2, \sin u^2, -\operatorname{sh} u^1)$

$r_{11} = (\operatorname{ch} u^1 \cos u^2, \operatorname{ch} u^1 \sin u^2, 0)$

$r_{12} = (-\operatorname{sh} u^1 \sin u^2, \operatorname{sh} u^1 \cos u^2, 0)$

$r_{22} = (-\operatorname{ch} u^1 \cos u^2, -\operatorname{ch} u^1 \sin u^2, 0)$

II ф.ф : $b_{ij} = \langle r_{ij}, \xi \rangle$: $b_{11} = -b_{22} = 1$, $b_{12} = 0$.

Зокрема, $H = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij} = 0$.

Ортонормований базис: $E_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} u^1}\frac{\partial}{\partial u^1}$, $E_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} u^1}\frac{\partial}{\partial u^2}$.

Тому $|b|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{2}\left(b(E_i,E_j)\right)^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^4 u^1}\left(\overset{b_{11}^2}{\overset{\parallel}{1}} + \overset{b_{12}^2}{\overset{\parallel}{0}} + \overset{b_{21}^2}{\overset{\parallel}{0}} + \overset{b_{22}^2}{\overset{\parallel}{1}}\right) = \frac{2}{\operatorname{ch}^4 u^1}$

(і дійсно це $= -2K = -2\,\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$, $K = K_{ext}$, бо поверхня у E^3).

Оскільки коорд. ізотермічні, $\Delta = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u^1}\left(\frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2}\right)$

Отже, для $w \in C^\infty(D)$:

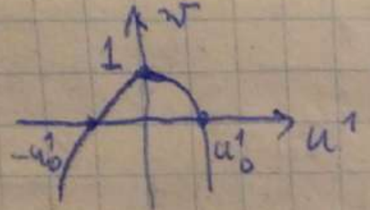
$$Lw = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u^1}\left(\frac{\partial^2 w}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 w}{(\partial u^2)^2} + \frac{2w}{\operatorname{ch}^2 u^1}\right).$$

Спочатку знайдемо поля Якобі $w\xi$, тобто розв'яжемо $Lw = 0$. Обмежимося ф-ціями $w = w(u^1)$:

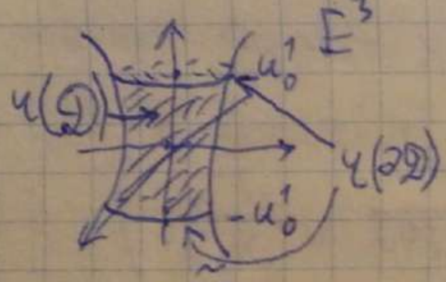
$$w'' + \frac{2w}{\operatorname{ch}^2 u^1} = 0$$

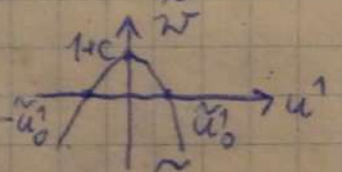
Розв'язки мають вигляд $w = C_1 \operatorname{th} u^1 + C_2\left(\operatorname{th} u^1 \cdot u^1 - 1\right)$.

Зокрема, для $w = 1 - u^1 \operatorname{th} u^1$ $w(0) = 1$, ф-ція парна, і, оскільки $t \operatorname{th} t$ зростає і $\xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, $\exists\, u_0^1 > 0$: $w(\pm u_0^1) = 0$.



Тоді на циліндричний (кубовний) $\mathcal{D} = \{u^1 \in (-u^1_0, u^1_0), u^2 \in [0, 2\pi)\}$ $Y = w\xi$ — поле Якобі, і $Y|_{\partial\mathcal{D}} = 0$ (щоправда, якщо продовжити його нулем на M, порушиться гладкість; це несуттєво).

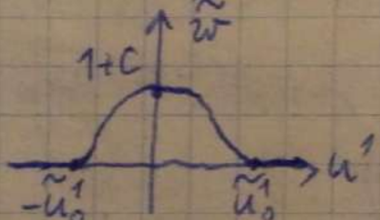




Модифікуємо w: $\tilde w := w + C$, $C \in \mathbb{R}$. Для неї

$$L\tilde w = \frac{1}{ch^2 u^1}\left((w+C)'' + \frac{2(w+C)'}{ch^2 u^1}\right) = \frac{2C}{ch^4 u^1} > 0$$

при $C>0$. Звичайно, $\tilde w$ теж парна, $= 1 + C$ в 0 і 0 при $u^1 = \pm\tilde u_0^1$, тобто $\tilde Y := \tilde w \xi$ нульове на $\partial\tilde{\mathcal{D}}$, де $\tilde{\mathcal{D}} = \{u^1 \in (-\tilde u_0^1, \tilde u_0^1)\}$. Друга варіація:



$$\delta^2 Vol(\tilde{\mathcal{D}}) = I_{\tilde{\mathcal{D}}}(\tilde w, \tilde w) = -\int_{\tilde{\mathcal{D}}} \underset{\substack{\vee\\0}}{\tilde w} \cdot \underset{\substack{\vee\\0}}{L\tilde w}\, dV_g < 0.$$

Можна навіть трохи "підправити" $\tilde w$, згладивши її біля $\partial\tilde{\mathcal{D}}$ і замінивши на 0 за межами $\tilde{\mathcal{D}}$

так, що для цієї нової $\tilde{\tilde{w}} \in C_0^\infty(M)$ (з $\operatorname{supp} \tilde{\tilde{w}} \subset \operatorname{Int} \tilde{D}$)

$I_M(\tilde{\tilde{w}}, \tilde{\tilde{w}}) = I_{\tilde{D}}(\tilde{\tilde{w}}, \tilde{\tilde{w}})$ залишиться < 0.

Отже, катеноїд нестійкий: достатньо великі області у ньому не мінімізують площу навіть серед близьких поверхонь.

<u>Rem</u> У загальному випадку (не тільки для гіперповерхонь) перехід від полів Якобі до варіацій з $\delta^2 \operatorname{Vol}(D) < 0$ забезпечується наступним аналогом теореми Якобі для геодезичних:

$\boxed{\text{для геодезичних цьому відповідає умова спряженості точок}}$

<u>Th</u> Нехай (M, φ) – мінімальний підмноговид у $(\overline{M}, \overline{g})$, і $D \subset M$ нубовна. Якщо на D існує поле Якобі Y (тобто $LY = 0$) таке, що $Y|_{\partial D} = 0$, то D нестійка (а отже і (M, φ) нестійкий). ▷ Див., наприклад, огляд J. Simons зі списку літератури у Colding - Minicozzi ◁

Впр. Показати, що гелікоїд тепс нестійкий.

Th. (Саймонс) Нехай (M, g) – орієнтовна компактна мінімальна стійка гіперповерхня з глоб. одиничним нормальним полем ξ у $(\overline{M}, \overline{g})$ невід'ємної кривини Річчі. Тоді (M, g) цілком геодезична і $\overline{Ric}(\xi, \xi) = 0$.

Rem. Кривина Річчі $(\overline{M}, \overline{g})$ у $\overline{p} \in \overline{M}$ у напрямку $0 \neq \overline{v} \in T_{\overline{p}}\overline{M}$ – це $\frac{1}{n} \frac{\overline{Ric}_{\overline{p}}(\overline{v}, \overline{v})}{\overline{g}_{\overline{p}}(\overline{v}, \overline{v})}$. Тобто умова $\overline{Ric} \geq 0$ означає, що форма $\overline{Ric}$ невід'ємно визначена (тут $\dim \overline{M} = n+1$).

▷ Розглянемо постійну $w = 1$. Оскільки M комп., вона $\in C_0^\infty(M)$. $\Delta w = 0$, тому

$$I_M(w, w) = -\int_M w L w \, dV_g = -\int_M (\underbrace{\overline{Ric}(\xi, \xi)}_{\geq 0} + \underbrace{|b|^2}_{\geq 0}) \, dV_g \leq 0,$$

тому у стійкої це буде 0, а отже $|b|^2 = 0 \Rightarrow b = 0$ і $\overline{Ric}(\xi, \xi) = 0$ ◁

Cor. У многовидах додатної кривини Річчі не існує (орієнт.) компакт. мін. стійких гіперповерхонь з глоб. одиничним норм. полем. ▷ Для $\overline{Ric}>0$ $\overline{Ric}(\xi,\xi)>0$ завжди △

Ex. Зокрема, у S^{n+1} $\overline{Ric}=1$ – постійна, тому великі гіперсфери (цілком геодез.) і тор Кліффорда у S^3 – нестійкі (у $\mathbb{R}^4 \leftrightarrow \mathbb{C}^2=\{(z,w)\}$ S^3 задається умовою $|z|^2+|w|^2=1$, а образ тора Кліффорда у S^3 – умовою $|z|=|w|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, і він ділить S^3 на дві частини рівного об'єму; варіація з постійною $w=C$ порушує цю рівновагу і зменшує [redacted] площу тора, і аналогічне вірно для великих гіперсфер).

Th. (Шоен, Яу) Нехай (M,g) – (орієнтовна) компактна зв'язна мінімальна стійка поверхня з глоб. одиничним норм. полем у 3-вимірному $(\bar{M},\bar{g})$ додатної скалярної кривини. Тоді M дифеоморфна S^2 [redacted].

Rem. Скалярна кривина $\overline{s} = \frac{1}{n(n+1)} \operatorname{Tr}_{\overline{g}} \overline{Ric} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{a=1}^{n+1} \overline{Ric}(F_a, F_a)$,
де знову $n+1 = \dim \overline{M}$, $\{F_a\}_{a=1}^{n+1}$ – лок. ортонорм. репер.

▷ Знову беремо $w = 1$, що $\in C_0^\infty(M)$, і знову зі стійкості $\int_M \left(\overline{Ric}(\xi, \xi) + |b|^2 \right) dV_g \leq 0$. $\left(= -I_m(w, w) \right)$.

Нехай $\{E_1, E_2\}$ – лок ортонорм. репер M; тоді у відп. точках $\{dr(E_1), dr(E_2), \xi\}$ – лок. ортонорм. репер $\overline{M}$ (далі пишемо просто E_1, E_2). Позначимо відп. компоненти тензора Рімана:

$$\overline{R}_{abcd} = \overline{g}\left(\overline{R}(F_c, F_d)F_b, F_a\right), \text{ де } F_1 = E_1, F_2 = E_2, F_3 = \xi.$$

Тоді маємо:

$$\overline{Ric}(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{2} \overline{g}\left(\overline{R}(\xi, E_i)E_i, \xi\right) = \overline{R}_{3131} + \overline{R}_{3232} = \overline{R}_{1313} + \overline{R}_{2323}$$

Ан-но, $\overline{Ric}(E_1, E_1) = \overline{R}_{1212} + \overline{R}_{1313}$ (з симетрій)

$\overline{Ric}(E_2, E_2) = \overline{R}_{1212} + \overline{R}_{2323}$.

Тому $\overline{s} = \frac{1}{6}\left(\overline{Ric}(E_1, E_1) + \overline{Ric}(E_2, E_2) + \overline{Ric}(\xi, \xi) \right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\bar R_{1212} + \bar R_{1313} + \bar R_{2323}\right)$

Як бачили вище, $|b|^2 = -2K_{ext}$. Рівняння Гаусса:

$$\bar g\left(\bar R(E_1,E_2)E_2,E_1\right) = g\big(\underbrace{R}_{\boxed{\text{оператор кривини } (M,g)}}(E_1,E_2)E_2,E_1\big) - \left(b(E_1,E_1)\,b(E_2,E_2) - b(E_1,E_2)^2\right)$$

З ортонормованості, це означає

$$\bar R_{1212} = K - K_{ext},$$

де K – (внутрішня) гауссова кривина M (тобто ріманового многовида (M,g)). Отже,

$$\overline{Ric}(\xi,\xi) + |b|^2 = \bar R_{1313} + \bar R_{2323} - 2\left(K - \bar R_{1212}\right) = \bar R_{1212} + \bar R_{1313} + \bar R_{2323} - K - \left(K - \bar R_{1212}\right) = 3\bar s + \frac{1}{2}|b|^2 - K,$$ і

$$0 \geqslant \int_M \left(\overline{Ric}(\xi,\xi) + |b|^2\right) dV_g = \int_M \Big(3\underset{\substack{\vee\\ 0}}{\bar s} + \frac{1}{2}|\underset{\substack{\veebar\\ 0}}{b}|^2 - K\Big)\, dV_g >$$

$$> -\int_M K\, dV_g = -2\pi\chi(M)$$ за Тм. Гаусса-Бонне,

тобто $\chi(M) > 0$. Оскільки M – комп. зв'язна пов-ня,

з Тм. класифікації, $M \cong S^2$ або $\underline{M \cong \mathbb{R}P^2}$. ▲

але $\mathbb{R}P^2$ неорієнтовна

__Ex__ Знову ж, для S^3 з $\bar{S} = 1$ з цього випливає, що тор Кліффорда нестійкий.

__Th.__ (Фішер-Колбрі, Шоен). Нехай (M, g) – повна некомпактна мінімальна гіперповерхня з глоб. одиничним норм. полем ξ у $(\bar{M}, \bar{g})$. Вона стійка $\Leftrightarrow$ $\exists\, w \in C^\infty(M)$ така, що $w > 0$ і $Lw = 0$.

__Ex__ Цілком геодезичні у $(\bar{M}, \bar{g})$ з $\overline{Ric} = 0$: для $w = 1$, очевидно, $Lw = 0$. Зокрема, аф. гіперплощини у E^{n+1}.

__Rem.__ Цей факт використовується для доведення наступного.

__Th.__ (Фішер-Колбрі і Шоен, до Кармо і Пен; Погорєлов). Якщо (M, g) – повна зв'язна орієнтовна мінімальна стійка поверхня у E^3, то це аф. площина.

__Rem.__ Це узагальнення теореми Бернштейна (явно зад. на $\mathbb{R}^2$ стійкі)

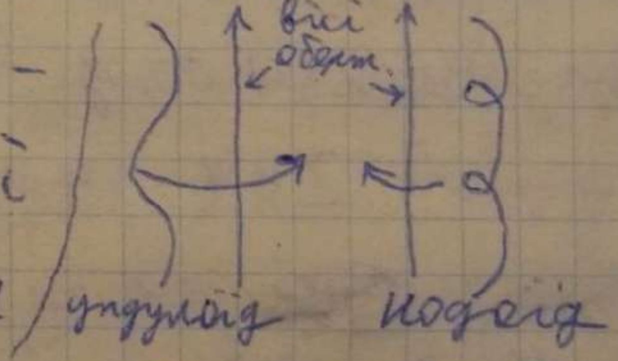
Підмноговиди з паралельним полем середньої кривини

(зокрема, гіперповерхні постійної середньої кривини (CMC))

Ex 1. Мінімальні: $H=0$ (зокрема, цілком геодезичні: $B=0$)

2. Цілком омбілічні у $(\bar{M}, \bar{g})$ постійної секційної кривини, наприклад, гіперсфери у E^{n+1} (інші сфери також)

3. У E^3 відома класифікація Ш.-Е. Делоне повних зв'язних CMC поверхонь обертання: для $H=0$ це площини і катеноїди, для $H \neq 0$ – циліндри (кругові), сфери, ундулоїди і нодоїди (див. доведення і ілюстрації у К. Кенмоцу. Surfaces with constant mean curvature, Ch. 3)



4. У E^3 К. Кенмоцу отримано аналог представлення Вейєрштраса - Енпепера для CMC поверхонь з $H \neq 0$ (див. там же, Ch. 8).

Rem. Нехай тепер (M, φ) - орієнтована гіперповерхня у E^{n+1}; фіксуємо для неї од. норм. поле ξ (глобальне). Згадаємо, що $\forall\, w \in C_0^\infty(M)$ з $\operatorname{supp} w \subset \operatorname{Int} D$ для деякої кубовної $D \subset M$ (зокрема, $w|_{\partial D} = 0$) полю $w\xi$ відп. (нормальна) варіація σ $M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to E^{n+1}$ гп-ні (M, φ) з носієм D, і для неї перша варіація об'єму D

$$\delta \operatorname{Vol}(D) = \frac{d}{ds} \operatorname{Vol}_{g_s}(D)\Big|_{s=0} = -n \int_D \langle H^\xi, w\xi \rangle \, dV_g =$$

$$= -n \int_D H w \, dV_g \quad \left(\text{тобто така } \sigma\ \exists:\ \sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{s=0} = w\xi\right).$$

Нехай $\varphi|_{\bar{D}}$ - вкладення, і $0 \notin \varphi(\bar{D})$. Тоді, з'єднуючи відрізками прямих 0 з точками $\varphi(\bar{D})$, побудуємо конус $C\varphi(\bar{D})$.

Якщо ∂D - вкладена гіперповерхня у M, цей конус має "кусково вкладену" границю, і можна обчислити його об'єм у E^{n+1} за (узагальненою) теоремою Стокса. Продовжимо норм. поле ξ на (гіпер) поверхню конуса і позначимо $Y := \sum_{a=1}^{n+1} x^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ — поле на $\mathbb{R}^{n+1}$. Тоді

$$Vol(C\psi(\overline{D})) = \int_{C\psi(\overline{D})} dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n+1} = \frac{1}{n+1}\int_{C\psi(\overline{D})} \operatorname{div} Y\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n+1} =$$

(див. практику)

$= \frac{1}{n+1}\Big(\int$ [redacted] $_{\overline{D}} \langle Y,\xi\rangle dV_g + \int_N \langle Y,\xi\rangle dV_h\Big) = \frac{1}{n+1}\int_D \langle \psi,\xi\rangle dV_g,$

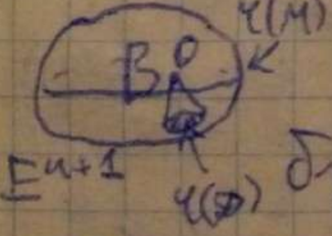
тут $Y\circ\psi = \psi$ ім

де N − б[redacted]а (гіпер)поверхня конуса, h − її перша ф.ф., у її точках $\langle Y,\xi\rangle = 0$. Будемо використовувати цю формулу і для загального випадку.

Озн. Будемо називати $\frac{1}{n+1}\int_D \langle\psi,\xi\rangle dV_g$ для довільної ДСМ об'ємом, що обмежений $\psi(D)$. Якщо для варіації σ з носієм у D $\int_D \langle$ [redacted] $\psi_s, \xi_s\rangle dV_{g_s}$ не залежить від s (де ξ_s − од. норм. поле ψ_s, $\xi_0 = \xi$), будемо казати, що ця варіація зберігає обмежений об'єм.

Р1. (варіаційна характеризація (МС гіперповерхонь у E^{n+1}).
Нехай (M, ν) - орієнтована гп-ня у E^{n+1}, $D \subset M$ кубовна
$H = H_0$ на D $\Leftrightarrow$ $\forall$ нормальної варіації з носієм у D,
що зберігає обмежений об'єм, $\delta \mathrm{Vol}(D) = 0$.

Cor. Якщо компактна вкладена, орієнтована гіперповерхня (M, ψ) у E^{n+1} обмежує множину B (кубовну), тобто $\psi(M) = \partial B$, і мінімізує об'єм серед усіх гіперповерхонь, що обмежують множини об'єма $Vol(B)$, то її середня кривина постійна. Rem Очевидно, $H \neq 0$, бо комп. мінімальних $\nexists$.



▷ Варіації, що зберігають обмежений об'єм, будуть давати той же $Vol(B)$ (можна вважати без обмеж. загальності, що O – усередині), тому за умовою $\delta Vol(D) = 0$, і за Pr., H постійна. △

Rem. Зокрема, мильні бульбашки - постійної сер. кривини.

Rem. Тут ніде не потрібна зв'язність: И збігається навіть для $\overbrace{\text{пов-ні}}^{\text{гіпер}}$ з кількох компонент.

Rem. Ан-ні характеризації можна формулювати і для гіпер-пов-нь в інших рімановах многовидах.

Аналогічно випадку мінімальних $\overbrace{\text{пов-нь}}^{\text{гіпер}}$, з властивостей еліптичних диф. рівнянь виводиться:

Pr. (сильний принцип максимума для явно заданих CMC гіперповерхонь). Нехай (U, φ_1) і (U, φ_2) - явно задані ф-ціями $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ відповідно $\overbrace{\text{гіперповерхні}}^{\text{на відкритій зв'язній } U \subset \mathbb{R}^n}$ у E^{n+1} постійної середньої кривини, тобто

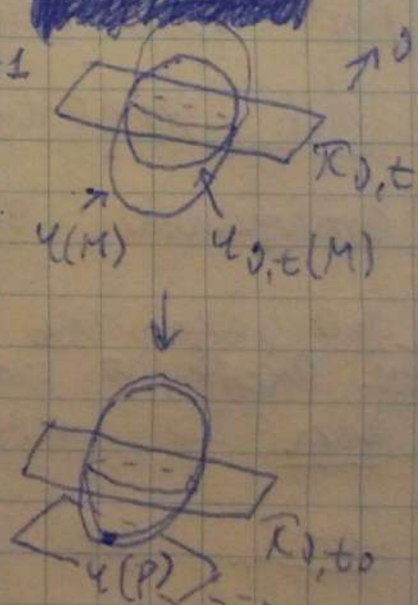
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f_i}{\sqrt{1+|\nabla f_i|^2}}\right) = C \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2. \quad \left(\begin{matrix}\text{евклідова}\\ \operatorname{div}\end{matrix}\right)$$

Якщо $f_1 \leq f_2$ і $\exists\, p \in U$: $f_1(p) = f_2(p)$, і $d_p\varphi_1(T_pU) = d_p\varphi_2(T_pU)$ (тобто $(f_1)_j \overset{(p)}{=} (f_2)_j (p)\ \forall j = \overline{1,n}$), то $f_1 = f_2$.

Th. (О.Д. Александрова про мильну бульбашку, 1958).

Якщо (M, φ) – вкладена компактна зв'язна орієнт. гіперповерхня у E^{n+1} постійної середньої кривини, то це гіперсфера (тобто $\varphi(M) = S^n_R(x_0)$).

▷ Ідея: $\forall \nu \in E^{n+1}$ будуємо ортогональні йому гіперплощини $\pi_{\nu,t} := \{x \mid \langle x, \nu \rangle = t\}$ і [redacted] гіперпов-ні $(M, \varphi_{\nu,t} := \rho_{\nu,t} \circ \varphi)$, де $\rho_{\nu,t}$ – віддзеркалення відн. $\pi_{\nu,t}$.



Тоді $\forall \nu$ знайдеться $t_0 = t_0(\nu)$: (M, φ) і (M, φ_{ν,t_0}) торкнуться у деякій $\varphi(P)$.

З принципу максимума тоді виводиться, що $\varphi = \varphi_{\nu,t_0}$, тобто π_{ν,t_0} – гіперплощина симетрії $\varphi(M)$. Оскільки така існує $\forall \nu$, $\varphi(M)$ – гіперсфера. ◁

Rem. Приклади занурених CMC компактних поверхонь у E^3, що не є сферами, було знайдено у 1984 (тори Венте, тобто $T^2 \to E^3$), у вищих вимірностях раніше. Див. Кентоши, Ch.6.

Rem. Стійкість для CMC гіперповерхонь визначається ан-но мінімальним (як і інші споріднені поняття на кшталт індекса Морса), але для варіацій, що зберігають обмежений об'єм: з $H \neq 0$

def. Орієнтована CMC гіперповерхня (M, φ) у E^{n+1} наз. стійкою, якщо $\forall$ норм. варіацій з носієм у кубовній $D \subset M$, що зберігає обмежений об'єм $\delta^2 Vol(D) \geq 0$ ($\varphi(M) = \partial B$) стійкої

Rem. Очевидно, комп. вкл. гіперпов., що мінімізують об'єм серед гіперпов. з так же $Vol(B)$

Rem. В силу результатів попереднього розділу і Lem. це $\Leftrightarrow$ $\forall v \in C_0^\infty(M)$ якщо $\int_M v \, dV_g = 0$, то $I_M(v, v) = -\int v L v \, dV_g \geq 0$ (стійкість). Стабільність дає альтернативну до Th. Александрова характеризацію сфер:

Th. (Барбоза, до Кармо). Якщо (M, φ) - комп. зв'язна орієнт. CMC поверхня у E^3, що є стійкою, то $\varphi(M) = S_R^2(x_0)$ ▷ Кентоши, Ch.5 ◁