Оз. Нехай (M, g) - рім. многовид. Його лапласіаном (оператором Лапласа-Бельтрамі) наз. $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, що задається

$$\Delta f := g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$$

$\forall$ лок. коорд. $(x^1, \dots, x^n)$. Якщо $\Delta f = 0$, f наз. гармонічною.

Впр. Перевірити коректність (незалежність від вибору лок. коорд.)

Ex. При $(M, g) = E^n$ $\quad \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}$.

Тh. (Принцип максимума і мінімума). Якщо f - гарм. на M і $D \subset M$:

$\overline{D}$ - компакт, то $\max\limits_{\overline{D}} f = \max\limits_{\partial D} f$ і $\min\limits_{\overline{D}} f = \min\limits_{\partial D} f$. Зокрема, якщо M - компакт, то f постійна.

Pr. (M, φ) у E^{n+q} з $\varphi = (x^1, \dots, x^{n+q})$ мін. $\Leftrightarrow 0 = \Delta\varphi := (\Delta x^1, \dots, \Delta x^{n+q})$

▷ Використаємо позн. Γ у лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на M:

$$H = \frac{1}{n} g^{ij} b^{\alpha}_{ij} \xi_\alpha = \frac{1}{n} g^{ij} \left(\varphi_{;ij} - \Gamma^k_{ij} \varphi_k \right) = \frac{1}{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^a}{\partial u^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^a} =$$

$$= \frac{1}{n} \Delta x^a \frac{\partial}{\partial x^a}.$$ Тому $H = 0 \Leftrightarrow \Delta x^a = 0$ для $\forall\, a = \overline{1, n+q}$. ◁

Rem. З цього і **Th.** вище ще раз отримуємо (бо $\Delta x^a = 0 \Rightarrow x^a \equiv const$)

Cor. У E^{n+q} не існує компактних мінімальних підмноговидів.

Rem. Звичайно, всі приклади мінімальних у S^{n+q} - компактні.

§ Мінімальні гіперповерхні у E^{n+1}

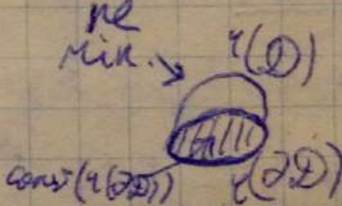
Pr. Нехай (M, φ) - мін. гіперповерхня у E^{n+1}. Тоді $\forall$ компактної $D \subset M$ $\varphi(D) \subset \operatorname{conv}(\varphi(\partial D))$ (опукла оболонка)

▷ $\forall\, \varphi(p) \in \varphi(\partial D)$ $\forall$ опорної гіперплощини π множ. $\varphi(\partial D)$ у $\varphi(p)$ з норм. вектором ν $h := \langle \varphi - \varphi(p), \nu \rangle \in C^\infty(M)$, і $\Delta h = \langle \Delta\varphi, \nu \rangle = 0$, h - гарм. Оскільки π опорна, h зберігає знак на ∂D (скажімо, $h \geq 0$), причому $h(p) = 0$.

За принципом мінімума,

$$\min_{D} h = \min_{\partial D} h = 0, \quad \text{тобто } h \geq 0 \text{ на } D.$$

Тоді $\varphi(D)$ також лежить у $\underbrace{\text{одному пів-}}_{\text{(тому ж, що і } \varphi(\partial D))}$просторі відн. π. Оскільки $\operatorname{conv} \varphi(\partial D)$ — перетин таких півпросторів, вона містить $\varphi(D)$. ▲



<u>Rem.</u> Ця умова дозволяє зрозуміти, які гіперповерхні точно не мінімальні. Крім того, згадаємо, що середня кривина $H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu$, де A_ν — оператор Вейнгартена у точці p відносно $\nu \in N_pM$: $A_\nu(v) = (A_p)_\nu(v)$ для $v \in T_pM$ (тобто $A_\nu : T_pM \to T_pM$), тут $|\nu| = 1$.

Або: $H(p) = \frac{1}{n}(k_1 + \ldots + k_n)$, де $\{k_i\}$ — головні кривини — власні значення A_ν. Ми називали (M, φ) лок. опуклою у $p \in M$, якщо аф. дотична гіперплощина $\varphi(p) + d_p\varphi(T_pM)$ була опорною для $\varphi(U)$ для відкр. $U \ni p$. Зокрема, Якщо (M, r) опукла, тобто $r(M) = \partial \mathcal{D}$ для опуклої $\mathcal{D} \subset E^{n+1}$, вона лок. опукла у $\forall$ точці. Лок. опуклість у $p \iff A_j$ у p нестрого знаковизначений, тобто усі $k_i \geq 0$ або усі $k_i \leq 0$. ■ (Впр.) Отже, тоді $H(p) = 0 \Rightarrow k_i = 0\ \forall i$

Сл. Якщо (M, r) лок. опукла у p і $H(p) = 0$, то $b_p = 0$.

Якщо зв'язна мінімальна (M, r) опукла, це гіперплощина (афінна).

Rem. При $n = 2$ $k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow$ гауссова кривина $K = k_1 k_2 = -k_1^2 \leq 0$.

Rem. Розглянемо явно задані гіперповерхні, тобто

$r: U \to E^{n+1}$, де $U \subset \mathbb{R}^n$ - відкрита:

$$r(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n))$$

для $f \in C^\infty(U)$. Вони вкладені, і $(x^1, \dots, x^n)$ — орієнт. глобальні координати (і $\forall$ гіперпов-на локально має такий вигляд за Тн. про ранг). При цьому $\forall$ $i, j = \overline{1, n}$

$$r_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0, f_i),$$

$$r_{ij} = (0, \dots, 0, f_{ij}).$$

(як і раніше, ототожнюємо $T_q \mathbb{R}^{n+1}$ з $\mathbb{R}^{n+1}$ $\forall q$, і далі теж) тому $g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle = \delta_{ij} + f_i f_j$. (Глобальне) одиничне норм. поле:

$\boxed{\left(\text{Очевидно, } f_i := \frac{\partial f}{\partial x^i},\ f_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)}$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} f_i^2}}\left(-f_1, \dots, -f_n, 1\right),$$

тому $\forall\ i, j$

$$b_{ij} = \langle r_{ij}, \xi \rangle = \frac{f_{ij}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \quad (\text{де } \nabla f = (f_1, \dots, f_n)).$$

Оскільки

$$G = \begin{pmatrix} 1+f_1^2 & f_1 f_2 & \dots & f_1 f_n \\ f_1 f_2 & 1+f_2^2 & \dots & f_2 f_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1 f_n & f_2 f_n & \dots & 1+f_n^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\begin{pmatrix} 1+f_2^2+\dots+f_n^2 & -f_1 f_2 & \dots & -f_1 f_n \\ -f_1 f_2 & 1+f_1^2+f_3^2+\dots+f_n^2 & \dots & -f_2 f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_1 f_n & -f_2 f_n & \dots & 1+f_1^2+\dots+f_{n-1}^2 \end{pmatrix},$$

тому

$$H = \frac{1}{n} b_{ij} g^{ij} = \frac{1}{n}\frac{1}{(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_{ii}\left(1+f_1^2+\dots+\widehat{f_i^2}+\dots+f_n^2\right) - 2\sum_{1\le i<j\le n} f_{ij} f_i f_j\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{f_i}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) \quad \left(\text{дійсно, } i\text{-тий доданок: } \frac{f_{ii}(1+f_1^2+\dots+f_n^2) - f_i(f_1 f_{1i}+\dots+f_n f_{ni})}{(1+|\nabla f|^2)^{3/2}}\right).$$

<u>Сл.</u> Гіперпов-ня $x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)$ мінімальна $\Leftrightarrow$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0$$

<u>Rem.</u> Тут дивергенція евклідова. Таке рівняння

звуть рівнянням мін. гіперповерхні у дивергентній формі.

Ex. 1. Аф. гіперплощини: $x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i + a_{n+1}$ (очевидно).

2. Гелікоїд (локально): $z = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi k$ } перевірити (Впр.)

3. Катеноїд (локально): $z = \pm\frac{1}{a}\operatorname{arcch}\sqrt{x^2+y^2}$

4. Поверхня Шерка: це об'єднання замикань поверхонь $z = \ln\frac{\cos}{\cos}$ [redacted] $(y-l)$ / [redacted] $(x-k)$, де $\max\{|x-k|, |y-l|\} < \frac{\pi}{2}$ для $k, l \in \pi\mathbb{Z}$ таких, що $k+l \in 2\pi\mathbb{Z}$. Для них

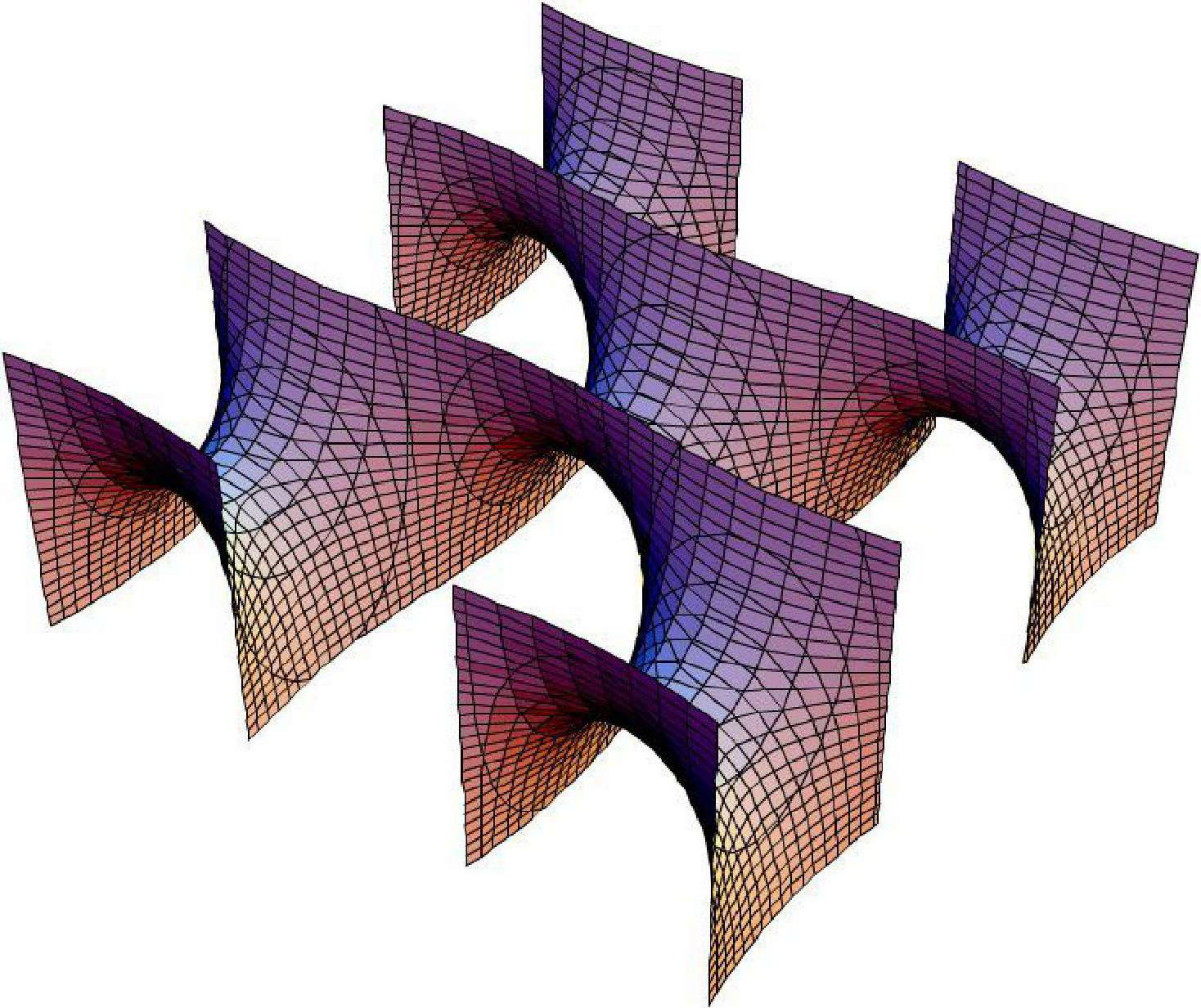
$f_x =$ [redacted] tg [redacted] $(x-k)$, $f_y = -$ [redacted] tg [redacted] $(y-l)$,

$f_{xx} =$ [redacted] $\frac{1}{\cos^2}$ [redacted] $(x-k)$, $f_{yy} = -$ [redacted] $\frac{1}{\cos^2}$ [redacted] $(y-l)$, $f_{xy} = 0$, тоді рівняння

$$f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1+f_x^2) = 0$$

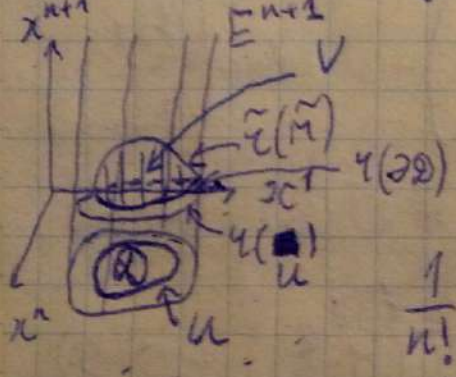
виконується.

Наступний слайд - поверхня Шерка, автор: Ентініа Naccorato (Мітіане), власна робота, CC BY-SA 3.0.



(подальші приклади – див. у Colding–Minicozzi). $\boxed{(U,\varphi)}$

Пр. Явно задана мінімальна гіп-ня у E^{n+1} (що задана $f\in C^\infty(U)$) мінімізує об'єм серед гіперповерхонь, що містяться у $U\times\mathbb{R}$ (тобто $(\tilde M,\tilde\varphi)$ таких, що $\tilde\varphi(\tilde M)\subset U\times\mathbb{R}$).



▷ Розглянемо n-форму (зовнішню) на $U\times\mathbb{R}$:

$$\alpha(X_1,\dots,X_n) := \frac{\det(X_1,\dots,X_n,\xi)}{n!} = \det\begin{pmatrix} X_1^1 & \dots & X_n^1 & -f_1\\ \vdots & & & \vdots\\ X_1^n & \dots & X_n^n & -f_n\\ X_1^{n+1} & \dots & X_n^{n+1} & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}},$$

де $X_i = X_i^a\frac{\partial}{\partial x^a}$, $i=\overline{1,n}$,

і поле $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left(-\sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)$ продовжимо на $U\times\mathbb{R}$.

З властивостей det, це дійсно n-лінійна над $C^\infty(U\times\mathbb{R})$ гладка кососиметрична форма. У координатах: $\forall a=\overline{1,n+1}$

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^a}},\dots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\det{}_a\begin{pmatrix} 1 & & 0 & & 0 & -f_1\\ 0 & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & 1 & & 0 & -f_n\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1-a}\cdot(-f_a)}{n!\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, & a=\overline{1,n},\\[2mm] \dfrac{1}{n!\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, & a=n+1\end{cases}$$

тому розкладення за базисом $\overset{\text{зовн.}}{n}$-форм ($n!$ зникає):

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i} f_i\, dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^{n+1}\right)$$

Зокрема,

$$d\alpha = 0 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{f_i}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) dx^i\wedge\underbrace{dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}}_{\text{домножаємо на } (-1)^{i+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{n+1} =$$

$= (-1)^{n+1}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n+1} = 0$, бо f задає мінімальну гіп-ню (позначення як вище, тобто div евклідова[redacted]).

Нехай тепер $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ - гіп-ня у $U\times\mathbb{R}$. На ній у лок. коорд. $(u^1,..,u^n)$ (гіпер поверхня орієнтовна, відп. карта - з атласа, що задає орієнт.):

$$\tilde{\varphi}^*\alpha = n!\,\tilde{\varphi}^*\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial u^n}\right) du^1\wedge\ldots\wedge du^n = n!\,\alpha\left(\tilde{\varphi}_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right),\ldots,\tilde{\varphi}_*\left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)\right) du^1\wedge\ldots\wedge du^n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \ldots & \frac{\partial x^1}{\partial u^n} & -f_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ & & & -f_n\\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^1} & \ldots & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^n} & 1\end{pmatrix} du^1\wedge\ldots\wedge du^n =$$

$= (-1)^n \langle[\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_n],\xi\rangle\, du^1\wedge\ldots\wedge du^n$, де $\left\{\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right\}_{(a=\overline{1,n+1},\ i=\overline{1,n})}$ - ч. пох. коорд.
[redacted]
ф-цій лок. задання $\tilde{\varphi}$, і для $v_1,..,v_n\in\mathbb{R}^{n+1}$

$$[v_1,\dots,v_n] \overset{\det}{:=} \text{[redacted]} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \\ v_1^1 & \dots & v_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1 & \dots & v_n^{n+1} \end{pmatrix}$$ — узагальнений векторний добуток у дек. коорд.

(координати декартові), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ і $|\cdot|$ — стандартні евклідові.

Зокрема, для вихідної гіп-ні це $\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -f_1 \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & 1 & -f_n \\ f_1 & f_2 & f_n & 1 \end{pmatrix} dx^1\wedge\dots\wedge dx^n =$

$= \frac{1+|\nabla f|^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$ (і $[\varphi_1,\dots,\varphi_n] = (-f_1,\dots,-f_n,1) =$ [redacted]

$= \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,\xi$). Отже,

$\varphi^*\alpha = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^n = dV_g$ — форма об'єма (U [redacted], φ)

(бо $\det G = 1+|\nabla f|^2$, див. вище або заг. випадок нижче).

Але і для загальної $(\tilde M, \tilde\varphi)$ у лок. коорд. $dV_{\tilde g} =$

$= |[\tilde\varphi_1,\dots,\tilde\varphi_n]|\, du^1\wedge\dots\wedge du^n$. Дійсно (позначаємо $\tilde\varphi_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}$),

$$|[\tilde\varphi_1,\dots,\tilde\varphi_n]|^2 = \left\langle \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \\ \tilde\varphi_1^1 & \dots & \tilde\varphi_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde\varphi_n^1 & \dots & \tilde\varphi_n^{n+1} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \tilde\varphi_1^1 & \dots & \tilde\varphi_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} & \tilde\varphi_1^{n+1} & \dots & \tilde\varphi_n^{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle \overset{[\text{правило множення вірне і для формальних det}]}{=}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \\ \tilde{\varphi}_1^1 & \dots & \tilde{\varphi}_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\varphi}_n^1 & \dots & \tilde{\varphi}_n^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \tilde{\varphi}_1^1 & \dots & \tilde{\varphi}_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} & \tilde{\varphi}_1^{n+1} & \dots & \tilde{\varphi}_n^{n+1} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} n+1 & \tilde{\varphi}_1 & \dots & \tilde{\varphi}_n \\ \tilde{\varphi}_1 & \langle\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_1\rangle & \dots & \langle\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\varphi}_n & \langle\tilde{\varphi}_n,\tilde{\varphi}_1\rangle & \dots & \langle\tilde{\varphi}_n,\tilde{\varphi}_n\rangle \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}}$$

= [розкл. за [redacted] першим стовпчиком] $= (n+1)\det\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix} - \left\langle \tilde{\varphi}_1, \det\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \dots & \tilde{\varphi}_n \\ \tilde{g}_{21} & \dots & \tilde{g}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix}\right\rangle + \dots + (-1)^n \left\langle \tilde{\varphi}_n, \det\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \dots & \tilde{\varphi}_n \\ \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{g}_{n-1\,1} & \dots & \tilde{g}_{n-1\,n} \end{pmatrix}\right\rangle = (n+1\underbrace{-1-\dots-1}_{n})\cdot$

$$\det\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix} = \det\tilde{G}.$$

Отже, нехай $D \subset U$ кубовна і $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ – орієнт. гіперповерхня така, що $\tilde{\varphi}(\tilde{M}) \subset U \times \mathbb{R}$ і $\exists\, \tilde{D} \subset \tilde{M}$ кубовна з $\tilde{\varphi}(\partial\tilde{D}) = \varphi(\partial D)$ (вистачало б і умови $\tilde{\varphi}(\overline{\tilde{D}}) \subset U \times \mathbb{R}$). Застосуємо до області $V \subset U \times \mathbb{R}$, що обмежена $\varphi(\overline{D}) \cup \tilde{\varphi}(\overline{\tilde{D}})$, (узагальнену) Th. Стокса, обравши орієнтацію так, що

$$\int_D \varphi^*\alpha - \int_{\tilde{D}} \tilde{\varphi}^*\alpha = \int_V d\alpha = 0.$$

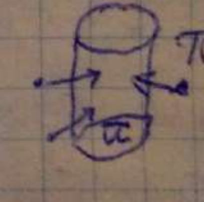
Тоді

$$Vol_g(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} dV_g = \int_{\mathcal{D}} \varphi^*\alpha = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{\varphi}^*\alpha \leq \left[\begin{array}{l}\text{локально за К.-Б.-Ш.} \\ |\langle[\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_n],\xi\rangle| \leq \\ \leq |[\tilde{\varphi}_1,\dots,\tilde{\varphi}_n]|\cdot\underbrace{|\xi|}_{=1}\end{array}\right] \leq$$

$$\leq \int_{\tilde{\mathcal{D}}} dV_{\tilde{g}} = Vol_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{D}}) \quad \blacktriangle$$

Сл. Мінімальна гіперповерхня у E^{n+1}, що явно задана на усьому $\mathbb{R}^n$, мінімізує об'єм.

Rem. Це вірно і для гп-нь, заданих на опуклих U: у цьому випадку розглянемо проекцію $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \to \bar{U}\times\mathbb{R}$, що переводить точку до найближчої до неї у $\bar{U}\times\mathbb{R}$. Тоді $\pi\circ\tilde{\varphi} =: \tilde{\tilde{\varphi}}$ (взагалі кажучи, нерегулярна) гп-ня у $\bar{U}\times\mathbb{R}$ і можна показати, що $Vol_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{D}}) \geq Vol_{\tilde{\tilde{g}}}(\tilde{\mathcal{D}}) \geq Vol_g(\mathcal{D})$ (див. Colding-Minicozzi).



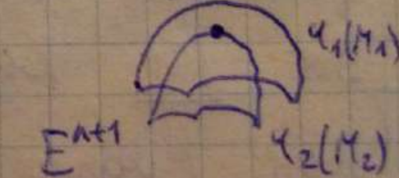
Rem. Зокрема, для таких гіперпов. і $\forall$ варіації, що не виводить за межі $U\times\mathbb{R}$, повинно бути $\delta^2 Vol(\mathcal{D}) \geq 0$.

Pr. (сильний принцип максимума для явно заданих гіп-ів)

Якщо (U, φ_1) і (U, φ_2) – явно задані мін. гіпер-ні у E^{n+1} на відкритій зв'язній $U \subset \mathbb{R}^n$, що задані $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ відп., $f_1 \le f_2$ і $\exists\, p \in U: f_1(p) = f_2(p)$, то $f_1 = f_2$ (тобто $\varphi_1 = \varphi_2$).

▷ Випливає з сильного принц. max для розв'язків еліптичних диф. рівнянь, див. Colding-Minicozzi. ◁

Cor. Якщо (M_1, φ_1) і (M_2, φ_2) – повні зв'язні мін. гіпер-ні у E^{n+1}, одна з яких лежить по один бік від іншої (тобто, наприклад, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \varphi_1(M_1) = U \sqcup V$, і $\varphi_2(M_2) \subset U \cup \varphi_1(M_1)$) і $\varphi_1(M_1) \cap \varphi_2(M_2) \neq \emptyset$, то $\varphi_1(M_1) = \varphi_2(M_2)$.



▷ Застосовуємо минуле Pr. локально спочатку в околі точки перетину, потім за повнотою і зв'язністю – в околі $\forall$ точки. ◁

Впр. Нехай (M, r) - поверхня у E^3, і на $U \subset M$ визначене (гладке) одиничне норм. поле ξ. Нехай $\Phi: U \to S^2$ - задане ним гауссове відображення: $\forall p \in U$ $|\xi_p| = 1$, тому можна визначити $\Phi: p \mapsto \xi_p \in S^2 \subset E^3$. Тоді, якщо $H|_U = 0$, то Φ конформне: I ф.ф. g поверхні пропорційна (третій фундаментальній формі) $\Phi^* h$, де h - станд. метрика S^2. Чи вірне обернене? Як щодо гіперповерхні у E^{n+1} для довільного n?

Мінімальні поверхні в E^3 і комплексні числа

Нехай (M, r) - мін. поверхня у E^3. Зокрема, $\Delta r = 0$. За Тм. Корна-Ліхтенштайна, $\forall p \in M$ $\exists$ ізотермічні лок. коорд. (u, v) на відкр. $V \ni p$, тобто у цих коорд. рім. м-ка (I ф.ф.) поверхні має вигляд

$$g = e^{2\omega(u,v)}(du^2 + dv^2).$$

(тобто пов-ня лок. конформно еквівалентна E^2). Ми будемо вважати $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, де U - відкрита однозв'язна (зокрема, $\mathbb{R}^2$ або B^2_ε). Отже, для лок. задання r $(u,v) \mapsto (x^1(u,v), x^2(u,v), x^3(u,v))$

$g_{11} = g_{22} = e^{2\omega}$, $g_{12} = 0$:

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u}\right)^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial x^k}{\partial v}\right)^2 = e^{2\omega}, \quad \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial u}\frac{\partial x^k}{\partial v} = 0.$$

Lem. В ізотермічних координатах лапласіан Δ має вигляд

$$\Delta = e^{-2\omega}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

▷ У позначеннях $u^1 = u$, $u^2 = v$ $\Delta = g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$.

Оскільки $G = \begin{pmatrix} e^{2\omega} & 0 \\ 0 & e^{2\omega}\end{pmatrix}$, $G^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\omega} & 0 \\ 0 & e^{-2\omega}\end{pmatrix}$, тобто $g^{ij} = e^{-2\omega}\delta^{ij}$.

За формулами, $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^1_{22} = \omega_u$, $\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \omega_v$ (Впр), тому $g^{ij}\Gamma^k_{ij} = 0$ для $k = 1, 2$. ◭

Отже, з $\Delta r = 0$ і Lem.,

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial v^2} = 0 \quad , k = \overline{1,3} \quad ,$$

тобто x^k гармонічні в звичному "евклідовому" сенсі.

Введемо комплексну координату $z := u + iv$ (і тепер вважаємо відкр. $U \subset \mathbb{C}$ - однозв'язна). Для $k = \overline{1,3}$ визначимо

$$\varphi^k : U \to \mathbb{C} \; : \; z = u + iv \mapsto \frac{\partial x^k}{\partial u} - i \frac{\partial x^k}{\partial v} .$$

Для них виконуються тоді умови Коші - Рімана:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x^k}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 x^k}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial x^k}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial x^k}{\partial v}\right) = -\frac{\partial^2 x^k}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x^k}{\partial u}\right) \quad , k = \overline{1,3} .$$

Тобто $\{\varphi^k\}_{k=1}^3$ - голоморфні на U. За побудовою, $\forall k = \overline{1,3}$

$$\mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \varphi^k(z)\, dz = x^k + c^k \text{ для деякого } z_0 \in U, \; c^k \in \mathbb{R}$$

(інтеграл не залежить від шляху в силу однозв'язності)

Зауважимо, що

$$\sum_{k=1}^3 (\varphi^k)^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\left(\frac{\partial x^k}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial x^k}{\partial v}\right)^2 - 2i \frac{\partial x^k}{\partial u}\frac{\partial x^k}{\partial v} \right) = 0 \text{ , бо}$$

координати ізотермічні. Тобто

$$(\varphi^1 - i\varphi^2)(\varphi^1 + i\varphi^2) = -(\varphi^3)^2$$

Покладемо $f := \varphi^1 - i\varphi^2$, $g := \frac{\varphi^3}{\varphi^1 - i\varphi^2}$. Тоді

$$\varphi^1 + i\varphi^2 = -g^2 f,$$

тобто $\varphi^1 = \frac{f}{2}(1-g^2)$, $\varphi^2 = \frac{if}{2}(1+g^2)$, $\varphi^3 = fg$.

$f, g : U \to \mathbb{C}$, причому f теж голоморфна. Будемо вважати, що її нулі ізольовані (Впр. Як це обмежує поверхню?)

Тоді g — мероморфна, причому її полюси порядку $\le m$ відповідають нулям f порядку $\ge 2m$ (бо $g^2 f = -\varphi^1 - i\varphi^2$ голоморфна). Вірно й обернене (з тих же викладок):

Сл. (Представлення Вейєрштрасса-Еннепера) Нехай $U \subset \mathbb{C}$ — відкр. і однозв'язна, $z_0 \in U$, $\{C^k\}_{k=1}^3 \in \mathbb{R}$ і $f, g : U \to \mathbb{C}$ такі, що f голоморфна, g мероморфна, і її полюси порядку $\le m$ — це нулі f порядку $\ge 2m$. Тоді $r = (x^1, x^2, x^3) : U \to \mathbb{R}^3$, де

$$x^1 = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} (1-g^2) f\, dz + C^1,$$
$$x^2 = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} i(1+g^2) f\, dz + C^2, \qquad \text{(домножили на 2).}$$
$$x^3 = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} 2fg\, dz + C^3,$$
задає мінімальну поверхню у E^3 (ізотермічно параметр.).

Ex. 1 (Поверхня Еннепера). $U = \mathbb{C}$, $f = 1$, $g = z$ — голоморфні; нехай $z_0 = 0$, $C^1 = C^2 = C^3 = 0$:
$$x^1 = \mathrm{Re}\int_0^z (1-z^2)\, dz = \mathrm{Re}\left(z - \frac{z^3}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(u + iv - \frac{(u+iv)^3}{3}\right) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2,$$
$$x^2 = \mathrm{Re}\int_0^z i(1+z^2)\, dz = \mathrm{Re}\, i\left(z + \frac{z^3}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(iu - v + i\frac{(u+iv)^3}{3}\right) = -v + \frac{v^3}{3} - u^2 v,$$
$$x^3 = \mathrm{Re}\int_0^z 2z\, dz = \mathrm{Re}\, z^2 = \mathrm{Re}\,(u+iv)^2 = u^2 - v^2.$$
Вона не вкладена!

2. (Гелікатеноїд) $U = \mathbb{C}$, $f = \frac{1}{2}e^{-i\alpha}e^{z}$, $g = e^{-z}$ — голоморфні; $z_0 = 0$, $C^1 = \cos\alpha$, $C^2 = C^3 = 0$:
$$x^1 = \mathrm{Re}\int_0^z \frac{1}{2}e^{-i\alpha}(e^{z} - e^{-z})\, dz + \cos\alpha = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-i\alpha}(e^{z} + e^{-z}) - e^{-i\alpha}\right)$$
$$+ \cos\alpha = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-i\alpha}(e^{u+iv} + e^{-u-iv})\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((\cos\alpha - i\sin\alpha)(e^{u}\cos v + \right.$$

$+ i e^{u}\sin v + e^{-u}\cos v - i e^{-u}\sin v)) = \cos\alpha\, \mathrm{ch}\, u \cos v + \sin\alpha \cdot \mathrm{sh}\, u \cdot \sin v.$

$$x^2 = \mathrm{Re}\int_0^z \frac{1}{2} i e^{-i\alpha}(e^z + e^{-z})\,dz = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((i\cos\alpha + \sin\alpha)(e^z - e^{-z})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((i\cos\alpha + \sin\alpha)(e^u\cos v + i e^u \sin v - e^{-u}\cos v + i e^{-u}\sin v)\right) =$$

$$= -\cos\alpha\, \mathrm{ch}\, u \sin v + \sin\alpha\, \mathrm{sh}\, u \cos v.$$

$$x^3 = \mathrm{Re}\int_0^z e^{-i\alpha}\,dz = \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha} z\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\alpha - i\sin\alpha)(u + iv)\right) =$$

$$= \cos\alpha \cdot u + \sin\alpha \cdot v$$

Тобто

$$r(u,v) = \cos\alpha \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, u \cos v \\ -\mathrm{ch}\, u \sin v \\ u \end{pmatrix} + \sin\alpha \begin{pmatrix} \mathrm{sh}\, u \sin v \\ \mathrm{sh}\, u \cos v \\ v \end{pmatrix}$$

При $\alpha = 0$ це катеноїд (і $\mathbb{C}$ його ∞-листно накриває, тому можна обмежитися $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$), при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ – гелікоїд (у ізотермічній параметризації).

<u>Впр.</u> Як виглядає (чи існує) це представлення для явно заданої поверхні? А у $\mathbb{E}^4$ (див. нижче)? (гауссову),

· <u>Впр.</u> Виразити кривину поверхні через f і g.

Впр. (Представлення Ейзенхарта). Перевірити, що $\forall f, g, h:$ (U - однозв. дифер.)
$U \to \mathbb{C}$ таких, що $\varphi^1 := h(f+g)$, $\varphi^2 := -ih(f-g)$, $\varphi^3 :=$
$= f - h^2 g$, $\varphi^4 := -i(f + h^2 g)$ голоморфні, $z_0 \in U$, $\{c^k\}_{k=1}^4 \subset \mathbb{R}$
відображення $r: U \to \mathbb{R}^4$, де $x^k = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} \varphi^k(z)\,dz + c^k$, $k = \overline{1,4}$,
задає ізотермічно параметризовану мінімальну поверхню в E^4.

Rem. У загальному випадку f і g задаються на рімановій поверхні (1-вим. комплексному многовиді).

Th. (С. Н. Бернштейн, 1916) Нехай $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ задає явно задану мінімальну поверхню $(\mathbb{R}^2, r)$ в E^3. Тоді f лінійна: $f(x,y) = ax + by + c$, тобто поверхня є афінною площиною.

Rem. Знову на гладкість можна послабити.

▷ Отже, f задовольняє

$$f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1+f_x^2) = 0.$$

Тоді сумісною є система з невідомою $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{cases} F_{xx} = \dfrac{1+f_x^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \\ F_{xy} = \dfrac{f_x f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \\ F_{yy} = \dfrac{1+f_y^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \end{cases} \qquad (*)$$

Дійсно, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1+f_x^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{f_x f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)$ і $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{f_x f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1+f_y^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)$ (Впр.)

Тому така F існує. При цьому

$$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left(1+f_x^2+f_y^2+f_x^2 f_y^2 - (f_x f_y)^2\right) = 1.$$

Така умова на F зветься рівнянням Монжа-Ампера.

Зокрема, його розв'язки задовольняють наступній умові:

<u>1ет.</u> Нехай $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ опукла, тобто $F_{xx} \geq 0$, $F_{yy} \geq 0$ і $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 \geq 0$. Тоді $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (\xi, \eta) = (x + F_x, y + F_y)$ – дифеоморфізм.

$\triangleright$ З умови опуклості F, $\forall$ $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ф-ція

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto F\left((1-t)x_1 + t x_2, (1-t)y_1 + t y_2\right)$

є опуклого:

$$\varphi''(t) = F_{xx}(P_t)(x_2-x_1)^2 + 2F_{xy}(P_t)(x_2-x_1)(y_2-y_1) + F_{yy}(P_t)(y_2-y_1)^2 \geq 0,$$

де $P_t = (1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2)$ (форма ≥ 0 виконана), і тому

$$\varphi'(0) \leq \varphi'(1)$$

$$F_x(x_1,y_1)(x_2-x_1) + F_y(x_1,y_1)(y_2-y_1) \leq F_x(x_2,y_2)(x_2-x_1) + F_y(x_2,y_2)(y_2-y_1)$$

$$0 \leq (F_x(x_2,y_2) - F_x(x_1,y_1))(x_2-x_1) + (F_y(x_2,y_2) - F_y(x_1,y_1))(y_2-y_1) =: \delta$$

Нехай $\Phi: (x_1,y_1) \mapsto (\xi_1,\eta_1)$, $(x_2,y_2) \mapsto (\xi_2,\eta_2)$. Тоді

$$(\xi_2-\xi_1)(x_2-x_1) + (\eta_2-\eta_1)(y_2-y_1) = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + \underset{\geq 0}{\delta}$$

Тобто за нерівністю К.-Б.-Ш.:

$$|(x_2-x_1, y_2-y_1)|^2 \leq \langle (x_2-x_1, y_2-y_1), (\xi_2-\xi_1, \eta_2-\eta_1) \rangle \leq |(x_2-x_1, y_2-y_1)| \cdot |(\xi_2-\xi_1, \eta_2-\eta_1)|.$$

Оскільки точки $P_1 = (x_1,y_1)$ і $P_2 = (x_2,y_2)$ різні, це означає, що Φ - нестискаюче відображення:

$$0 < |P_2 - P_1| \leq |\Phi(P_2) - \Phi(P_1)|$$

Зокрема, $\Phi(p_1) \neq \Phi(p_2)$, тобто Φ - ін'є.

Крім того, $\Phi(\mathbb{R}^2)$ - замкнена у $\mathbb{R}^2$. Дійсно, $\mathbb{R}^2 \setminus \Phi(\mathbb{R}^2)$ не відкрита, тобто $\exists\, q \notin \Phi(\mathbb{R}^2)$ така, що $\forall$ відкр. $U \ni q$ $U \cap \Phi(\mathbb{R}^2) \neq \emptyset$ (іншими словами, $q \in \overline{\Phi(\mathbb{R}^2)} \setminus \Phi(\mathbb{R}^2)$). Тоді $\exists$ посл-сть $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi(\mathbb{R}^2)$: $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} q$; нехай $\forall n$ $q_n = \Phi(p_n)$. Оскільки $|p_n - p_m| \leq |q_n - q_m| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, $\{p_n\}$ - фунд. і збігається до $p \in \mathbb{R}^2$; з неперервності, $\Phi(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(p_n) = q$ ↯.

З іншого боку, Φ - лок. дифеоморфізм в околі $\forall$ точки, бо його якобіан

$$(**)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & 1+F_{yy} \end{vmatrix} = 1 + \underset{\geq 0}{F_{xx}} + \underset{\geq 0}{F_{yy}} + \underbrace{F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2}_{\geq 0} > 0.$$

Зокрема, тоді $\Phi(\mathbb{R}^2)$ - відкрита у $\mathbb{R}^2$: $\forall\, q = \Phi(p) \in \Phi(\mathbb{R}^2)$ $\exists$ відкр. $U \ni p$, $V \ni q$: $\Phi: U \to V$ - диф-зм ; оскільки

$V \subset \Phi(\mathbb{R}^2)$, це відкр. окіл q у $\Phi(\mathbb{R}^2)$.

Отже, $\Phi(\mathbb{R}^2)$ – відкритозамкнена у зв'язному $\mathbb{R}^2$ і $\neq \emptyset$:

$\Phi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, тобто Φ – сюр.

Оскільки Φ – біє і лок. дифео-зм в околі $\forall$ точки, це дифео-зм ($\Phi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ виводиться з лок. дифеоморфності в околі $\forall$ точки, це лок. властивість). $\triangle$ (Лем.)

Позначимо $\zeta := \xi + i\eta$ і інтерпретуємо тепер Φ з Лем. як відобр. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \zeta = (x+F_x) + i(y+F_y)$.

З іншого боку, розглянемо $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto (x-F_x) - i(y-F_y)$.

Нарешті, визначимо $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w := \Psi \circ \Phi^{-1}$. Перевіримо, що це голоморфна ф-ція (очевидно, вона гладка).

З виразу (*) для якобіана Φ і рівн. М.-А. $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2+F_{xx}+F_{yy}} \begin{pmatrix} 1+F_{yy} & -F_{xy} \\ -F_{xy} & 1+F_{xx} \end{pmatrix} \text{ – м. Якобі } \Phi^{-1}.$$

(тут (і далі), звичайно, другі похідні - це композиції з Φ^{-1}). Тому

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(x-F_x) = \frac{\partial x}{\partial \xi} - F_{xx}\frac{\partial x}{\partial \xi} - F_{xy}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2+F_{xx}+F_{yy}}\Big(1+F_{yy} - F_{xx}(1+F_{yy}) - F_{xy}(-F_{xy})\Big) = [\text{рівн. М.-А.}] = \frac{F_{yy}-F_{xx}}{2+F_{xx}+F_{yy}}.$$

Ан-но,

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(-y+F_y) = -\frac{\partial y}{\partial \eta} + F_{yx}\frac{\partial x}{\partial \eta} + F_{yy}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{2+F_{xx}+F_{yy}}\Big(-1-F_{xx}-F_{xy}^2+F_{yy}+F_{xx}F_{yy}\Big)$$

$$= \frac{F_{yy}-F_{xx}}{2+F_{xx}+F_{yy}} = \frac{\partial}{\partial \xi}(x-F_x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(x-F_x) = \frac{\partial x}{\partial \eta} - F_{xx}\frac{\partial x}{\partial \eta} - F_{xy}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{2+F_{xx}+F_{yy}}\cdot\Big(-F_{xy}+F_{xx}F_{xy}-F_{xy}-F_{xx}F_{xy}\Big) =$$

$$= \frac{-2F_{xy}}{2+F_{xx}+F_{yy}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(-y+F_y) = -\frac{\partial y}{\partial \xi} + F_{yx}\frac{\partial x}{\partial \xi} + F_{yy}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2+F_{xx}+F_{yy}}\Big(F_{xy}+F_{xy}+F_{xy}F_{yy}-F_{yy}\cdot F_{xy}\Big) = \frac{2F_{xy}}{2+F_{xx}+F_{yy}} = -\frac{\partial}{\partial \eta}(x-F_x).$$

Отже, w дійсно голоморфна (на $\mathbb{C}$), і її комплексна похідна:

$$w'_\zeta = \frac{\partial}{\partial \xi}(x-F_x) + i\frac{\partial}{\partial \xi}(-y+F_y) = \frac{F_{yy}-F_{xx}+2iF_{xy}}{2+F_{xx}+F_{yy}}.$$

Ця ф-ція w' - теж голоморфна на $\mathbb{C}$, причому

$$|w'|^2 = \frac{1}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2}\left(F_{yy}^2 + F_{xx}^2 \overbrace{-2F_{xx}F_{yy}}^{2F_{xx}F_{yy}-4F_{xx}F_{yy}} + 4F_{xy}^2\right) = [\text{рівн. М.-А.}] =$$

$$= \frac{1}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2}\left((F_{xx}+F_{yy})^2 - 4\right) = \frac{F_{xx}+F_{yy}-2}{F_{xx}+F_{yy}+2} < 1.$$

За Тп. Ліувілля, тоді w' постійна: $w' = c \in \mathbb{C}$.

Але, оскільки

$$1+w' = 2\,\frac{1+F_{yy}+iF_{xy}}{2+F_{xx}+F_{yy}} \Rightarrow |1+w'|^2 = \frac{4}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2}\left(1+2F_{yy} + F_{yy}^2 + \underbrace{F_{xy}^2}_{F_{xx}F_{yy}-1}\right) = [\text{рівн. М.-А.}] = \frac{4}{(2+F_{xx}+F_{yy})^2}F_{yy}(2+F_{yy}+F_{xx}) = \frac{4F_{yy}}{2+F_{xx}+F_{yy}},$$

і ан-но

$$1-w' = 2\,\frac{1+F_{xx}-iF_{xy}}{2+F_{xx}+F_{yy}} \Rightarrow |1-w'|^2 = \frac{4F_{xx}}{2+F_{xx}+F_{yy}},$$

і $1-|w'|^2 = \frac{4}{2+F_{xx}+F_{yy}}$, маємо:

$$F_{xx} = \frac{|1-w'|^2}{1-|w'|^2} = c_1 \in \mathbb{R},$$

$$F_{yy} = \frac{|1+w'|^2}{1-|w'|^2} = c_2 \in \mathbb{R},$$

а тоді і $F_{xy} = \pm\sqrt{F_{xx}F_{yy} - 1} = C_3 \in \mathbb{R}$ (за неперервністю)

Тоді з $(*)$, f_x^2 і f_y^2 – розв'язки системи квадратних рівнянь з постійними коеф., за неперервн., це константи, отже, f лінійна. $\triangle$

Rem. Інше доведення див. у Colding-Minicozzi. Також відомо, що:

Th. 1. (Бернштейна, Де Джорджі, Альмгрен, Саймонс, 1916-1968).

Якщо $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задає мінімальну гіперповерхню у E^{n+1} при $2 \le n \le 7$, то f лінійна.

2. (Бомб'єрі - Де Джорджі - Джусті, 1969).

Для $n \geqslant 8$ $\exists$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що задають мін. гіперповерхню у E^{n+1} і не є лінійними.

Rem. Зокрема, така ф-ція $\exists$ серед ф-цій вигляду

$$(x^1, \ldots, x^8) \mapsto g\left(\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^4)^2}, \sqrt{(x^5)^2 + \ldots + (x^8)^2}\right).$$

Друга варіація об'єму і стійкість

Пр. (Загальні формули варіації об'єму).

Нехай (M, φ) – n-вимірний (гл.) підмноговид у $(\overline{M}, \overline{g})$, орієнтований, $\sigma : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ – його варіація з (кубовним) носієм D, тобто $\sigma(\cdot, z) = \varphi$ за межами $\operatorname{Int} D$ $\forall z$. У позначеннях, введених вище:

1. Перша варіація об'єму D має вигляд

$$\delta \operatorname{Vol}(D) = -\int_D \overline{g}(Y^{\perp}, nH)\, dV_g,$$

де g – I ф.ф. (M, φ), H – його поле середньої кривини, $Y = \sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\Big|_{z=0}$.

2. Якщо (M, φ) мінімальний $(H = 0)$, а варіація нормальна (тобто Y – нормальне поле: $Y^{T} = 0$), то друга варіація об'єму D має вигляд

$$\delta^2 \operatorname{Vol}(D) = \int_D \Big(\sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\nabla^{\perp}_{E_i} Y, \nabla^{\perp}_{E_i} Y) - \sum_{i,j=1}^{n} \overline{g}(B(E_i, E_j), Y)^2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{R}(E_i, Y)Y, E_i\right) \Big) \, dV_g ,$$

(переставити пари аргументів місцями (або) розуміти E_i як $\varphi_*(E_i)$)

де $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ - лок. ортонорм. репер M; B - II ф.ф. (M, φ), $\nabla^{\perp}$ - його нормальна зв'язність, $\bar{R}$ - тензор кривини $(\bar{M}, \bar{g})$.

▶ Викор. позначення як раніше: $\forall z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\varphi_z := \sigma(\cdot, z)$ - занурення M у $\bar{M}$, $g_z := \varphi_z^* \bar{g}$ - його I ф.ф. Зокрема, $\varphi_0 = \varphi$ і $g_0 = g$. На відкр. околі U т. $p \in M$ нехай $(u^1, \dots, u^n)$ - лок. коорд. M (що відп. орієнтації), $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ - ортонорм. репер, $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^{q}$ - ортонорм. репер норм. полів. Як і у одному з минулих доведень, $\Phi_z : \sqrt{\det G_z} \sqrt{\det G_0^{-1}}$ (де G_z - лок. м-ця Грама g_z) - коректно визначена ф-ція, і

$$\delta \, Vol(D) = \int_D \frac{d\Phi_z}{dz}\Big|_{z=0} dV_g ,$$

$$\delta^2 \, Vol(D) = \int_D \frac{d^2\Phi_z}{dz^2}\Big|_{z=0} dV_g .$$

Для $G_s = ((g_s)_{ij})_{i,j=1}^n$ $\left(G_s^{-1} = ((g_s)^{ij})_{i,j=1}^n\right)$, ан-но до підрахунку у доведенні лок. ф-ли для лапласіана:

$$\frac{d}{ds}\varphi_s = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det G_s}}\frac{d}{ds}\det G_s \sqrt{\det G_0^{-1}} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{d}{ds}(g_s)_{ij}\right)}(g_s)^{ij} \cdot \underbrace{\sqrt{\det G_s}\sqrt{\det G_0^{-1}}}_{\varphi_s}$$

далі позначаємо просто $(g'_s)_{ij}$.

Тоді

$$\frac{d^2}{ds^2}\varphi_s = \frac{1}{2}(g''_s)_{ij}(g_s)^{ij}\varphi_s + \frac{1}{2}(g'_s)_{ij}(g'_s)^{ij}\varphi_s + \frac{1}{4}\left((g'_s)_{ij}(g^s)^{ij}\right)^2\varphi_s$$

Нехай лок. коорд. обрано так, що у p $G_0 = G_0^{-1} = I$.

Тоді, зокрема

$$\frac{d}{ds}\varphi_s\Big|_{s=0}(p) = [\varphi_0 = 1] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (g'_0)_{ii}(p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{d}{ds}\left(g_s\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right)\Big|_{s=0}(p) = \sum_{i=1}^n g_s\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\Big|_{s=0}(p) = \sum_{i=1}^n \bar{g}\left(\bar{\nabla}_Y X_i, X_i\right)(p) =$$

Тут ∇ — зв'язність, що індукована на $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ відображенням σ (зокрема, її обмеження на $M \times \{s\}$ — ріманова зв'язність g_s),

$\overline{\nabla}$ - рім. зв'язність $\overline{g}$, $X_i = \sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\Big|_{s=0}$, $i=\overline{1,n}$, тд

$\overline{\nabla}_Y X_i$ розуміємо коваріантні похідні продовжень відп. полів

Зокрема, $\overline{\nabla}_Y X_i - \overline{\nabla}_{X_i} Y = \sigma_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right]\right) = 0$: $\left[=[\overline{Y}, \overline{X_i}] = \dots\right.$ - дужка Лі продовжень.$\left.\right]$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{X_i} Y, X_i\right)(p) = \left(\sum_{i=1}^n \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{X_i} Y^T, X_i\right) + \sum_{i=1}^n \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{X_i} Y^\perp, X_i\right)\right)$

$(p) = \left[\begin{array}{l} Y^T \text{ ототожнюємо з його} \\ \text{прообразом під дією } \varphi_* \text{ і вважаємо} \\ \text{полем на } M;\ \overline{g}(X_i, Y^\perp) = 0 \\ \text{вик. розкл. Гаусса} \end{array}\right] = \sum_{i=1}^n g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y^T, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(p) + \sum_{i=1}^n \Big(\underbrace{X_i\left(\overline{g}(Y^\perp, X_i)\right)}_{0} -$

$- \overline{g}\left(Y^\perp, \overline{\nabla}_{X_i} X_i\right)\Big)(p) = \left[\begin{array}{l}\text{розкл.} \\ \text{Гаусса}\end{array}\right] = \sum_{i=1}^n g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y^T, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(p) - \sum_{i=1}^n \overline{g}\left(B\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right), Y^\perp\right)(p)$

$= \left[\begin{array}{l} \text{у } p\ \left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}_{i=1}^n \\ \text{ортонорм., можна} \\ \text{вважати, що це } \{E_i\}_{i=1}^n \end{array}\right] = \left(\sum_{i=1}^n g\left(\nabla_{E_i} Y^T, E_i\right) - \sum_{i=1}^n \overline{g}\left(B(E_i, E_i), Y^\perp\right)\right)(p) =$

(дивергенція (M, g)),

<u>Впр.</u> Для поля X на M $\sum_{i=1}^n g\left(\nabla_{E_i} X, E_i\right) = \operatorname{div} X$ (для ортонорм. репера $\{E_i\}_{i=1}^n$). Вивести з формули Стокса, що $\int_D \operatorname{div} X \, dV_g = \int_{\partial D} g(X, \nu) \, dV_{i^* g}$ (вважаємо ∂D достатньо добрим), де $i : \partial D \to M$ - вкладення, ν - норм. поле ∂D. Як $\operatorname{div} X$ виглядає у лок. коорд.?

За <u>Впр.</u> і <u>def.</u> H, маємо (за необхідності розглякривих іншї лок. корд. в околах інших точок):

$$\frac{d}{ds}\varphi_s\Big|_{s=0} = \operatorname{div} Y^T - \bar{g}(nH, Y^\perp).$$

Оскільки $Y=0$ на ∂D, з Тп. Стокса:

$$\delta \operatorname{Vol}(D) = \int_D \frac{d}{ds}\varphi_s\Big|_{s=0} dV_g = -\int_D \bar{g}(nH, Y^\perp)\, dV_g. \quad (1)$$

(зокрема, це 0 $\forall$ варіації $\Leftrightarrow H=0$).

Повертаюся до другої похідної φ_s, знову беремо $b_{ro} = b_{ro}^{-1} = I$ у р. Нехай, крім того, $H=0$ і $Y^T=0$.

$$\frac{d^2}{ds^2}\varphi_s\Big|_{s=0}(p) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (g_0'')_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (g_0')_{ij}(g_0')^{ij} + \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (g_0')_{ii}\right)^2\right)\Bigg|_{(p)}$$

Тоді останній доданок – це $\frac{1}{4}\left(\frac{d}{ds}\varphi_s\Big|_{s=0}(p)\right)^2 = 0$ з отриманої вище ф-ли і умов $H=Y^T=0$. Диференціюючи за s умову $(g_s)_{ij}(g_s)^{jk} = \delta_i^k$, маємо $(g_s')_{ij}(g_s)^{jk} + (g_s)_{ij}(g_s')^{jk} = 0$, тому при $s=0$ і у p маємо

$$(g_0')_{ij}(p)\,\delta^{jk} + \delta_{ij}(g_0')^{jk}(p) = 0 \Rightarrow (g_0')^{ik}(p) = -(g_0')_{ik}(p)$$

$\forall\, i,k=\overline{1,n}$. Аналогічно до обчислення $(g_0')_{ii}(P)$ вище, маємо:

$$(g_0')_{ij}(P)=\frac{d}{ds}g_s\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\Big|_{s=0}(P)=\Big(g_s\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\Big)+$$

$$+g_s\Big(\frac{\partial}{\partial u^i},\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial u^j}\Big)\Big)\Big|_{s=0}(P)=\Big(\bar g\big(\bar\nabla_Y X_i,X_j\big)+\bar g\big(X_i,\bar\nabla_Y X_j\big)\Big)(P)=$$

$$=\Big(\bar g\big(\bar\nabla_{X_i}Y,X_j\big)+\bar g\big(X_i,\bar\nabla_{X_j}Y\big)\Big)(P)=\left[\begin{array}{l}Y=Y^\perp \text{ - нормальне, тому}\\ \bar g(X_i,Y)=\bar g(X_j,Y)=0\end{array}\right]=$$

$$=-\Big(\bar g\big(Y,\bar\nabla_{X_i}X_j\big)+\bar g\big(\bar\nabla_{X_j}X_i,Y\big)\Big)(P)=\left[\begin{array}{l}\text{розкл. Гаусса,}\\ \text{симетричність } B\end{array}\right]=$$

$$=-2\,\bar g\Big(B\Big(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\Big),Y\Big)(P)=-2\,\bar g\big(B(E_i,E_j),Y\big)(P)\ (\forall\, i,j=\overline{1,n})$$

<u>Впр.</u> $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\bar g\big(B(E_i,E_j),Y\big)^2$ коректно визначена (не залежить від вибору ортонорм. репера).

Отже, другий доданок у $\frac{d^2}{ds^2}\Phi_s\big|_{s=0}(P)$ – це

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big((g_0')_{ij}(P)\Big)^2=-2\sum_{i,j=1}^{n}\bar g\big(B(E_i,E_j),Y\big)^2(P).$$

Нарешті, перший доданок:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(g_0'')_{ii}(P)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{ds}\Big(\frac{d}{ds}g_s\Big(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^i}\Big)\Big)\Big|_{s=0}(P)=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{ds}\left(g_s\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right)\Big|_{s=0}(p) = \sum_{i=1}^{n} g_s\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\Big|_{s=0}(p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} g_s\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\Big|_{s=0}(p) = \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_Y X_i, X_i\right)(p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_Y X_i, \bar{\nabla}_Y X_i\right)(p) = \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_i} Y, X_i\right)(p) + \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{X_i} Y, \bar{\nabla}_{X_i} Y\right)(p) =$$

[озн. $\bar{R}$ і $[\bar{X}_i, \bar{Y}] = 0$, розкл. Вейнгартена для норм. поля Y]

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\bar{g}\left(\bar{R}(Y, X_i)Y, X_i\right)(p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{X_i} \bar{\nabla}_Y Y, X_i\right)(p) + \sum_{i=1}^{n} g\left(A_Y \frac{\partial}{\partial u^i}, A_Y \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(p) + \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y, \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y\right)(p) = -\sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{R}(Y, X_i)X_i, Y\right)(p) + \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{X_i}\left((\bar{\nabla}_Y Y)^{T}\right), X_i\right)(p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{X_i}\left((\bar{\nabla}_Y Y)^{\perp}\right), X_i\right)(p) + \sum_{i,j=1}^{n} g\left(A_Y \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)^2 (p) + \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y, \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y\right)(p) =$$

і тут

[Ортонорм. у P
2 дод. – розкл. Гаусса
3 дод. – $\bar{g}(X_i, \bar{\nabla}_Y Y^{\perp}) = 0$ і розкл. Гаусса
4-дод. – зв'язок A і B]

$$= -\sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\bar{R}(Y, E_i)E_i, Y\right)(p) + \sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_{E_i}(\bar{\nabla}_Y Y)^{T}, E_i\right)(p) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left((\bar{\nabla}_Y Y)^{\perp}, B(E_i, E_i)\right)(p) + \sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}\left(B(E_i, E_j), Y\right)^2 (p) + \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\nabla^{\perp}_{E_i} Y,\right.$$

$\nabla^{\perp}_{E_i} Y)(p)$ (Тут $\bar{\nabla}_Y Y : p \mapsto (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y})_{\varphi(p)}$, де $\bar{Y}$ - лок. продовж. Y - поле на $\bar{M}$; як і $(\bar{\nabla}_Y Y)^T$)

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i) = nH = 0$, додаючи вирази для першого і другого доданків у ф-лі для $\frac{d^2}{ds^2}\Phi_s\big|_{s=0}$ (і розглядаючи інші лок. коорд. у околах інших точок), маємо:

$$\frac{d^2}{ds^2}\Phi_s\Big|_{s=0} = -\sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\bar{R}(Y, E_i)E_i, Y) + \operatorname{div}(\bar{\nabla}_Y Y)^T - \sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}(B(E_i, E_j), Y)^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\nabla^{\perp}_{E_i} Y, \nabla^{\perp}_{E_i} Y).$$

Тоді за Т. Стокса маємо 2:

$$\delta^2 \operatorname{Vol}(D) = \int_D \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\nabla^{\perp}_{E_i} Y, \nabla^{\perp}_{E_i} Y)} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\bar{R}(Y, E_i)E_i, Y)} - \sum_{i,j=1}^{n} \bar{g}(B(E_i, E_j), Y)^2 \Big) dV_g \quad \blacktriangle$$

тепс не залежать від вибору лок. репера (Впр.)

Сл. (M, φ) мінімальний $\Leftrightarrow \forall$ кубовної $D \subset M$ $\forall$ варіації з носієм D $\delta \operatorname{Vol}(D) = 0$.

▶ $\Rightarrow$ очевидно з 1., $\Leftarrow$: $\nexists$ $\exists p \in M : H_p \neq 0$. Тоді продовжимо H_p нормальним полем Y на окіл p так, щоб $Y|_{M \setminus \operatorname{Int} D} = 0$ і $\bar{g}(H, Y) \geq 0$ (звичайно, у p це > 0) для якоїсь кубовної D. Побудуємо

варіацію, що відповідає такому Y (див. <u>Rem.</u> нижче), тоді для неї з $\underline{1}$ $\delta Vol(D) < 0$. ↯ ▲

<u>Rem.</u> Нехай Y – $\overline{(гл.)}$ нормальне поле на M з компактним носієм (тобто $\overline{supp\, Y}$ – компакт). $\underline{Тоді}$ існує кубовна D: $supp\, Y \subset Int\, D$ (просто покриємо $\overline{supp\, Y}$ скінч. кількістю $\{D_i\}_{i=1}^m$ – прообразів замкн. евкл. куль при коорд. відображеннях; тоді $\bigcup_{i=1}^m D_i$ – кубовна) і варіація σ з носієм D: $\sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{s=0} = Y$. Її можна побудувати, наприклад, за допомогою лок. коорд. $\overline{:}$ $\sigma^a(u^1, \ldots, u^n, s) := x^a(u^1, \ldots, u^n) + s\, Y^a(u^1, \ldots, u^n)$ для $a = \overline{1, n+q}$, де x^a – a-та коорд. ф-ція лок. задання r, і $Y = Y^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ (<u>Впр.</u> $\exists\ \varepsilon > 0$ таке, що для $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\sigma(\cdot, s)$ – занурення; тут достатньо розглянути скінченну кількість пар локальних систем коорд. (карт), бо $\overline{supp\, Y}$ – компакт, а за його межами $\sigma(\cdot, s) = r$)

Або можна використати геодезичні: $\sigma(p,s) = \exp_{\varphi(p)}(s\,Y_p)$

(де exp – експон. відобр. $(\overline{M}, \overline{g})$) (Впр. перевірити).