gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 15. Ізометрії, конформні і еквіареальні відображення

15.1 Перша фундаментальна форма і відображення поверхонь

Розглянемо неперервне відображення загальних поверхонь F і M:

$$\Psi : F \to M$$

Визначення. Відображення Ψ називається *ізометричним*, якщо воно зберігає довжину кривих.

Визначення. Відображення Ψ називається *конформним*, якщо воно зберігає кут між кривими.

Визначення. Відображення Ψ називається *еквіареальним*, якщо воно зберігає площу областей

Нехай поверхні F і M є регулярними і відображення

$$\Psi: F \to M$$

є регулярним і взаємно однозначним.

Твердження. *Відображення Ψ є ізометричним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках співпадають.*

Твердження. *Відображення Ψ є конформним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках пропорційні.*

Твердження. *Відображення Ψ є еквіареальним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках мають однакові визначники матриць коефіцієнтів.*

Ізометричність	Конформність	Еквіареальність
$g_F = g_M$	$g_F = \Lambda \cdot g_M$	$\det g_F = \det g_M$

Аналітична інтерпретація

Можна ввести локальні координати (u^1, u^2) на поверхні F і локальні координати (v^1, v^2) на поверхні M так, що відображення Ψ: $F \to M$ задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$$

Перша фундаментальна форма поверхні F має вигляд

$$g = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2 \; .$$

Перша фундаментальна форма поверхні M має вигляд

$$G = G_{11}(dv^1)^2 + 2G_{12}dv^1dv^2 + G_{22}(dv^2)^2 \; ,$$

Ізометричність відображення Ψ:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}.$$

Конформність відображення Ψ:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}.$$

Еквіареальність відображення Ψ:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}.$$

Твердження. *Відображення Ψ є ізометричним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках співпадають.*

Ідея доведення.

$\Leftarrow$) Припустимо, що перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках співпадають. Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M , вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і крива γ на поверхні F і відповідна крива Γ на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad a<t<b.$$

Оскільки

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{G_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2G_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + G_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

а перші фундаментальні форми співпадають,

$$G_{11} = g_{11},\ G_{12} = g_{12},\ G_{22} = g_{22},$$

то $l(\gamma) = l(\Gamma)$.

$\Rightarrow$) Припустимо, що довжина відповідних (за відображенням Ψ) кривих на поверхнях F і M співпадає. Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M, вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і крива γ на поверхні F і відповідна крива Γ на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad a<t<b.$$

Оскільки

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{G_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2G_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + G_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

і $l(\gamma) = l(\Gamma)$ за умовою, то

$$\int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{G_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2G_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + G_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

Зважаючи на те, що границі інтегрування не є фіксованими, отримуємо

$$g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1 d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2 = G_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2G_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + G_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2,$$

тобто

$$(G_{11} - g_{11})(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2(G_{12} - g_{12})\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + (G_{22} - g_{22})(\frac{d\xi^2}{dt})^2 = 0$$

Оскільки крива γ на поверхні F , задана функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases},$$

є довільною, з останньої рівності випливає

$$G_{11} - g_{11} = 0, \quad G_{12} - g_{12} = 0, \quad G_{22} - g_{22} = 0$$

Це і означає, що перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних (за відображенням Ψ) точках співпадають.

Твердження. *Відображення Ψ є конформним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках пропорційні.*

Ідея доведення.

$\Leftarrow$) Припустимо, що перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках пропорційні. Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M , вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і криві γ_1, γ_2 на поверхні F і відповідні криві Γ_1, Γ_2 на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\gamma_1\,,\ \Gamma_1:\begin{cases} u^1=\xi^1(t)\\ u^2=\xi^2(t)\end{cases},\qquad \gamma_2\,,\ \Gamma_2:\begin{cases} u^1=\eta^1(\sigma)\\ u^2=\eta^2(\sigma)\end{cases}$$

Кут між кривими γ_1, γ_2:

$$\cos\varphi=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot\frac{d\xi^j}{dt}(t_0)}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0)\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Кут між кривими Γ_1, Γ_2:

$$\cos\hat{\varphi} = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

За умовою, перші фундаментальні форми поверхонь F і M пропорційні

$$G_{11} = \Lambda \cdot g_{11},\ G_{12} = \Lambda \cdot g_{12},\ G_{22} = \Lambda \cdot g_{22},$$

Отримуємо:

$$\cos\hat{\varphi} =$$

$$= \frac{\sum_{i,j=1}^{2} \Lambda(u_0^1, u_0^2) g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} \Lambda(u_0^1, u_0^2) g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} \Lambda(u_0^1, u_0^2) g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}} =$$

$$= \frac{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Таким чином,

$$\cos\hat{\varphi} = \cos\varphi,$$

тобто кут між кривими γ_1, γ_2 на поверхні F і кут між відповідними кривими Γ_1, Γ_2 на поверхні M співпадають.

$\Rightarrow$) Припустимо, що кут між довільними кривими γ_1, γ_2 на поверхні F і кут муж відповідними кривими Γ_1, Γ_2 на поверхні M співпадають.

Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M , вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і криві γ_1, γ_2 на поверхні F і відповідні криві Γ_1, Γ_2 на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\gamma_1, \Gamma_1 : \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad \gamma_2, \Gamma_2 : \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases}$$

Кут між кривими γ_1, γ_2:

$$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \dfrac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \dfrac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \dfrac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \dfrac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \dfrac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \dfrac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Кут між кривими Γ_1, Γ_2:

$$\cos\hat{\varphi} = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Припустимо, що криві γ_1, γ_2 є взаємно ортогональними:

$$g_{11}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma} + g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma} + g_{21}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma} + g_{22}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma} = 0.$$

Тоді відповідні криві Γ_1, Γ_2 теж є взаємно ортогональними:

$$G_{11}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma} + G_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma} + G_{21}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma} + G_{22}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma} = 0$$

Запишемо ці співвідношення у вигляді

$$\begin{pmatrix} g_{11}\frac{d\xi^1}{dt} + g_{21}\frac{d\xi^2}{dt} & g_{12}\frac{d\xi^1}{dt} + g_{22}\frac{d\xi^2}{dt} \\ G_{11}\frac{d\xi^1}{dt} + G_{21}\frac{d\xi^2}{dt} & G_{12}\frac{d\xi^1}{dt} + G_{22}\frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\eta^1}{d\sigma} \\ \frac{d\eta^2}{d\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Звідси отримаємо

$$\frac{g_{11}\frac{d\xi^1}{dt}+g_{21}\frac{d\xi^2}{dt}}{G_{11}\frac{d\xi^1}{dt}+G_{21}\frac{d\xi^2}{dt}}=\frac{g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}+g_{22}\frac{d\xi^2}{dt}}{G_{12}\frac{d\xi^1}{dt}+G_{22}\frac{d\xi^2}{dt}}$$

Якщо підставити $\frac{d\xi^1}{dt}=0$, отримаємо $\frac{g_{21}}{G_{21}}=\frac{g_{22}}{G_{22}}$

Якщо підставити $\frac{d\xi^2}{dt}=0$, отримаємо $\frac{g_{11}}{\widetilde{G}_{11}}=\frac{g_{12}}{\widetilde{G}_{12}}$

Значить, перші фундаментальні форми поверхонь F і M пропорційні

$$\frac{g_{11}}{G_{11}}=\frac{g_{12}}{G_{12}}=\frac{g_{21}}{G_{21}}=\frac{g_{22}}{G_{22}}$$

Зауваження.

1. Якщо відображення є ізометричним, воно є конформним

(Перші фундаментальні форми співпадають → перші фундаментальні форми пропорційні)

2. Якщо відображення є ізометричним, воно є еквіареальним

(Перші фундаментальні форми співпадають → перші фундаментальні форми мають рівні визначники матриць коефіцієнтів)

Задача. Що можна сказати про відображення, яке одночасно є конформним і еквіареальним?

Визначення. Регулярні прості поверхні F і M називаються *ізометричними*, якщо між ними можна встановити регулярне взаємно однозначне відображення $\Psi: F \to M$, яке є ізометричним.

Твердження. *Ізометричність регулярних поверхонь є відношенням еквівалентності:*

1) кожна поверхня ізометрична сама собі, відповідне відображення Ψ *є тотожнім,*

2) якщо відображення $\Psi: F \to M$ *є ізометричним, то* $\Psi^{-1}: M \to F$ *є ізометричним,*

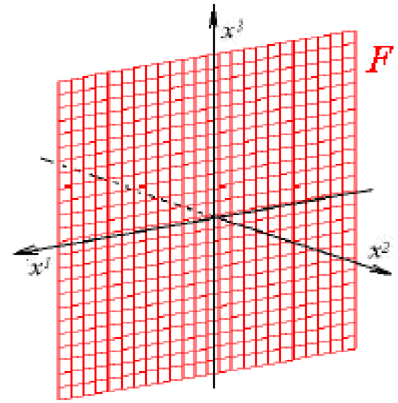
3) якщо відображення $\Psi: F \to M$ *і* $\Psi^{*}: M \to M^{*}$ *є ізометричними, то відображення* $\Psi^{*} \circ \Psi: F \to M^{*}$ *є ізометричним.*

Зауваження. Ізометричні поверхні мають однакову внутрішню геометрію.

Приклад 1.1. Площина і циліндрична поверхня

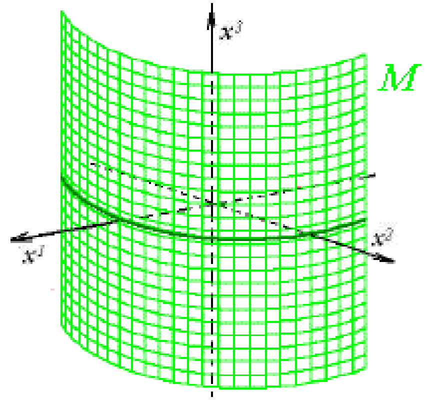
Нехай F – площина з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$$



Нехай M – циліндр з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho^1(v^1) \\ \rho^2(v^1) \\ v^2 \end{pmatrix},$$



де v^1 – натуральний параметр на базовій кривій циліндра, заданій параметрично $x^1=\rho^1(u^1)$, $x^2=\rho^2(u^1)$, $x^3=0$.

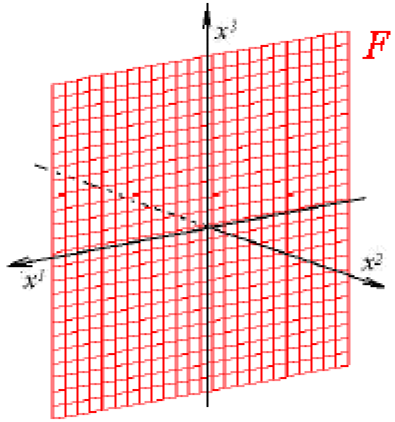
Перші фундаментальні форми:

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2 \qquad G = (dv^1)^2 + (dv^2)^2$$

Відображення Ψ: $\begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$ є взаємно однозначним*, перші фундаментальні форми співпадають. Значить, відображення Ψ – ізометричне.

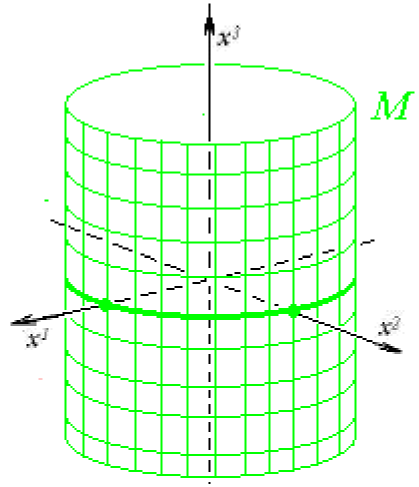
Приклад 1.2. Площина і круговий циліндр

Нехай F – площина з радіус-вектором $\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$



Нехай M – круговий циліндр з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\cos\frac{v^1}{R} \\ R\sin\frac{v^1}{R} \\ v^2 \end{pmatrix}$$



Перші фундаментальні форми:

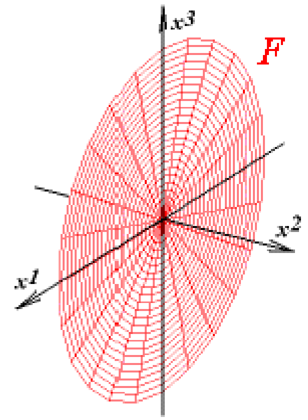
$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2 \qquad\qquad G = (dv^1)^2 + (dv^2)^2$$

Відображення Ψ: $\begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$ є взаємно однозначним локально*, перші фундаментальні форми співпадають. Значить, відображення Ψ – локально ізометричне.

Приклад 1.3. Площина і конічна поверхня

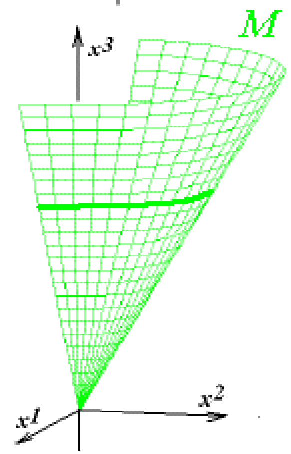
Нехай F – площина з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \cos u^2 \\ 0 \\ u^1 \sin u^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} u^1 > 0 \\ \alpha < u^2 < \beta \end{matrix}$$



Нехай M – конус з радіус-вектором

$$\vec{x} = v^1 \cdot \begin{pmatrix} \rho^1(v^2) \\ \rho^2(v^2) \\ \rho^3(v^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} v^1 > 0 \\ \alpha < v^2 < \beta \end{matrix},$$



де v^2 – натуральний параметр на базовій кривій конуса, заданій параметрично $x^1 = \rho^1(v^2)$, $x^2 = \rho^2(v^2)$, $x^3 = \rho^3(v^2)$. Вважаємо, що базова крива лежить на сфері одиничного радіусу.

Перші фундаментальні форми:

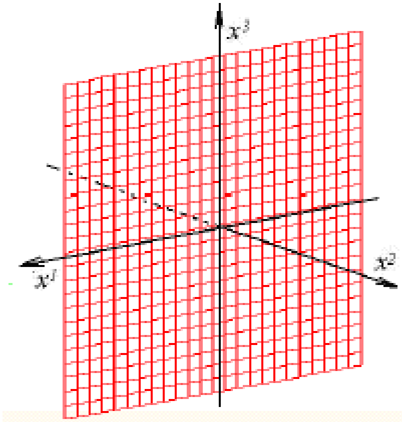
$$g = (du^1)^2 + (u^1)^2 \cdot (du^2)^2 \qquad\qquad G = (dv^1)^2 + (v^1)^2 \cdot (dv^2)^2$$

Відображення Ψ: $\begin{cases} v^1 = u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$ є взаємно однозначним*, перші фундаментальні форми співпадають. Значить, відображення Ψ – ізометричне.

Приклад 1.4. Площина і торсова поверхня

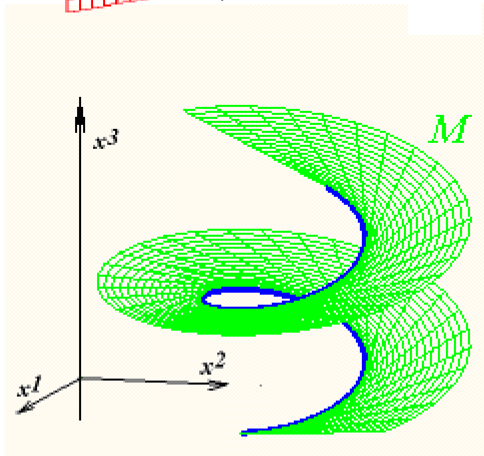
Нехай F – площина з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$$



Нехай M – торсова поверхня з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{\rho} + v^1 \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dv^2}, \qquad \begin{matrix} v^1 > 0 \\ \alpha < v^2 < \beta \end{matrix},$$



де $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v^2)$ – радіус-вектор базової кривої, параметризованої натуральним параметром v^1.

Перші фундаментальні форми:

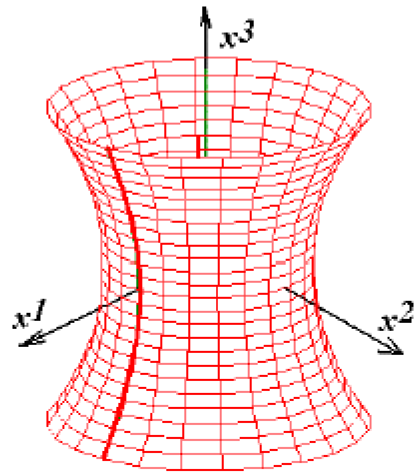
$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2 \qquad\qquad G = (dv^1)^2 + 2\, dv^1\, dv^2 + (1+(v^1)^2 \cdot k^2)\cdot(dv^2)^2$$

Існує відображення Ψ: $\begin{cases} u^1 = \xi^1(v^2) + v^1 \cdot \eta^1(v^2) \\ v^2 = \xi^2(v^2) + v^1 \cdot \eta^2(v^2) \end{cases}$, яке є взаємно однозначним* і перші фундаментальні форми співпадають. Значить, відображення Ψ – ізометричне.

Приклад 2. Гелікоїд і катеноїд

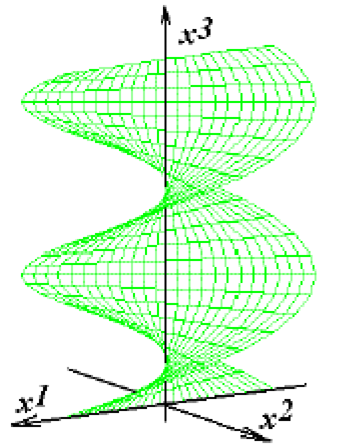
Нехай F –катеноїд з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \cos u^2 \\ \cosh u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$



Нехай M – гелікоїд з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v^1 \cos v^2 \\ v^1 \sin v^2 \\ v^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} -\infty < v^1 < \infty \\ 0 < v^2 < 2\pi \end{matrix}$$



Перші фундаментальні форми:

$$g = \cosh^2 u^1 (du^1)^2 + \cosh^2 u^1 (du^2)^2 \qquad G = (dv^1)^2 + (1+(v^1)^2)\cdot(dv^2)^2$$

Відображення Ψ: $\begin{cases} v^1 = \sinh u^1 \\ v^2 = u^2 \end{cases}$ є взаємно однозначним, перші фундаментальні форми співпадають. Значить, відображення Ψ – ізометричне.

Приклад 3. Якщо регулярна проста поверхня F ізометрична сфері S^2, то вона конгруентна сфері M.

Приклад 4. Якщо регулярна проста поверхня F ізометрична еліпсоїду M, то вона конгруентна цьому еліпсоїду.

….

Зауваження. В загальному випадку дві навмання взяті регулярні поверхні F і M не є ні ізометричними, ні локально ізометричними.

Нехай задано поверхні F і M. Чи є вони локально ізометричними?

$$F \qquad\qquad\qquad\qquad M$$

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du^i du^j \qquad\qquad G = \sum_{k,l=1}^{2} G_{kl} dv^k dv^l$$

Чи існує регулярне відображення $\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$ таке, що

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du^i du^j = \sum_{k,l=1}^{2} G_{kl} d\xi^k d\xi^l \quad ?$$

Якщо підставити $d\xi^k = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} du^i$, $d\xi^l = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} du^j$, то отримаємо

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} G_{kl} \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j}, \quad 1 \le i, j \le 2.$$

Маємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних. Питання існування і єдності її розв’язків є нетривіальним.

Реалізація ріманових метрик

Нехай в області $(u^1,u^2)\in\Omega$ задано білінійну диференціальну форму

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,du^i du^j$$

Припустимо, що вона є симетричною і додатно визначеною.

Чи існує регулярна поверхня F, параметризована координатами (u^1,u^2), для якої перша фундаментальна форма співпадає з заданою диференціальною формою g ?

Аналітична інтерпретація: чи існує вектор-функція

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1,u^2)\ ,\quad (u^1,u^2)\in\Omega,$$

така, що

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle,\quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle,\quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle ?$$

Маємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Питання існування і єдності її розв'язків є нетривіальним.