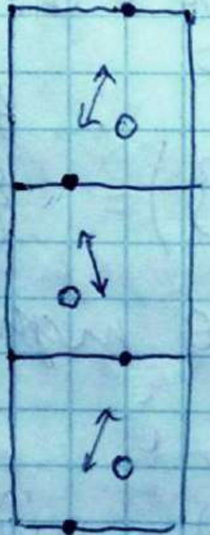
34.5 Ан-но до 34.4. :

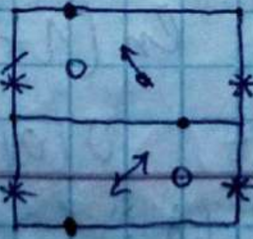
> 41.10х(3) Усі класи ізоморфних накриттів відн. точного ленти Мебіуса M відповідають підгрупам $\pi_1(M, y) \simeq \mathbb{Z}$, тобто $n\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Z}$. При парному $n>0$ це накр. як у 34.4., при непарному – як у 34.5. $\mathbb{Z}$ – тривіальне, $\{0\}$ – універс. накр. смугою $I \times \mathbb{R}$.



факторизуємо за показаною дією $\mathbb{Z}_3$

$/\sim$: $(x,0) \sim (1-x,3)$

34.6 Теж ан-но до 34.4 :



факторизуємо за дією $\mathbb{Z}_2$.

$/\sim$: $(x,0) \sim (x,1)$
$(0,y) \sim (1,y)$

35.6. Отже, для $(\mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus\{0\}, p)$, де $p: z \mapsto e^z$ під-
няттям $f: t \mapsto 2-t$ з початком у $\ln 2 + 2\pi i k \in$
$\tilde{f}: t \mapsto \ln(2-t) + 2\pi i k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Ан-но для $g(t) = (1+t)e^{2\pi i t}$: $g(0) = 1 = f(1)$ (i $g(1) =$
$= 2 = f(0)$), $p^{-1}(1) = \{\ln 1 + 2\pi i k\} = \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Якщо $\tilde{g}(t) = u(t) + i v(t)$ задає підняття з початком у
$2\pi i k$, то $u(0) = 0$, $v(0) = 2\pi k$, і

$$(1+t)\cos 2\pi t + i(1+t)\sin 2\pi t = g(t) = p(\tilde{g}(t)) = e^{u(t)}\cos v(t) + i e^{u(t)}\sin v(t).$$

$1+t > 0 \Rightarrow 1+t = e^{u(t)} \Rightarrow u(t) = \ln(1+t)$ (дійсно $u(0) = 0$).

$\cos v(t) = \cos 2\pi t$, $\sin v(t) = \sin 2\pi t$, $v(0) = 2\pi k \Rightarrow v(t) = 2\pi(t+k)$.

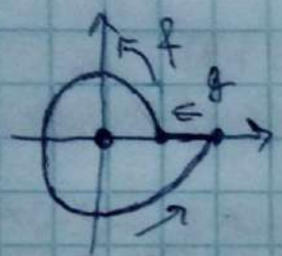
Отже, $\tilde{g}(t) = \ln(1+t) + 2\pi(t+k)i$.

$\forall k$ $\tilde{f}(1) = 2\pi i k = \tilde{g}(0) \Rightarrow \tilde{f} * \tilde{g}$ визначені і є підняттям з початком у $\ln 2+2\pi k i$,

$f*g$. Але $f*g$ – петля у 2 а $\tilde{f}*\tilde{g}$ – не петля:

$\tilde{f}*\tilde{g}(1)=\tilde{g}(1)=\ln 2+2\pi(1+k)i \neq \ln 2+2\pi k i=\tilde{f}(0)=\tilde{f}*\tilde{g}(0)$.

Це тому, що $f*g$ має нетривіальний гомотопічний клас:



Підняття петлі $g*f$ з початком у $2\pi k i$ є $\tilde{g}*\tilde{f}'$,

де $\tilde{f}'(0)=\tilde{g}(1)=\ln 2+2\pi(1+k)i$, тому $\tilde{f}'(t)=\ln(2-t)+2\pi(1+k)i$,

і $\tilde{g}*\tilde{f}'(1)=\tilde{f}'(1)=2\pi(1+k)i\neq\tilde{g}*\tilde{f}'(0)$.

<u>40.2.</u> (X,Y,p) – накриття, X – лін. зв., $\pi_1(X)\neq\{e\}\Rightarrow$ $\pi_1(Y)\neq\{e\}$.

Це наслідок <u>Тв. 9.1.</u> лекції: $\forall\, x\in X$ і $y=p(x)\in Y$ $p_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,y)$ – inj, тому $\pi_1(X,x)\simeq p_*(\pi_1(X,x))$ нетрив. $\Rightarrow$ $\pi_1(Y,y)$ нетрив.

Але можна було перевірити і безпосередньо.

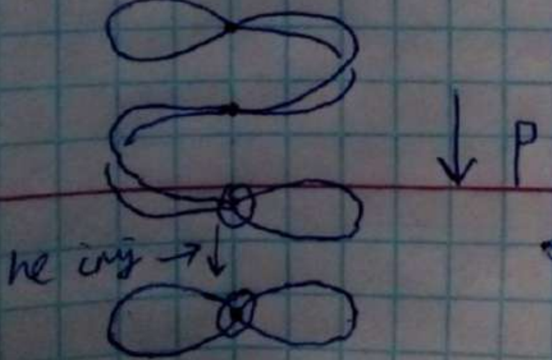
41.11х (41.15х, Впр. 10.6. лекцій)

Побудувати трилистове накриття $S^1 \vee S^1$ з лін. зв'язним накриваючим простором, що не має нетривіальних автоморфізмів => не регулярне.

За результатами розділу 11, накриття (X, Y, p) з лін. зв. і лок. лін. зв. X і Y регулярне $\Leftrightarrow$ група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на $p^{-1}(y)$ транзитивно ($\exists y \in Y \Leftrightarrow \forall y \in Y$) $\Leftrightarrow$ $p_*(\pi_1(X, x))$ нормальна у $\pi_1(Y, y)$ ($\exists x \in p^{-1}(y) \Leftrightarrow \forall x \in p^{-1}(y)$). (Зокрема, усі накриття S^1 регулярні, бо $\pi_1(S^1, x)$ абелева)

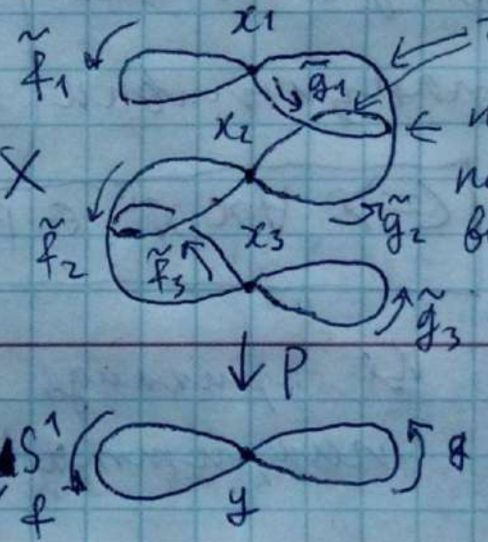
$\Leftrightarrow \forall x, x' \in p^{-1}(y) \quad p_*(\pi_1(X, x)) = p_*(\pi_1(X, x'))$

Якщо автоморфізм лише тривіальний, а шар з 3 точок, то дія не транзитивна => накриття не регулярне.



← Це приклад з відповідей, але це не накриття!

Насправді приклад виглядає так:



гвинтові лінії

подвійна точка (точки на різних гв. лініях взаємно різними)

Тут $\tilde{f}_i, \tilde{g}_i$ – підняття f, g відп. з початком у x_i, $i=\overline{1,3}$.

Автоморфізм накриття – це $\varphi: X \to X$ – гомеоморфізм:

$p \circ \varphi = p$, тобто φ переводить точки $\forall$ шару в точки того ж шару. Розглянемо шар $\{x_1, x_2, x_3\} = p^{-1}(y)$.

П. $\exists$ нетривіальний (нетотожний) автоморфізм φ. Тоді $\varphi(x_2) \neq x_2$ (бо $\varphi(x_2) = x_2 \Rightarrow \varphi = id_X$ в силу лін зв-ті, див. лекції), тобто $\varphi(x_2) = x_1$ або x_3. Нехай $\varphi(x_2) = x_1$. Тоді $\varphi \circ \tilde{f}_2$ – шлях з початком у $\varphi(x_2) = x_1$, і $p \circ \varphi \circ \tilde{f}_2 = p \circ \tilde{f}_2 = f$, тобто $\varphi \circ \tilde{f}_2$ – підняття f. З єдиності, оскільки $\tilde{f}_1$ – теж підняття f з початком у x_1, $\varphi \circ \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1$. Ан-но, $\varphi \circ \tilde{\bar{f}}_3$ – підняття $\bar{f}$ з початком у $x_1 \Rightarrow \varphi \circ \tilde{\bar{f}}_3 = \tilde{\bar{f}}_1$. Це суперечить ін'єктивності φ: $\forall t \in I$ $\varphi(\tilde{f}_2(t)) = \tilde{f}_1(t) = \tilde{\bar{f}}_1(1-t) = \varphi(\tilde{f}_3(1-t))$, але $\tilde{f}_2(t) \neq \tilde{f}_3(1-t)$ при $t \in (0,1)$. ↯. Отже, (X, Y, p) нерегулярне.

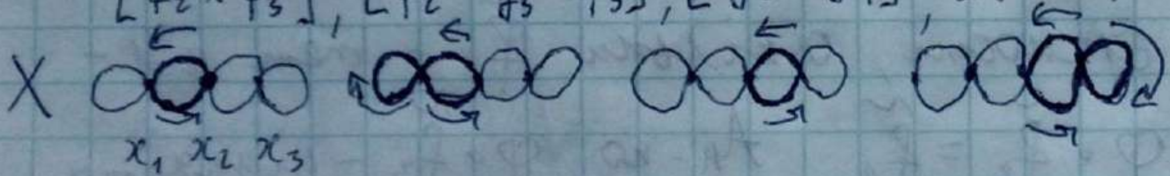
Для $\varphi(x_2) = x_3$ аналогічно.

Або: $[f] \in \pi_1(Y, y)$. Підняття f у x_1 – це петля $\tilde{f}_1$, тому $[f] \in p_*(\pi_1(X, x_1))$. Але підн. f у x_2 – це $\tilde{f}_2$, не петля. Тому $[f] \notin p_*(\pi_1(X, x_2))$ (див. лекції) $\Rightarrow p_*(\pi_1(X, x_1)) \neq p_*(\pi_1(X, x_2)) \Rightarrow$

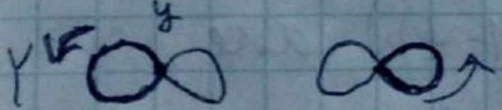
петля

(X,Y,p) нерегулярне.

<u>Або</u>: обчислимо $p_*(\pi_1(X,x_2))$ явно. $X \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$,
тому $\pi_1(X,x_2)$ – вільна група з 4 твірними. Це, наприклад,
класи петель: $[\tilde f_2 * \tilde f_3]$, $[\tilde f_2 * \tilde g_3 * \tilde f_3]$, $[\tilde g_2 * \tilde g_1]$, $[\tilde g_2 * \bar{\tilde f}_1 * \tilde g_1]$



$\pi_1(Y,y) = \pi_1(S^1 \vee S^1, y) = \langle a, b \rangle$ – вільна гр. з 2 тв., де



$a = [f]$, $b = [g]$

Тому $p_*(\pi_1(X,x_2)) \subset \pi_1(Y,y)$ – підгрупа, що породжена образами твірних $\pi_1(X,x_2)$. Наприклад, $p_*([\tilde f_2 * \bar{\tilde g}_3 * \tilde f_3]) = [p \circ (\tilde f_2 *$

$* \tilde{\bar{g}}_3 * \tilde{f}_3)] = [(p \circ \tilde{f}_2) * (p \circ \tilde{\bar{g}}_3) * (p \circ \tilde{f}_3)] = [f * \bar{g} * f] =$

$= [f][g]^{-1}[f] = ab^{-1}a$. Ан-но інші. Тому $H := p_*(\pi_1(X, x_2))$ - підгрупа, що породжена $a^2, ab^{-1}a, b^2, ba^{-1}b$ і вона нормальна.

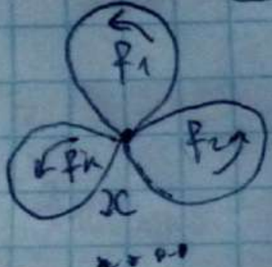
Тоді $a \cdot ab^{-1}a \cdot a^{-1} = a^2 b^{-1} \in H \Rightarrow [a^2 \in H] \Rightarrow b^{-1} \in H$. Але це не так, бо $b^{-1} = [\bar{g}]$, а піднятням петлі $\bar{g}$ у $x_2 \in$ $\bar{g}_1$ - не петля $\Rightarrow b^{-1} \notin p_*(\pi_1(X, x_2))$. ↯

Косньовскі, 24.4(a) (Впр. 13.3 лекцій)

Показати за допомогою Th. Зейферта-ван Кампена, що

$$\pi_1(\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle.$$

$=: X$



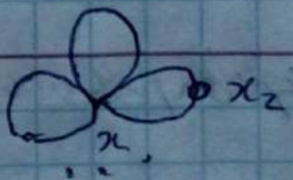
Будемо знаходити $\pi_1(X, x)$, де x – спільна точка кіл. Покажемо за індукцією, що

$$\pi_1(X, x) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle,$$

де $a_i = [f_i]$, f_i – петля, що обходить i-те коло, $i = \overline{1, n}$. Ми знаємо, що це вірно при $n = 1$ і $n = 2$.

Нехай x_i належать i-тому колу, $i = 1, 2$, $x_i \neq x$.

Покладемо $U := X \setminus \{x_1\}$, $V := X \setminus \{x_2\}$



Тоді $U \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n-1}$ – об'єднання кіл $f_2, \ldots, f_n$.

$V \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n-1}$ – об'єднання кіл $f_1, f_3, \ldots, f_n$

$U \cap V = X \setminus \{x_1, x_2\} \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n-2}$ – об'єднання кіл $f_3, \ldots, f_n$.

Тому за припущенням

$\pi_1(U, x) = \langle a_2, \ldots, a_n \rangle$, $\pi_1(V, x) = \langle b_1, b_3, \ldots, b_n \rangle$, $\pi_1(U \cap V, x) = \langle c_3, \ldots, c_n \rangle$,

де a_i, b_i, c_i – гомот. класи f_i у різних підпросторах.

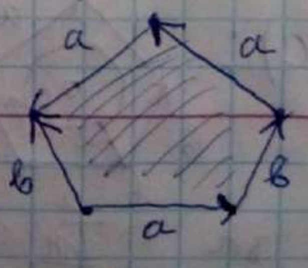
Зокрема, $(i_{UV})_*(c_i) = a_i$, $(i_{VU})_*(c_i) = b_i$ для $i = \overline{3, n}$.

Тому за теоремою

$\pi_1(X, x) \simeq \langle a_2, \ldots, a_n, b_1, b_3, \ldots, b_n \mid a_3 b_3^{-1}, \ldots, a_n b_n^{-1} \rangle =$

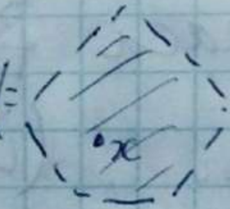
$= [a_3 = b_3, \ldots, a_n = b_n] = \langle b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \rangle$ – потрібного вигляду.

<u>К., 25.1.(б).</u> Знайти $\pi_1(X/\sim)$, де X – п'ятикутник у $\mathbb{R}^2$, а $\sim$ задається рисунком:

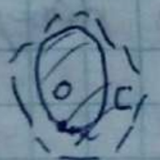


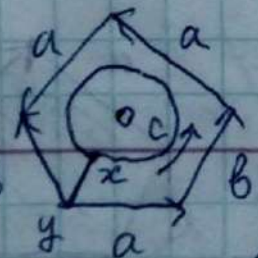
(будується аналогічно розгортці поверхні, але це не вона). Втім, усі вершини ототожнюються в у, як для розгортки. Знайдемо $\pi_1(X, x)$ ан-но до розгортки за Th. З.-в. К.:

$U =$ 

$V = \mathrm{Int}\, X =$  – стягний.

$U \sim S^1 \vee S^1 \Rightarrow \pi_1(U, x) = \langle a, b \rangle$, a і b відп. петлям, що утворюються з ребер. $\pi_1(V, x) = \langle \rangle$

$U \cap V =$  $\sim S^1 \Rightarrow \pi_1(U \cap V, x) = \langle c \rangle$, c відп. колу.

$(i_{UV})_*(c)$:  $abaab^{-1}$.

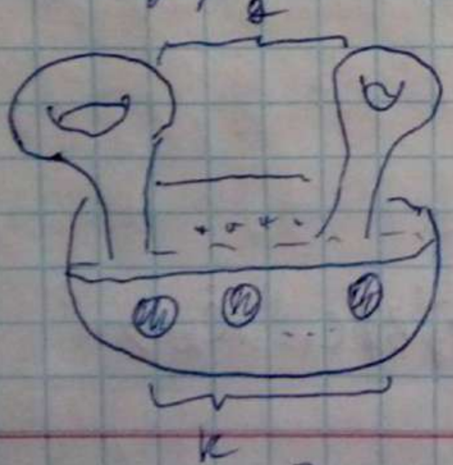
Отже, за Th. $\pi_1(X/\sim, x) \simeq \langle a, b \mid aba^2b^{-1} \rangle$.

Це неабелева група. Її абеліанізація:

$$\pi_1(X/\sim)\big/\pi_1(X/\sim)' = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}, \underbrace{aba^2b^{-1}}_{=a^3} \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3.$$

Оскільки вона неізоморфна абеліанізації жодної з фунд. гр. поверхонь, це не поверхня (і при цьому $X/\sim$ компактний і зв'язний)

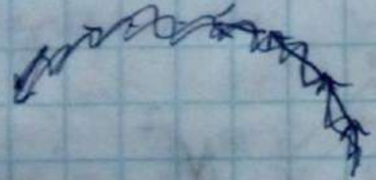
Знайдено фунд. групи $M^2_{g,k} := M^2_g \setminus (B^2_1 \sqcup \ldots \sqcup B^2_k)$ і $N^2_{g,k} := N^2_g \setminus (B^2_1 \sqcup \ldots \sqcup B^2_k)$ – комп. зв'язні поверхні роду $g > 0$ з k дірками:

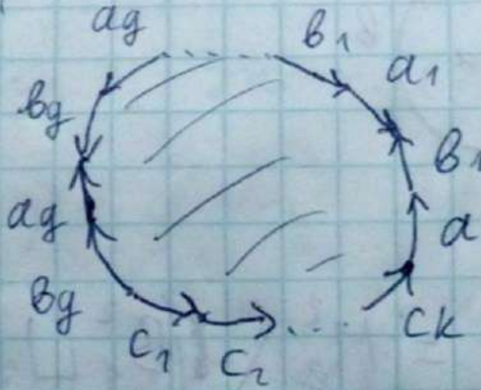


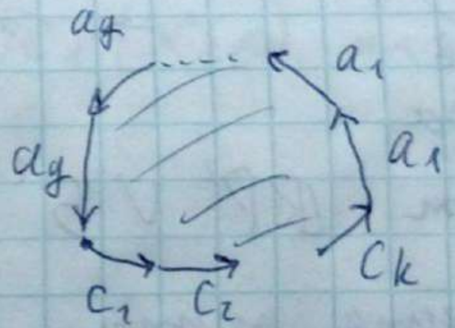
$M^2_{g,k}$

$N^2_{g,k}$

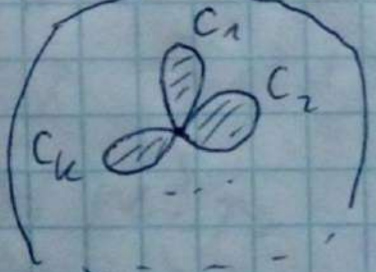
Усі "розгортки"







Усі вершини ототожнюються в одну, а $c_1, \dots, c_k$ переходять у межі дірок:



і попер. задачі

Ан-но до справжніх розгорток за $\underline{\text{Th.}}$ З.-в. К.:

$$\pi_1(M^2_{g,k}) \simeq \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_k \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} c_1 \dots c_k \rangle$$

$$\pi_1(N^2_{g,k}) \simeq \langle a_1, \dots, a_g, c_1, \dots, c_k \mid a_1^2 \dots a_g^2 c_1 \dots c_k \rangle.$$

Помітимо, що $c_k = (a_1 b_1 \dots c_{k-1})^{-1}$ і $(a_1^2 \dots c_{k-1})^{-1}$ відповідно.

Замінюючи його на ці вирази, ми можемо виключити c_k і це співвідношення (це завжди можна зробити зі співвідношенням W_c, де $c \notin W$). Отже, $\forall g, k \in \mathbb{N}$

$\pi_1(M^2_{g,k}) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c_1, \ldots, c_{k-1} \rangle$ – вільні групи з $2g+k-1$ і

$\pi_1(N^2_{g,k}) \cong \langle a_1, \ldots, a_g, c_1, \ldots, c_{k-1} \rangle$

$g+k-1$ твірними відп.

Ми знаємо, що $M^2_{1,1} = T^2 \setminus B^2$ – ручка, що $\sim S^1 \vee S^1$ і що $N^2_{1,1} = \mathbb{R}P^2 \setminus B^2$ гомеоморфно листу Мебіуса ($\sim S^1$). Насправді

$M^2_{g,k} \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{2g+k-1}$ і $N^2_{g,k} \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{g+k-1}$ завжди.

Це вірно й для $M^2_{0,k} = S^2 \setminus (B^2_1 \cup \ldots \cup B^2_k) \sim \underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{k-1}$, як ми знаємо.