807(16) (центр) – ан-но 807(2)

875(2) – ан-но 875(1)

1046(4) (дослідити) - ан-но 1046(8)

818. Записати через $I_1 - I_3$ умову того, що лінія II порядку – коло.

Коло – це дійсний еліпс з рівними осями.

– умова для еліпса – $I_2 > 0$, $I_3 \neq 0$. Канон. рівн.:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \hat{c} = 0$$

де λ_1, λ_2 одного знаку ($\Leftrightarrow I_2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0$).

– дійсний еліпс: λ_1, λ_2 і $\hat{c}$ – різних знаків. Ост. знак λ_1, λ_2 той же, що у $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, а $\hat{c}$ – що у $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \hat{c}$, це $\Leftrightarrow I_1 I_3 < 0$.

– рівні осі: $\lambda_1 = \lambda_2$, тобто корені хар. рівн. $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$ збігаються $\Leftrightarrow$ його дискримінант $I_1^2 - 4I_2 = 0$. Зокрема, $I_2 = \frac{I_1^2}{4}$ означає $I_2 > 0$ (бо $I_1 \neq 0$ за умовою $I_1 I_3 < 0$).

Т.ч., умови $I_1 I_3 < 0$, $I_1^2 - 4I_2 = 0$.

<u>1017(5)</u> Записати через $I_1 - I_4$ умову того, що поверхня II порядку – двопорожнинний гіперболоїд

– поверхня центральна невироджена: $I_3 \neq 0$, $I_4 \neq 0$. Канон. рівн.:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \lambda_3 \hat{z}^2 + \hat{c} = 0,$$

де $\hat{c}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$, – це 2-пор. гіперб. $\Leftrightarrow$ можливо, після перестановки коорд. воно має вигляд $\frac{\hat{\hat{x}}^2}{a^2} + \frac{\hat{\hat{y}}^2}{b^2} - \frac{\hat{\hat{z}}^2}{c^2} + 1 = 0$, тобто з $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ два значення мають той же знак, що $\hat{c}$, а третє – інший.

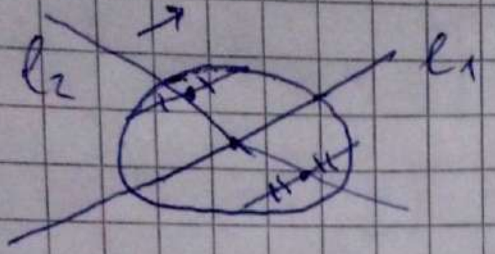
При $\hat{c}>0$: хар. рівн. $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$ має два >0 кореня і один <0, що за правилом Декарта $\Leftrightarrow$ в ряду $1, -I_1, I_2, -I_3$ знак змінюється двічі $\Leftrightarrow$ $I_1>0, I_2>0, I_3<0$ або $I_1>0, I_2\le 0, I_3<0$ або $I_1\le 0, I_2<0, I_3<0$.

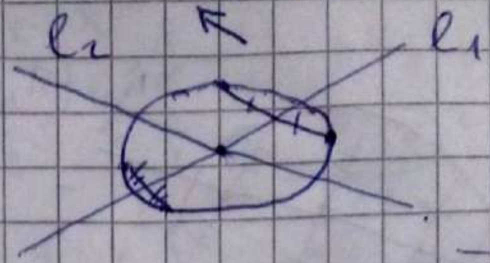
При цьому $I_4 = I_3\hat{c} < 0$.

При $\hat{c}<0$: хар. рівн. має один >0 корінь та два <0. $\Leftrightarrow$ в ряду $1, -I_1, I_2, -I_3$ одна зміна знаку $\Leftrightarrow$ $I_1>0, I_2\le 0, I_3>0$ або $I_1\le 0, I_2<0, I_3>0$ або $I_1\le 0, I_2\ge 0, I_3>0$, і при цьому $I_4 = I_3\hat{c}<0$.

Загалом, звідси випливає $(I_2\le 0 \vee I_1 I_3 \le 0)\wedge$ $\wedge I_4 < 0$, як у відповіді, але обернене не завжди вірно: наприклад, при $I_3=0$ це не гіперболоїд.

876(1) Знайти співвідношення між кутовими коеф. k_1 і k_2 спряжених діаметрів еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.





l_2 спряжений до напр. вектора l_1 $\Leftrightarrow$ l_1 спряжений до напр. вектора l_2

Тому говорять, що l_1 і l_2 спряжені

$l_1: y = k_1 x + b_1$, $l_2: y = k_2 x + b_2$ (тут $b_1 = b_2 = 0$, бо прох. через центр $(0,0)$)

Напр. вектор l_1: $(1, k_1)$. Спряжений:

$$1 \cdot \frac{x}{a^2} + k_1 \cdot \frac{y}{b^2} = 0$$

Тобто це $x = 0$ при $k_1 = 0$ і $y = -\frac{b^2}{a^2 k_1} x$ при $k_1 \neq 0$. Т.ч. $k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1}$:

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$$

Оскільки ця умова симетрична за k_1, k_2, переходячи від l_2 до l_1, отримаємо те ж (у т.ч. випадки "$k_1 = 0$", "$k_2 = \infty$" і "$k_1 = \infty$", "$k_2 = 0$")

Наприклад, у 877: $l_1: 3x + 2y = 0$ (діаметр $\parallel l$), $y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow k_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow$

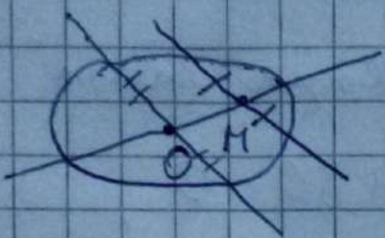
$k_2 = -\frac{b^2}{a^2 k_1} = -\frac{12}{16 \cdot (-\frac{3}{2})} = \frac{1}{2}$, тобто

$l_2: y = \frac{1}{2}x$.

(г) Те ж для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Замінюючи b^2 на $-b^2$ у попер. розв'язку, отримаємо $k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}$.

879. Знайти рівняння хорди еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, що ділиться навпіл точкою $M(2,1)$.



Умова означає, що OM – спряжений діаметр до напрямку хорди (і паралельного їй діаметра), де $O(0,0)$ – центр еліпса.

$\overline{OM}=(2,1) \Rightarrow$ кутовий коеф. $k_1=\frac{1}{2} \Rightarrow$

[876(1)] $\Rightarrow k_2=-\frac{16}{25\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{32}{25}$. Тоді хорда має цей кутовий коеф. і проходить через $M(2,1)$: $y-1=-\frac{32}{25}(x-2)$

$$32x-64+25y-25=0$$

$$32x+25y-89=0.$$

Або без використання 876(1): шукаємо напрямний вектор хорди у вигляді (λ,μ), тоді спряжений діаметр

$$\lambda\cdot\frac{x}{25}+\mu\cdot\frac{y}{16}=0$$

Це OM, тобто $\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{1-0}$, $x-2y=0$.

Порівняємо: $\frac{\lambda}{25\cdot1}=\frac{\mu}{16(-2)} \Rightarrow 32\lambda=-25\mu$, тобто, наприклад, $(\lambda,\mu)=(25,-32)$, тоді рівняння хорди:

$$\frac{x-2}{25} = \frac{y-1}{-32}$$

і так само $32x + 25y - 89 = 0$.

880. Знайти спряжені діаметри лінії

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0,$$

один з яких $\parallel Oy$.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0 \Rightarrow$$ лінія центральна,

тобто усі діаметри проходять через центр. Знайдемо його:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 16 = 0 \\ 2x + 8y - 28 = 0 \end{cases} \cdot(-5) \qquad x + 4y - 14 = 0$$

$$-18y + 54 = 0$$

$y = 3 \Rightarrow x = 14 - 4y = 2$. Центр $(2,3)$.

Діаметр, що $\parallel Oy$ (і прох. через центр): $x = 2$.

Напрямний $(0,1)$. Спряжений до нього:

$$0 \cdot (5x + 2y - 16) + 1 \cdot (2x + 8y - 28) = 0$$

$$x + 4y - 14 = 0.$$

(дійсно містить центр $(2,3)$). Перевіримо себе, знайшовши спряжений до нього: напр. вектор $(-4,1)$.

$$-4(5x + 2y - 16) + 1 \cdot (2x + 8y - 28) = 0$$

$$-18x + 32 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

Центр можна було б і не знаходити!

881. Дані 2 лінії II пор.:

$$3x^2+6xy-y^2-18x-10y=0$$

$$9x^2+6xy+y^2-18x-10y=0$$

Знайти їх загальний діаметр і напрямки хорд кожної з ліній, до яких він спряжений.

I спосіб (алгебраїчний). Нехай діаметр спряжений з (λ_1, μ_1) для першої лінії і з (λ_2, μ_2) – для другої:

$$\lambda_1(3x+3y-9)+\mu_1(3x-y-5)=0$$

$$\lambda_2(9x+3y-9)+\mu_2(3x+y-5)=0$$

$$(3\lambda_1+3\mu_1)x+(3\lambda_1-\mu_1)y-9\lambda_1-5\mu_1=0$$

$$(9\lambda_2+3\mu_2)x+(3\lambda_2+\mu_2)y-9\lambda_2-5\mu_2=0$$

Прямі збігаються:

$$\frac{3\lambda_1+3\mu_1}{9\lambda_2+3\mu_2}=\frac{3\lambda_1-\mu_1}{3\lambda_2+\mu_2}=\frac{-9\lambda_1-5\mu_1}{-9\lambda_2-5\mu_2}$$

$$\frac{\lambda_1+\mu_1}{3\lambda_2+\mu_2}=\frac{3\lambda_1-\mu_1}{3\lambda_2+\mu_2}=\frac{9\lambda_1+5\mu_1}{9\lambda_2+5\mu_2}$$

Перша рівність:

$3\lambda_2+\mu_2\neq 0$, бо інакше друга пряма не визначена, отже

$$\lambda_1+\mu_1 = 3\lambda_1-\mu_1$$

$$2\lambda_1-2\mu_1=0$$

$\lambda_1=\mu_1$. Підставляємо у другу рівність:

$$\frac{2\lambda_1}{3\lambda_2+\mu_2}=\frac{14\lambda_1}{9\lambda_2+5\mu_2}$$

$\lambda_1\neq 0$ (інакше перша пряма не визначена), тому

$$7(3\lambda_2+\mu_2)=9\lambda_2+5\mu_2$$

$$12\lambda_2+2\mu_2=0$$

$\mu_2=-6\lambda_2$. Отже, $(\lambda_1,\mu_1)\sim(1,1)$, $(\lambda_2,\mu_2)\sim(1,-6)$.

Прямі:

$6x+2y-14=0$, $3x+y-7=0$

$-9x-3y+21=0$, $3x+y-7=0$

Дійсно збігаються (вистачило б і (λ_1,μ_1), так ми просто перевірили умову).

<u>II спосіб (геометричний)</u> З'ясуємо, що

це за лінії.

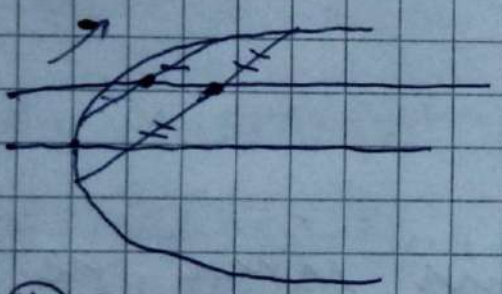
Для першої: $I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -12 < 0$, $I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -9 \\ 3 & -1 & -5 \\ -9 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 3(-25) - 3(-45) - 9(-24) > 0 \Rightarrow$ гіпербола.

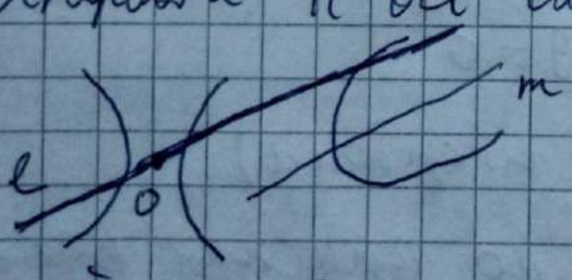
Для другої: $I_2 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $I_3 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -9 \\ 3 & 1 & -5 \\ -9 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 9(-25) - 3(-45) - 9(-6) = -225 + 135 + 54 = -36 \neq 0$

це парабола. Діаметри гіперболи проходять через центр, діаметри параболи — паралельні осі симетрії:



Тобто шукаємо пряму l, що прох. через центр O гіперболи $\parallel$ осі сим. m параболи:



Знайдемо O:

$-\begin{cases} 3x + 3y - 9 = 0 \\ 3x - y - 5 = 0 \end{cases}$ $\quad x + y - 3 = 0$

$4y - 4 = 0$, $y = 1 \Rightarrow x = 3 - y = 2$

$O(2, 1)$.

У параболи вісь симетрії спрямована до напрямку власного вектора, що відповідає ненульовому власному значенню (і ортогональна тому, бо це головний напрямок), а її напрямний вектор - власний, що відповідає вл. значенню $\lambda = 0$, тобто

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0$$

$3\lambda + \mu = 0 \Rightarrow (\lambda, \mu) \sim (1, -3)$. Т.ч. рівн. l:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3}$$

$$-3x + 6 = y - 1$$

$$3x + y - 7 = 0.$$

807(г). Знайдемо осі симетрії лінії, не знаходячи канонічну с.к.

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$$

(знаємо, що їх дві, бо це гіпербола).

Осі симетрії спрямовані до власних векторів, що відп. власним значенням $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ (головних напрямків) та ортогональні до них. Ми знаємо, що тут гол. напрямки $\sim (3, 2)$ і $(-2, 3)$. Тому осі:

$$3(5x+6y-11)+2(6x-6)=0$$

$$5x+6y-11+4x-4=0$$

$$9x+6y-15=0$$

$$3x+2y-5=0$$

Як бачимо, дійсно $\perp (3,2)$; і

$$-2(5x+6y-11)+3(6x-6)=0$$

$$-5x-6y+11+9x-9=0$$

$$4x-6y+2=0$$

$$2x-3y+1=0$$

Дійсно $\perp (-2,3)$. Вони взаємно ортогональні й проходять через знайдений раніше центр $(1,1)$.

858. Знайти рівняння параболи, що дотикається до Ox у $(3,0)$, а до Oy – у $(0,2)$.

Будемо шукати в загальному вигляді:

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Загальне рівняння дотичної у точці (x_0,y_0) лінії:

$$F'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)=0$$

Тобто (після ділення на 2):

$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})(x-x_0)+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})(y-y_0)=0$

У нас: відомо, що $(3,0)\in$ лінії:

$$9a_{11}+6a_{13}+a_{33}=0$$

Дотична у ній:

$$(3a_{11}+a_{13})(x-3)+(3a_{12}+a_{23})y=0.$$

Це Ox, тобто $y=0$. Тому $\overbrace{3a_{11}+a_{13}=0}^{3a_{12}+a_{23}\neq 0 \text{ і}} \Rightarrow$

$a_{13}=-3a_{11}$, підставляємо у попер. рівн.:

$$9a_{11}-18a_{11}+a_{33}=0$$

$a_{33}=9a_{11}$. Ан-но, $(0,2)\in$ лінії:

$$4a_{22}+4a_{23}+a_{33}=0$$

Дотична:

$$(2a_{12}+a_{13})x+(2a_{22}+a_{23})(y-2)=0$$

Це Oy, тобто $x=0$. Тому $\overbrace{2a_{22}+a_{23}=0}^{2a_{12}+a_{13}\neq 0 \text{ і}} \Rightarrow$

$a_{23}=-2a_{22}$. Підставимо у попер.:

$$4a_{22}-8a_{22}+a_{33}=0$$

$a_{33}=4a_{22}$. Отже, $9a_{11}=a_{33}=4a_{22}\Rightarrow$

$a_{22}=\frac{9}{4}a_{11}$.

Це парабола $\Leftrightarrow I_2=0,\ I_3\neq 0$.

$0=I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=\frac{9}{4}a_{11}^2-a_{12}^2.$

Тобто $a_{12}=\pm\frac{3}{2}a_{11}$.

Покладемо $a_{11} = 4$. Тоді $a_{22} = 9$, $a_{33} = 36$, $a_{13} = -12$, $a_{23} = -18$, $a_{12} = \pm 6$. Але є ще умови $3a_{12} + a_{23} \neq 0$, $2a_{12} + a_{13} \neq 0 \Rightarrow a_{12} \neq 6$. Отже, $a_{12} = -6$. Нарешті,

$$0 \neq I_3 = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -12 \\ -6 & 9 & -18 \\ -12 & -18 & 36 \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -6 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -36 \cdot 144$ дійсно виконується. Отже, рівн.:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$$

1046 (б). Знайдемо центр і площини симетрії поверхні II пор., не знаходячи канонічну с.к.

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$$

Ми знаємо, що це еліпсоїд з попарно різними осями, тому він має один центр симетрії (це можна було встановити і знайшовши $I_3 \neq 0$) і 3 площини симетрії.

Для поверхні II порядку $F(x,y,z) =$

$$= a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (**)$$

рівняння центра:

$$\begin{matrix}\frac{1}{2}F'_x = \\ \frac{1}{2}F'_y = \\ \frac{1}{2}F'_z = \end{matrix}\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0 \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34}=0 \end{cases}$$

У нас:

$$3 \cdot \begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ -2x + 6y - 2z - 12 = 0 \\ -2y + 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2 \cdot \\ 7 \cdot \end{matrix} + \begin{cases} 7x - 5z - 12 = 0 \\ -2x + 13z + 15 = 0 \end{cases}$$

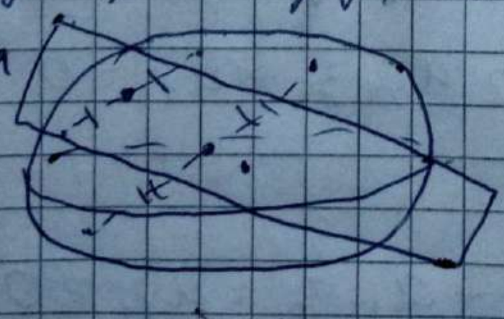
~~звідси~~ $81z + 81 = 0$

$z = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(13z + 15) = 1, \; y = \frac{1}{2}(7x - 3) = 2.$

Отже, центр $O(1, 2, -1)$ — збігається зі знайденим раніше початком канонічної с.к.

Площини симетрії спряжені до головних напрямків, тобто напрямків власних векторів м-ці квадр. частини рівняння, і ортогональні до них.

Діаметральна площина, що спряжена до напрямку вектора (λ, μ, ν) — множина середин усіх хорд, що паралельні вектору (λ, μ, ν)



Містить усі центри симетрії. Рівняння:

$$\lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + \mu(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \nu(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) = 0$$

(або $\lambda F'_x + \mu F'_y + \nu F'_z = 0$).

У нас власні вектори пропорційні $(1,2,2)$, $(2,1,-2)$ і $(-2,2,-1)$, тому площини:

$$1(7x-2y-3)+2(-2x+6y-2z-12)+2(-2y+5z+9)=0$$

$$3x+6y+6z-9=0$$

$$\alpha \quad x+2y+2z-3=0$$

$$2(7x-2y-3)+1(-2x+6y-2z-12)-2(-2y+5z+9)=0$$

$$12x+6y-12z-36=0$$

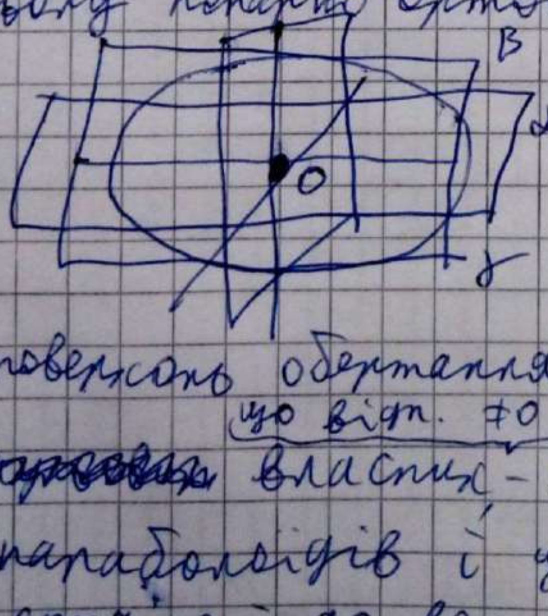
$$\beta \quad 2x+y-2z-6=0$$

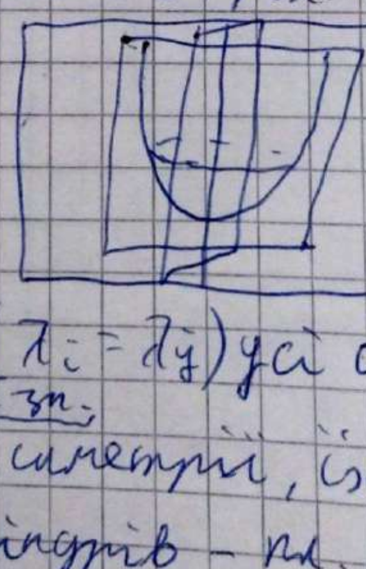
$$-2(7x-2y-3)+2(-2x+6y-2z-12)-1\cdot(-2y+5z+9)=0$$

$$-18x+18y-9z-27=0$$

$$\gamma \quad -2x+2y-z-3=0$$

Дійсно усі $\perp$ відп. головним напрямкам, при цьому попарно ортогональні і прох. через O.





Для поверхонь обертання ($\lambda_i=\lambda_j$) усі спряжені ~~...~~ до власних (що відп. $\neq 0$ вл. зн.) – пл. симетрії, їх ∞.

Для параболоїдів і циліндрів – пл. симетрії лише спряжені до векторів, що відповідають ненульовим власним значенням.