Задача 1. Знайдіть першу фундаментальну форму явно заданої поверхні

$$x^3 = \varphi(x^1; x^2)$$

Розв'язання:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \varphi(u^1; u^2) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2}$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)^2 & \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} & 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$g = \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)^2\right) \cdot (du^1)^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} du^1 du^2 + \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)^2\right) \cdot (du^2)^2$$

Задача 1. Знайдіть першу фундаментальну форму явно заданої поверхні

$$x^3 = \varphi(x^1; x^2)$$

Задача 2. Користуючись Задачею 1, запишіть першу фундаментальну форму гіперболічного параболоїда $x^3 = x^1 x^2$

Розв'язання: $\varphi(u^1; u^2) = u^1 u^2$

$$g = \left(1+(u^2)^2\right)(du^1)^2 + 2u^1u^2\,du^1du^2 + \left(1+(u^1)^2\right)(du^2)^2$$

Задача 3. Знайдіть першу фундаментальну форму гелікоїда: $x^1 = u^1 \cos u^2$, $x^2 = u^1 \sin u^2$, $x^3 = \lambda \cdot u^2$

Перевірте регулярність гелікоїда за допомогою першої фундаментальної форми.

Розв'язання:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \cos u^2 \\ u^1 \sin u^2 \\ \lambda \cdot u^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} \cos u^2 \\ \sin u^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -u^1 \sin u^2 \\ u^1 \cos u^2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \right\rangle = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = \lambda^2 + (u^1)^2$$

$$g = (du^1)^2 + \left(\lambda^2 + (u^1)^2\right)(du^2)^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + (u^1)^2 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Як зміниться перша фундаментальна форма $g=\frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2+\frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$, якщо зробити заміну координат $\begin{cases} u^1=\tilde u^1 \\ u^2=e^{\tilde u^2}\end{cases}$?

Розв'язання: $g=\frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2+\frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$

$$\begin{cases} u^1=\tilde u^1 \\ u^2=e^{\tilde u^2}\end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \tilde g_{11} & \tilde g_{12} \\ \tilde g_{21} & \tilde g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde u^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde u^2}\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\tilde g_{ij}=\sum_{k,l} g_{kl}\frac{\partial u^k}{\partial \tilde u^i}\frac{\partial u^l}{\partial \tilde u^j}} \qquad \tilde g_{ij}=\sum_{k,l=1}^{2} g_{kl}\frac{\partial u^k}{\partial \tilde u^i}\frac{\partial u^l}{\partial \tilde u^j}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde g_{11} & \tilde g_{12} \\ \tilde g_{21} & \tilde g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\tilde u^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{(e^{\tilde u^2})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(e^{\tilde u^2})^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\tilde u^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2\tilde u^2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$g=e^{-2\tilde u^2}(d\tilde u^1)^2+(d\tilde u^2)^2$$

II спосіб: $\begin{cases} u^1=\tilde u^1 \\ u^2=e^{\tilde u^2}\end{cases}$ $\begin{cases} du^1=d\tilde u^1 \\ du^2=e^{\tilde u^2}d\tilde u^2\end{cases}$

$$g=\frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2+\frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2=\frac{1}{e^{2\tilde u^2}}(d\tilde u^1)^2+\frac{1}{e^{2\tilde u^2}}e^{2\tilde u^2}(d\tilde u^2)^2=$$

$$=e^{-2\tilde u^2}(d\tilde u^1)^2+(d\tilde u^2)^2$$

8

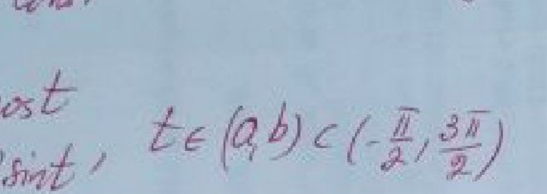
Задача 4. На поверхні з першою фундаментальною формою $g=\frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2+\frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$ знайдіть довжину наступних кривих

$$\gamma_1:\begin{cases}u^1=t\\ u^2=u_0^2=const\end{cases},\quad t\in(a,b) \qquad \gamma_2:\begin{cases}u^1=\overset{const}{\alpha}t\\ u^2=\underset{const}{\beta}t\\ \alpha\beta>0\end{cases},\quad t\in(c,d)\subset\mathbb{R}_+$$

$$\gamma_3:\begin{cases}u^1=R\cos t\\ u^2=R+R\sin t\end{cases},\quad t\in(a,b)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

Розв'язання: $g=\frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2+\frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{(u^2)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{(u^2)^2}\end{pmatrix}$

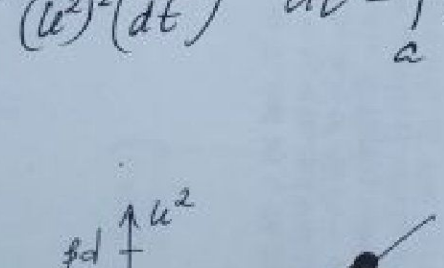
$$\gamma_1:\begin{cases}u^1=t\\ u^2=u_0^2\end{cases}$$



$$l(\gamma_1)=\int_a^b\sqrt{\frac{1}{(u^2)^2}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+\frac{1}{(u^2)^2}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\frac{1}{(u_0^2)^2}\cdot1^2+\frac{1}{(u_0^2)^2}\cdot0^2}\,dt=\int_a^b\frac{dt}{u_0^2}=\frac{b-a}{u_0^2}$$

$$l(\gamma_1)=\frac{1}{u_0^2}\cdot(b-a)$$

$$\gamma_2:\begin{cases}u^1=\alpha t+\alpha_0\\ u^2=\beta t\end{cases}$$



$$l(\gamma_2)=\int_c^d\sqrt{\frac{1}{(u^2)^2}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+\frac{1}{(u^2)^2}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\,dt=\int_c^d\frac{1}{\beta t}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,dt=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+1}\cdot(\ln d-\ln c)$$

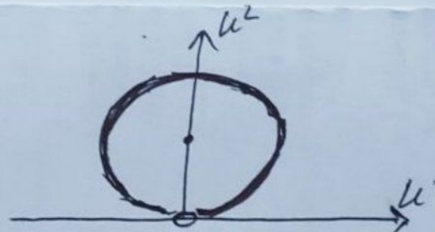
$$l(\gamma_2)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+1}\cdot(\ln d-\ln c)$$

Задача 4. На поверхні з першою фундаментальною формою $g=\frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2+\frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$ знайдіть довжину наступних кривих

$$\gamma_1:\begin{cases}u^1=t\\ u^2=u_0^2=const\end{cases},\quad t\in(a,b)\qquad \gamma_2:\begin{cases}u^1=\overset{\text{альфа}}{\alpha} t\\ u^2=\underset{\text{бета}}{\beta} t\\ \alpha\beta>0\end{cases},\quad t\in(c,d)\subset\mathbb{R}_+$$

$$\gamma_3:\begin{cases}u^1=R\cos t\\ u^2=R+R\sin t\end{cases},\quad t\in(a,b)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\gamma_3:\begin{cases}u^1=R\cos t\\ u^2=R+R\sin t\end{cases},\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$



Хай $t\in(\alpha,\beta)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

$$\ell(\gamma_3^{\alpha\beta})=\int_\alpha^\beta\sqrt{\frac{1}{(u^2)^2}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+\frac{1}{(u^2)^2}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\,dt=\int_\alpha^\beta\frac{1}{R+R\sin t}\cdot\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{1}{1+\sin t}\,dt=\int_\alpha^\beta\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\,dt=\int_\alpha^\beta\frac{dt}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)/2}=\begin{Bmatrix}\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\\ t=\frac{\pi}{2}-2\sigma\end{Bmatrix}=$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}-\alpha/2}^{\frac{\pi}{4}-\beta/2}\frac{d\sigma}{\cos^2\sigma}=-\operatorname{tg}\sigma\Big|_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\lim_{\alpha\to-\pi/2}\ell(\gamma_3^{\alpha\beta})=+\infty,\quad\lim_{\beta\to3\pi/2}\ell(\gamma_3^{\alpha\beta})=+\infty$$

Додаток до задачі 3

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \\ x^3 = \lambda u^2 \end{cases} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} u^1 \cos u^2 \\ u^1 \sin u^2 \\ \lambda u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u^2 & -\sin u^2 & 0 \\ \sin u^2 & \cos u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda u^2 \end{pmatrix}$$

$$g = (du^1)^2 + (\lambda^2 + (u^1)^2)(du^2)^2$$

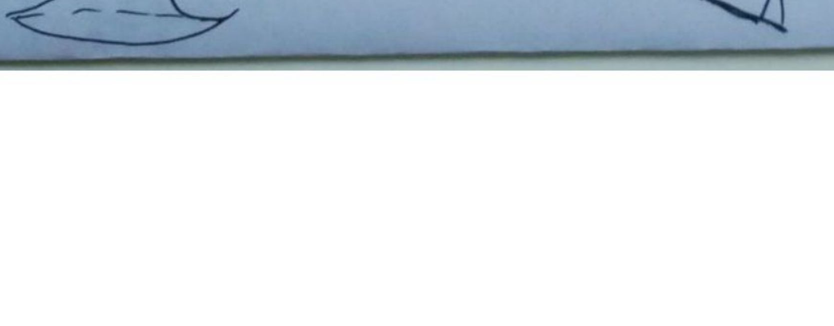
Заміна координат: $u^1 = \lambda \,\mathrm{sh}\, \tilde{u}^1/\lambda$

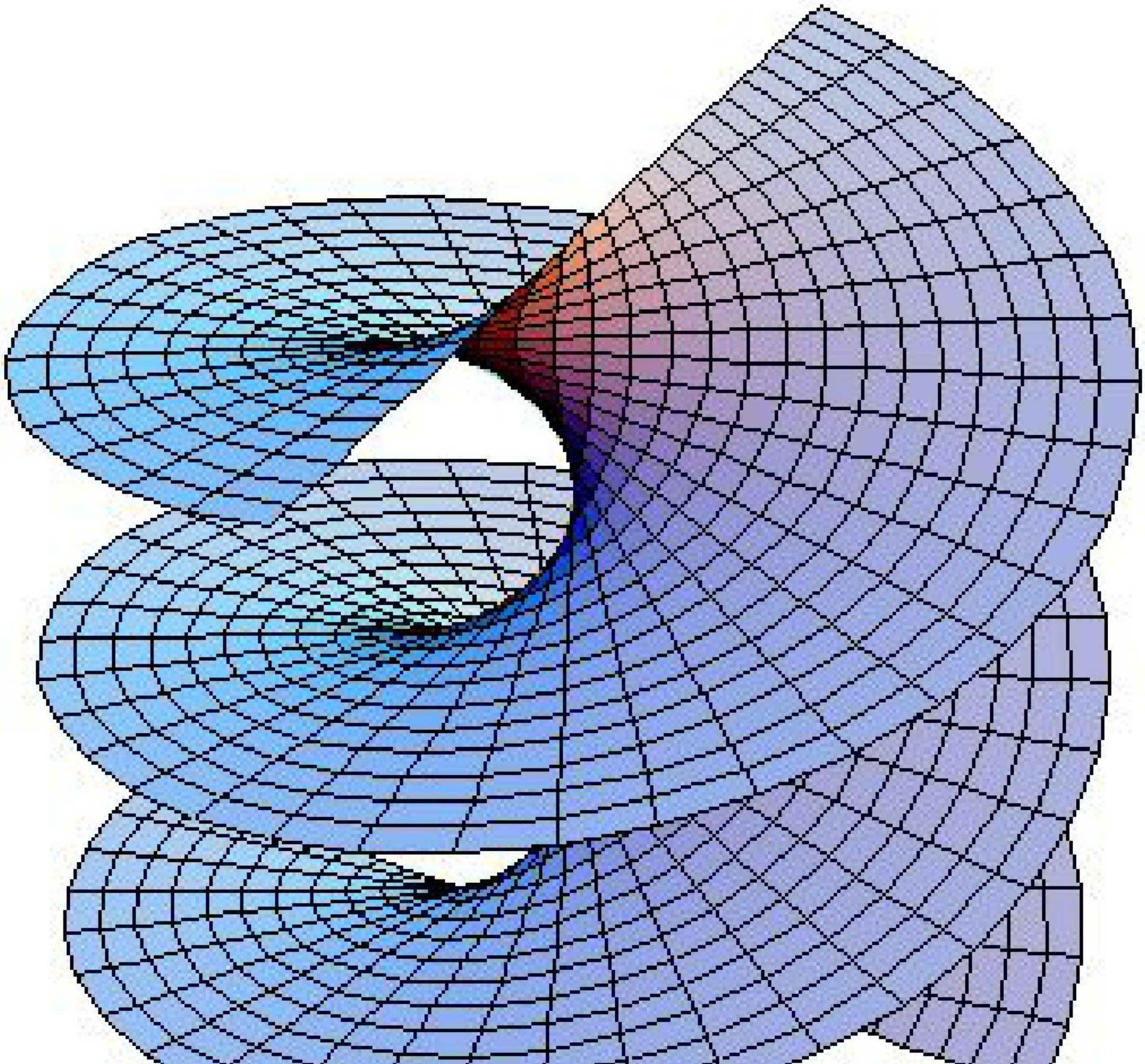
$u^2 = \tilde{u}^2/\lambda$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\frac{\tilde{u}^1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + (u^1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\tilde{u}^1/\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}^2\frac{\tilde{u}^1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}^2\frac{\tilde{u}^1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

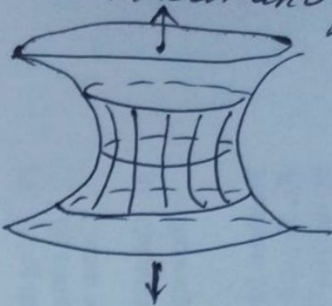
$$g = \mathrm{ch}^2\frac{\tilde{u}^1}{\lambda}\left((d\tilde{u}^1)^2 + (d\tilde{u}^2)^2\right)$$

Якщо $\lambda = 1$, то перша фундаментальна форма гелікоїда співпадає з першою фундаментальною формою катеноїда





Задача N1. Обчислити площу області на катеноїді



$$x^1 = a\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2$$
$$x^2 = a\,\mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 \quad , \quad \begin{array}{c} -A < u^1 < A \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{array}$$
$$x^3 = a u^1$$

Розв'язання

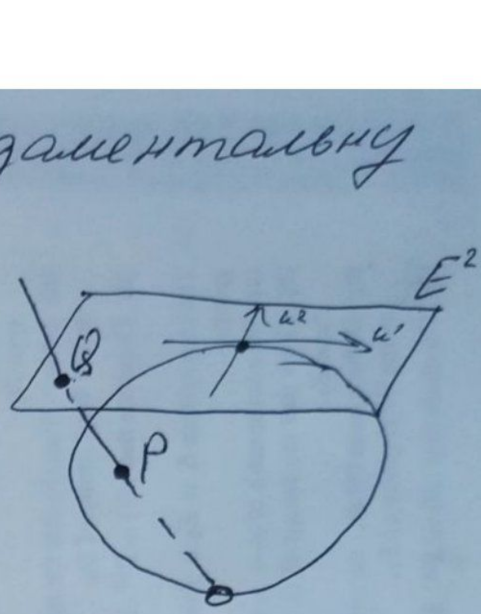
$$\vec{x} = a\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \\ \mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = a\begin{pmatrix} \mathrm{sh}\,u^1 \cos u^2 \\ \mathrm{sh}\,u^1 \sin u^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = a\begin{pmatrix} -\mathrm{ch}\,u^1 \sin u^2 \\ \mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \right\rangle = a^2, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = a^2 \mathrm{ch}^2 u^1$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \mathrm{ch}^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \det g = a^4 \cdot \mathrm{ch}^2 u^1$$

$$Area = \int_0^{2\pi}\int_{-A}^{A} \sqrt{\det g}\, du^1 du^2 = \int_0^{2\pi}\int_{-A}^{A} a^2 \mathrm{ch}\,u^1 du^1 du^2 = a^2 \cdot 2\pi \cdot 2\,\mathrm{sh}A =$$
$$= 4\pi a^2 \cdot \mathrm{sh}A$$

Задача №2. Обчислити першу фундаментальну форму сфери $S^2 \setminus \{\text{південний полюс}\}$



$$\begin{cases} x^1 = R\cdot 4u^1 / (4+(u^1)^2+(u^2)^2) \\ x^2 = R\cdot 4u^2 / (4+(u^1)^2+(u^2)^2) \\ x^3 = R\cdot (4-(u^1)^2-(u^2)^2) / (4+(u^1)^2+(u^2)^2) \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\vec{x} = \frac{R}{4+(u^1)^2+(u^2)^2}\begin{pmatrix} 4u^1 \\ 4u^2 \\ 4-(u^1)^2-(u^2)^2 \end{pmatrix}, \quad \cancel{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = \frac{4R}{(\quad)^2}\begin{vmatrix} 4-(u^1)^2+(u^2)^2 \\ 4+(u^1)^2-(u^2)^2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = \frac{4R}{(4+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}\cdot\begin{pmatrix} 4-(u^1)^2+(u^2)^2 \\ -2u^1u^2 \\ -4u^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = \frac{4R}{(4+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}\cdot\begin{pmatrix} -2u^1u^2 \\ 4+(u^1)^2-(u^2)^2 \\ -4u^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \right\rangle = \frac{16R^2}{(4+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = 0$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{16R^2}{(4+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{16R^2}{(4+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{16R^2}{(4+(u^1)^2+(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}$$

Оскільки перша фундаментальна форма сфери S^2 пропорційна першій фундаментальній формі площини, стереографічна проекція $S^2 \setminus \{\text{півд. полюс}\} \to E^2$ є конформним відображенням.

Задача 5.10. Тепер розглянемо застосування першої форми. Нам відомо, що для даної поверхні вона має вигляд

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\, dv^2,$$

де $a > 0$, тобто

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = u^2 + a^2.$$

Потрібно знайти периметр та внутрішні кути криволінійного трикутника, сторони якого утворені кривими на поверхні $u = \pm\frac{av^2}{2}$ і $v = 1$ (див. рисунок знизу). Цей трикутник має вершини A $(u = 0, v = 0)$, B $\left(u = \frac{a}{2}, v = 1\right)$ і C $\left(u = -\frac{a}{2}, v = 1\right)$. Зауважимо, що нам не потрібно знати, як саме виглядає поверхня: лише її першу форму та вигляд трикутника у локальних координатах.

Нагадаємо деякі загальні формули. Нехай M – регулярна поверхня в $\mathbb{R}^3$, що локально параметризована вектор-функцією $r\colon (u, v) \mapsto r(u, v)$, і перша форма якої у цій параметризації має вигляд

$$g_{11}(u, v)\, du^2 + 2g_{12}(u, v)\, du\, dv + g_{22}(u, v)\, dv^2.$$

Нехай $\gamma\colon [a, b] \to M$ – гладкий або принаймні кусково гладкий шлях у цій поверхні (точніше, в області параметризації r), що у локальних координатах (u, v) задається функціями $(u(t), v(t))$, тобто як крива в $\mathbb{R}^3$ має вигляд $t \mapsto r(u(t), v(t))$. Тоді її дотичний вектор матиме вигляд

$$\gamma' = u'\, r_u + v'\, r_v.$$

Далі у такому випадку ми можемо писати просто $\gamma = (u, v)$ і $\gamma' = (u', v')$. Тоді довжина цього шляху (дуги) дорівнює

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{g_{11}(u(t), v(t))\, u'(t)^2 + 2g_{12}(u(t), v(t))\, u'(t)\, v'(t) + g_{22}(u(t), v(t))\, v'(t)^2}\, dt.$$

У нашому випадку сторона AB трикутника – це крива $u = \frac{av^2}{2}$, де $v \in [0, 1]$, що може бути параметризована як $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, t\right)$, $t \in [0, 1]$. Для неї $\gamma'(t) = (at, 1)$. Отже, ця сторона дорівнює

$$l(AB) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 \cdot (at)^2 + 0 + \left(\left(\frac{at^2}{2}\right)^2 + a^2\right) \cdot 1^2}\, dt = a \int\limits_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{t^4}{4} + 1}\, dt =$$

$$= a \int\limits_0^1 \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\, dt = a \left(\frac{t^3}{6} + t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7a}{6}.$$

Аналогічно, сторона AC – крива $u = -\frac{av^2}{2}$, де $v \in [0, 1]$, тобто $\mu(t) = \left(-\frac{at^2}{2}, t\right)$, $t \in [0, 1]$ і $\mu'(t) = (-at, 1)$. Тому так само

$$l(AC) = \int\limits_0^1 \sqrt{(-at)^2 + \left(\left(-\frac{at^2}{2}\right)^2 + a^2\right)}\, dt = \frac{7a}{6}.$$

Нарешті, сторона трикутника BC – це координатна лінія $v = 1$, $u \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, що параметризується як $\nu(t) = (t, 1)$, $t \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ і для якої $\nu'(t) = (1, 0)$. Тому

$$l(BC) = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1^2 + 0 + 0}\, dt = t\big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = a.$$

Зокрема, периметр трикутника дорівнює $l(AB) + l(AC) + l(BC) = \frac{10a}{3}$.

Нехай тепер γ і μ – криві у поверхні M, що перетинаються у точці $\gamma(t_0) = \mu(s_0) = p \in M$ з локальними координатами (u_0, v_0). Тепер позначимо локальні параметризації цих кривих через $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ і $\mu(t) = (\mu^1(t), \mu^2(t))$ відповідно. Кут між кривими в p – це просто кут між ними в $\mathbb{R}^3$, тобто кут між їхніми дотичними векторами в p. Його косинус дорівнює

$$\frac{\langle \gamma'(t_0), \mu'(s_0)\rangle}{|\gamma'(t_0)|\,|\mu'(s_0)|} = \frac{\sum\limits_{i,\,j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\,(\gamma^i)'(t_0)\,(\mu^j)'(s_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,\,j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\,(\gamma^i)'(t_0)\,(\gamma^j)'(t_0)}\sqrt{\sum\limits_{i,\,j=1}^{2} g_{ij}(u_0, v_0)\,(\mu^i)'(s_0)\,(\mu^j)'(s_0)}}.$$

В нашій задачі нам потрібно ще слідкувати за тим, щоб кути були внутрішніми, відповідним чином обираючи параметризації. Так, у точці A для обраних раніше параметризацій сторін $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, t\right)$ і $\mu(s) = \left(-\frac{as^2}{2}, s\right)$ маємо $\gamma(0) = \mu(0) = (0, 0) = A$, і дотичні вектори $\gamma'(0) = (0, 1)$, $\mu'(0) = (0, 1)$ збігаються, отже $\angle A = 0$.

У B, щоб отримати внутрішній кут, оберемо параметризації, для яких дотичні вектори напрямлені вліво на площині (u, v) (див. малюнок): $\gamma(t) = \left(\frac{at^2}{2}, -t\right)$ і $\nu(s) = (-s, 1)$, отже $\gamma'(t) = (at, -1)$ і $\nu'(s) = (-1, 0)$. Дійсно, для них точка перетину $\gamma(-1) = \nu\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 1\right) = B$, і $\gamma'(-1) = (-a, -1)$, $\nu'\left(-\frac{a}{2}\right) = (-1, 0)$ мають від'ємні перші координати. Таким чином,

$$\left\langle \gamma'(-1), \nu'\left(-\frac{a}{2}\right)\right\rangle = g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,(-a)\cdot(-1) + g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,((-a)\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)) + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,(-1)\cdot 0 =$$

$$= 1\cdot a + 0 + 0 = a,$$

$$|\gamma'(-1)| = \sqrt{g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,(-a)^2 + 2g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,(-a)\cdot(-1) + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,(-1)^2} =$$

$$= \sqrt{1\cdot a^2 + 0 + \left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)\cdot 1} = \frac{3a}{2},$$

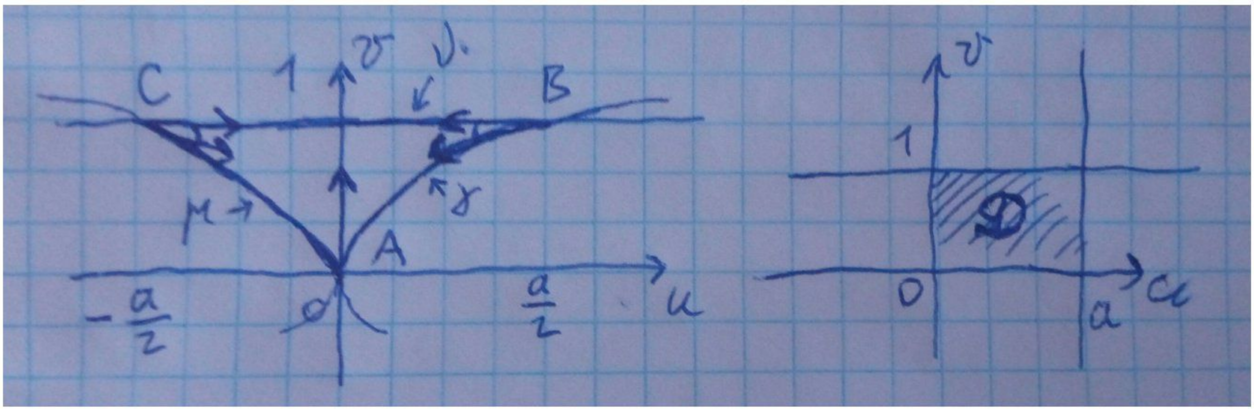
$$\left|\nu'\left(-\frac{a}{2}\right)\right| = \sqrt{g_{11}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,(-1)^2 + 2g_{12}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,(-1)\cdot 0 + g_{22}\left(\frac{a}{2}, 1\right)\,0^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1,$$

отже

$$\cos\angle B = \frac{a}{\frac{3a}{2}\cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Аналогічним чином у C оберемо параметризації, дотичні вектори яких "дивляться" вправо: $\mu(t) = \left(-\frac{at^2}{2}, -t\right)$ і $\nu(s) = (s, 1)$, для яких $\mu'(t) = (-at, -1)$ і $\nu'(s) = (1, 0)$. Тоді точка перетину $\mu(-1) = \nu\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}, 1\right) = C$, у ній перші координати дотичних векторів $\mu'(-1) = (a, -1)$ і $\nu'\left(-\frac{a}{2}\right) = (1, 0)$ додатні. Аналогічно першому куту обчислюємо:

$$\cos\angle C = \frac{1 \cdot a + 0 + 0}{\sqrt{1 \cdot a^2 + 0 + \left(\frac{a^2}{4} + a^2\right) \cdot 1}\sqrt{1 + 0 + 0}} = \frac{2}{3}.$$



Задача 5.12. Знайдемо на гелікоїді з задачі 5.2 площу області D, що у координатах (u, v) обмежена лініями $u = 0$, $u = a$, $v = 0$ і $v = 1$ (див. ілюстрацію зверху).

У загальному випадку площа області D, що міститься в області параметризації r регулярної поверхні M з першою формою

$$g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2,$$

знаходиться за формулою

$$S(D) = \int\limits_D \sqrt{\det G}\,du\,dv = \int\limits_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv,$$

де

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

позначає матрицю першої форми. Це те, що в аналізі зветься поверхневим інтегралом першого роду (від постійної функції 1). Строго кажучи, інтегрування тут іде не по D, а по її прообразу $r^{-1}(D)$ у площині (u, v), але ми трохи спрощуємо позначення. Зауважимо також, що $\sqrt{\det G} = |[r_u, r_v]|$ (доведіть це самостійно).

Ми вже знаємо, що перша форма гелікоїда має вигляд

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2$$

(до речі, це форма з попередньої задачі). Тому

$$S(D) = \int\limits_D \sqrt{1 \cdot (u^2 + a^2) - 0^2}\, du\, dv = \int\limits_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\, du \int\limits_0^1 dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)\right)\Big|_0^a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a^2 + a^2 \ln\left(a\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) - a^2 \ln a\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$