gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 14. Перша фундаментальна форма: довжина кривих, кут між кривими, площа областей на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in D.$$

Перша фундаментальна форма поверхні F – це білінійна диференціальна форма

$$g = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2,$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулою

$$g_{ij} = < \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} > \qquad , \qquad 1 \le i, j \le 2,$$

Інтерпретація: $g = < d\vec{f}, d\vec{f} >$

Властивості: симетрична, додатно визначена

Перша фундаментальна форма визначає в кожні точці P поверхні F скалярний добуток векторів в дотичній площині $T_P F$:

для векторів

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

скалярний добуток дорівнює

$$< X, Y > \; = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(P) \cdot X^i \cdot Y^j$$

тобто,

$$< X, Y > \; = \left(X^1 X^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

14.1. Довжина кривих на поверхні

За допомогою першої фундаментальної форми поверхні F обчислюється довжина кривих, що розташовані на поверхні F і задані параметрично у внутрішніх координатах на поверхні:

для кривої γ на поверхні F, заданої у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad a<t<b,$$

довжина обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\; dt$$

тобто,

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1 d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2}\;,$$

де $g_{ij}=g_{ij}(\xi^1(t), \xi^2(t))$.

Приклад 1. Для кривої

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}$$

на площині F, параметризованій декартовими координатами (u^1, u^2), довжина обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

Приклад 2. Для кривої

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}$$

на сфері F радіуса R, параметризованій «географічними» координатами (u^1, u^2), довжина обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + \cos^2 \xi^1 \cdot \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt$$

Для натурального параметра s на кривій γ маємо формулу

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{g_{11}\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2}\, dt\ ,$$

звідки знаходимо

$$ds^2 = g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1 d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2$$

Зауваження.

1. Інколи першу фундаментальну форму g позначають ds^2 і називають метричною формою поверхні F.

2. В деяких підручниках використовують позначення (u,v) для локальних координат на поверхні і

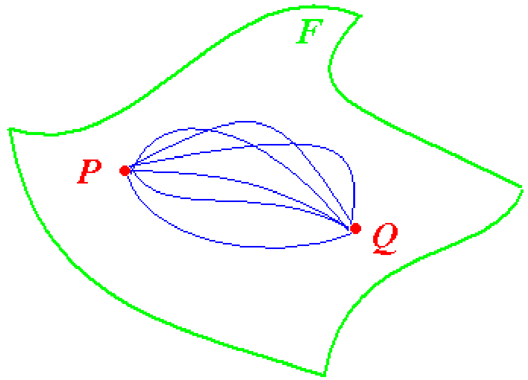
$$g = E\,(du)^2 + 2F\,du\,dv + G\,(dv)^2$$

для першої фундаментальної форми поверхні.

14.2. Регулярні поверхні як метричні простори

Визначення. *Відстанню* (*внутрішньою відстанню*) між точками P і Q на поверхні F називається

$$d(P,Q) = \inf L(\gamma)\ ,$$



де інфімум береться по множині усіх кусково-регулярних кривих γ, що розташовані на поверхні F і поєднують точки P і Q.

Твердження. *Внутрішня відстань* d, *як функція* $F \times F \to \mathbb{R}$, *має наступні властивості*:

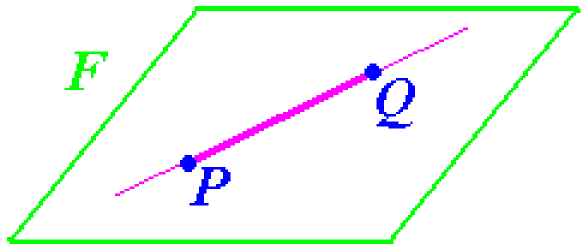
1) $d(P,Q) \geq 0 \ \ \forall P,Q \in F$, при цьому $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P=Q$

2) $d(P,Q) = d(Q, P) \ \ \forall P,Q \in F$

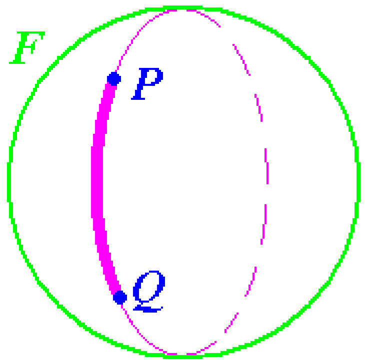
3) $d(P,M) + d(M, Q) \geq d(P, Q) \ \forall P,Q,M \in F$

Отже, кожна регулярна поверхня F з внутрішньою відстанню d представляє собою приклад метричного простору.

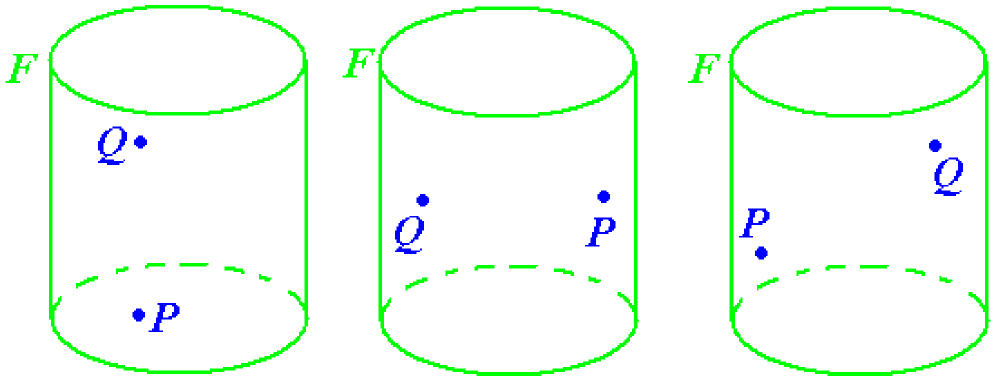
Приклад 1. F – площина. Відстань $d(P,Q)$ між точками P і Q на площині F дорівнює довжині відрізка PQ прямої, що проходить через точки P і Q на площині F.



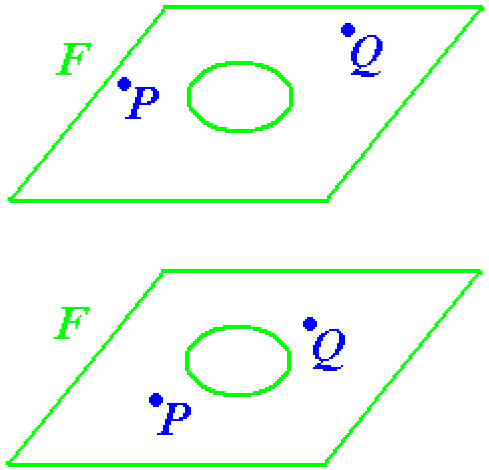
Приклад 2. F – сфера. Відстань $d(P,Q)$ між точками P і Q на сфері F дорівнює довжині меншої дуги PQ великого кола, що проходить через точки P і Q на сфері F.



Задача-приклад 3. F – циліндр. Чому дорівнює відстань $d(P,Q)$ між точками P і Q на циліндрі F ? Довжина якої кривої, що проходить через точки P і Q на циліндрі F, дорівнює відстані $d(P,Q)$?



Задача-приклад 4. F – площина, з якої видалили деякий замкнутий диск (диск разом з граничним колом). Чому дорівнює відстань $d(P,Q)$ між точками P і Q на поверхні F ? Довжина якої кривої, що проходить через точки P і Q на поврехні F, дорівнює відстані $d(P,Q)$? Чи існує така *найкоротша* крива?



14.3. Кут між кривими на поверхні

За допомогою першої фундаментальної форми поверхні F обчислюється кут між кривих, що розташовані на поверхні F і задані параметрично у внутрішніх координатах на поверхні.

Нагадування: кут між кривими, що перетинаються в деякій точці P, дорівнює куту між векторами швидкості (дотичними векторами) кривих в точці перетину P.

Нехай на поверхні F задано пару кривих

$$\gamma_1: \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad \gamma_2: \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases},$$

які перетинаються в точці $P(u_0^1, u_0^2)$, тобто, маємо

$$\begin{cases} u_0^1 = \xi^1(t_0) = \eta^1(\sigma_0) \\ u_0^2 = \xi^2(t_0) = \eta^2(\sigma_0) \end{cases}$$

(Підкреслимо, що точка P має координати (u_0^1, u_0^2) на поверхні F, координату t_0 на кривій γ і координату σ_0 на кривій Γ)

Вектори швидкості кривих: $\gamma_1'(t_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{d\xi^1}{dt} \\ \dfrac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0}$, $\gamma_2'(\sigma_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{d\eta^1}{d\sigma} \\ \dfrac{d\eta^2}{d\sigma} \end{pmatrix}_{\sigma_0}$

Скалярні добутки:

$$< \gamma_1'(t_0), \gamma_2'(\sigma_0) > \; = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)$$

$$< \gamma_1'(t_0), \gamma_1'(t_0) > \; = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)$$

$$< \gamma_2'(\sigma_0), \gamma_2'(\sigma_0) > \; = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)$$

Кут між кривими:

$$\cos\varphi = \frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Приклад 1. Розглянемо на поверхні F координатні лінії

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = u_0^2 \end{cases}, \qquad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = u_0^1 \\ u^2 = \sigma \end{cases},$$

які перетинаються в точці $P(u_0^1, u_0^2)$. Кут між ними визначається формулою

$$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0) \cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0) \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}} =$$

$$= \frac{g_{12}(u_0^1, u_0^2)}{\sqrt{g_{11}(u_0^1, u_0^2)} \cdot \sqrt{g_{22}(u_0^1, u_0^2)}}$$

Як наслідок, координатні лінії на поверхні F перетинаються в точці $P(u_0^1, u_0^2)$ ортогонально тоді, і тільки тоді, коли $g_{12}(u_0^1, u_0^2) = 0$

Визначення. Локальні координати (u^1, u^2) на поверхні F називаються *ортогональними*, якщо всюди на поверхні F координатні лінії перетинаються ортогонально, тобто, $g_{12}(u^1, u^2) \equiv 0$.

Приклад 2. Розглянемо сферу F радіуса R, параметризовану «географічними координатами» так, що перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2$$

Розглянемо сімейство меридіанів

$$\gamma_\alpha : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \alpha \end{cases}$$

Знайдемо криву

$$\Gamma : \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases},$$

що перетинає меридіани під сталим кутом ω. Маємо умову:

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \cdot \frac{d\xi^i}{dt} \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \cdot \frac{d\xi^i}{dt} \cdot \frac{d\xi^j}{dt}} \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma} \cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}}} \equiv \cos\omega$$

Підставимо коефіцієнти першої фундаментальної форми

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u^1 \end{pmatrix}$$

і координатні функції меридіанів $\xi^1=t$, $\xi^2=const$. Отримуємо:

$$\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}\cdot\frac{d\xi^i}{dt}\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}\cdot\frac{d\xi^i}{dt}\cdot\frac{d\xi^j}{dt}}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}\cdot\frac{d\eta^i}{d\sigma}\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}}} \equiv \cos\omega$$

$$\frac{\frac{d\eta^1}{d\sigma}}{\sqrt{(\frac{d\eta^1}{d\sigma})^2+\cos^2\eta^1\cdot(\frac{d\eta^2}{d\sigma})^2}} \equiv \cos\omega$$

$$\sin\omega\cdot\frac{d\eta^1}{d\sigma} = \pm\cos\omega\cdot\cos\eta^1\cdot\frac{d\eta^2}{d\sigma}$$

$$\sin\omega \cdot \frac{1}{\cos\eta^1} \cdot d\eta^1 = \pm\cos\omega \cdot d\eta^2$$

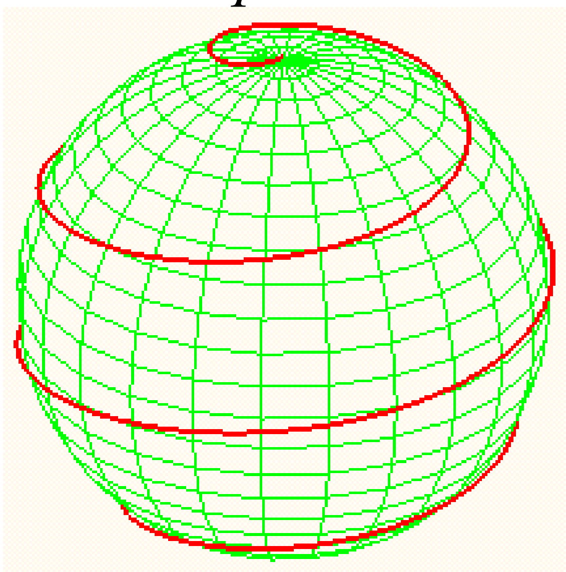
$$\sin\omega \ \mathrm{arcsinh}(\tan\eta^1) = \pm\cos\omega \ \ \eta^2 + C$$

Якщо $\omega = \pi/2$, то розв'язок $\eta^1 = const$, а відповідна крива Γ – це паралель.

Якщо $\omega \neq \pi/2$, то розв'язок $\eta^2 = \pm\tan\omega \cdot \frac{1+\sin\eta^1}{\cos\eta^1} + C$, тобто

$$\begin{cases} u^1 = \sigma \\ u^2 = \pm\tan\omega \cdot \frac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma} + C \end{cases}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}$$

а відповідна крива Γ називається *локсодромою*.



14.4. Площа області на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \ \ (u^1, u^2) \in \Omega.$$

Перша фундаментальна форма поверхні F:

$$g = g_{11}du^1du^1 + g_{12}du^1du^2 + g_{21}du^2du^1 + g_{22}du^2du^2.$$

Нагадування:

$$\det\ g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 =$$

$$= \left\langle \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle^2 = \left| \left[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} \right] \right|^2$$

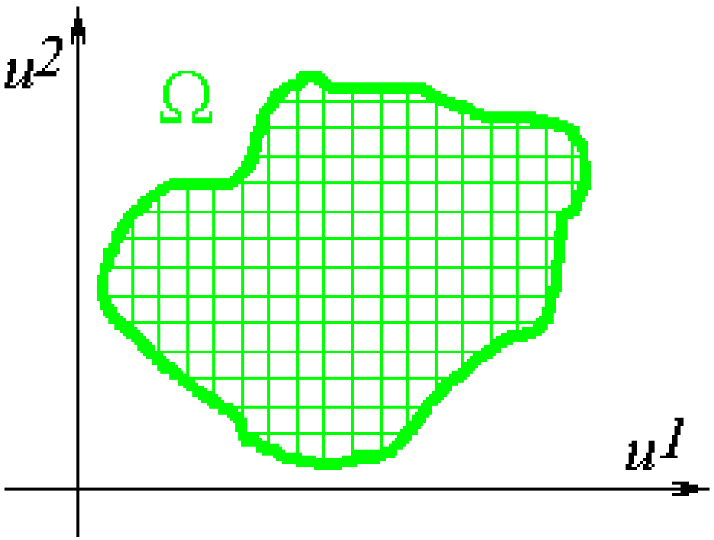
Отже, маємо:

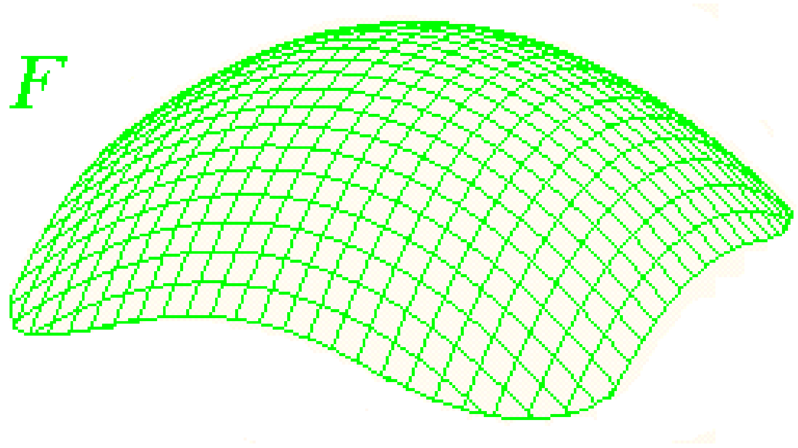
$$\sqrt{\det g} = \left| \left[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} \right] \right|$$

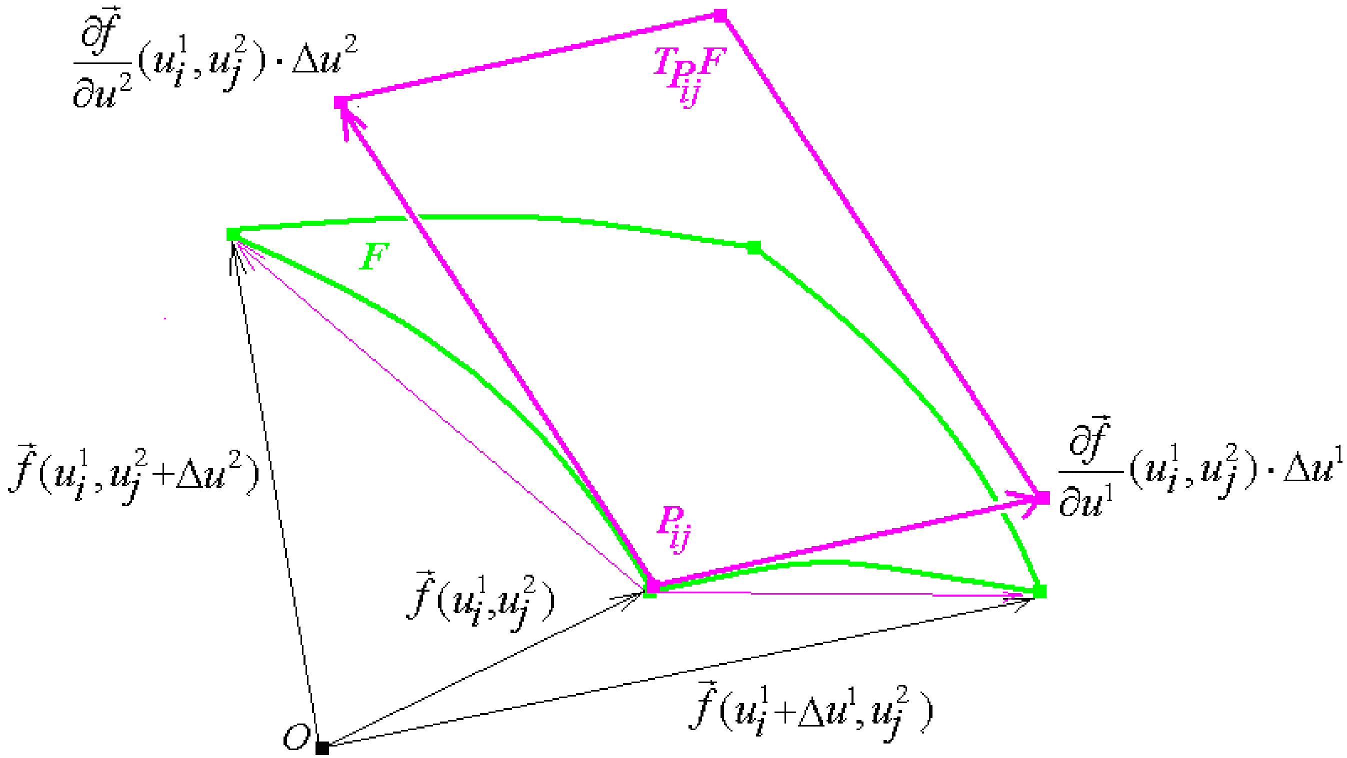
Розіб’ємо область Ω на координатні чотирикутники

$$\Omega_{ij} = \{(u^1, u^2) \mid u_i^1 < u^1 < u_i^1 + \Delta u^1,\ u_j^2 < u^2 < u_j^2 + \Delta u^2\ \}$$

Розглянемо відповідне розбиття поверхні F на криволінійні координатні чотирикутники F_{ij}.







Кожний криволінійний чотирикутник F_{ij} на поверхні F апроксимується чотирикутником T_{ij} в дотичній площині $T_{P_{ij}}F$, натягнутим на вектори

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_i^1,u_j^2)\cdot\Delta u^1 \quad , \quad \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_i^1,u_j^2)\cdot\Delta u^2.$$

Площа цього чотирикутника в дотичній площині T_PF дорівнює

$$\left|\left[\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1,u_0^2)\cdot\Delta u^1,\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1,u_0^2)\cdot\Delta u^2\right]\right| = \sqrt{\det g}\cdot\Delta u^1\cdot\Delta u^2$$

Розглядаються суми

$$\sum_{ij} Area(T_{ij}) = \sum_{ij} \sqrt{\det g}\, \Delta u^1 \Delta u^2$$

Подрібнюючи координатну сітку на поверхні F (координатну сітку в області Ω), при $\Delta u^1 \to 0$, $\Delta u^2 \to 0$ отримуємо *площу* поверхні F:

$$Area(F) = \int_{\Omega} \sqrt{\det g}\; du^1\, du^2$$

Зауваження 1. Площа не залежить від вибору локальних координат на регулярній поверхні – якщо зробити регулярну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

то з тензорного закону

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

випливає, що

$$\sqrt{\det \tilde{g}}\, d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \sqrt{\det g}\, \det\left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}\right) d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \sqrt{\det g}\, du^1 du^2$$

Зауваження 2. Площа не залежить від розташування поверхні в просторі.

Термінологія. Величина

$$dA = \sqrt{\det g}\, du^1 du^2$$

називається *елементом площі* поверхні F.

Приклад. Розглянемо сферу *F* радіуса *R*, задану параметрично в «географічних» координатах:

$$\begin{cases} x^1 = R\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = R\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = R\sin u^1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\dfrac{\pi}{2} < u^1 < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Перша фундаментальна форма має вигляд

$$g = R^2\,(du^1)^2 + R^2\cos^2 u^1\,(du^2)^2$$

Маємо

$$\det g = \begin{vmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u^1 \end{vmatrix} = R^4\cos^2 u^1$$

Обчислимо площу сфери:

$$Area(F) = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos u^1 du^1 du^2 = 2\pi R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u^1 du^1 = 4\pi R^2$$

13.5. Перша фундаментальна форма і відображення поверхонь

Розглянемо неперервне відображення загальних поверхонь F і M:

$$\Psi : F \to M$$

Визначення. Відображення Ψ називається *ізометричним*, якщо воно зберігає довжину кривих, тобто, для будь-якої кривої γ на поверхні F відповідна крива $\Gamma = \Psi \circ \gamma$ на поверхні M має ту ж саму довжину:

$$l(\gamma) = l(\Gamma)$$

Визначення. Відображення Ψ називається *конформним*, якщо воно зберігає кут між кривими, тобто, для будь-якої пари кривих γ_1 і γ_2, що перетинаються, на поверхні F відповідні криві $\Gamma_1 = \Psi \circ \gamma_1$ і $\Gamma_2 = \Psi \circ \gamma_2$ на поверхні M перетинаються під тим самим кутом:

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \angle(\Gamma_1, \Gamma_2)$$

Визначення. Відображення Ψ називається *еквіареальним*, якщо воно зберігає площу областей, тобто, для будь-якої області U на поверхні F відповідна область $V = \Psi(U)$ на поверхні M має ту ж саму площу:

$$Area\,(U) = Area\,(V)$$

Нехай поверхні F і M є регулярними і відображення

$$\Psi: F \to M$$

є регулярним і взаємно однозначним.

Твердження. *Відображення Ψ є ізометричним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках співпадають.*

Твердження. *Відображення Ψ є конформним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках пропорційні.*

Твердження. *Відображення Ψ є еквіареальним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках мають однакові визначники матриць коефіцієнтів.*

Аналітична інтерпретація

В локальних координатах (u^1, u^2) на поверхні F і локальних координати (v^1, v^2) на поверхні M відображення Ψ задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Регулярність відображення Ψ означає, що вказані функції є неперервно диференційовними і задовольняють

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} \end{vmatrix} \neq 0 \cdot$$

Зробимо на поверхні M регулярну заміну локальних координат

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

так, що в нових координатах відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами (u^1, u^2) на поверхнях F і M.

Перша фундаментальна форма поверхні F має вигляд

$$g = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2 \ .$$

Перша фундаментальна форма поверхні M має вигляд

$$G = G_{11}(dv^1)^2 + 2G_{12}dv^1dv^2 + G_{22}(dv^2)^2 \ ,$$

а після заміни координат

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

вона прийме вигляд

$$G = \widetilde{G}_{11}(du^1)^2 + 2\widetilde{G}_{12}du^1du^2 + \widetilde{G}_{22}(du^2)^2,$$

де

$$\widetilde{G}_{ij} = \sum_{k,m=1}^{2} G_{km} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial v^m}{\partial u^j}$$

Те, що при відображенні Ψ: $F \to M$ перші фундаментальні форми поверхонь співпадають, означає, що

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{11} & \widetilde{G}_{12} \\ \widetilde{G}_{21} & \widetilde{G}_{22} \end{pmatrix}.$$

Те, що при відображенні Ψ: $F \to M$ перші фундаментальні форми поверхонь пропорційні, означає, що

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{G}_{11} & \widetilde{G}_{12} \\ \widetilde{G}_{21} & \widetilde{G}_{22} \end{pmatrix}.$$

Те, що при відображенні Ψ: $F \to M$ перші фундаментальні форми поверхонь мають однакові визначники, означає, що

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{G}_{11} & \widetilde{G}_{12} \\ \widetilde{G}_{21} & \widetilde{G}_{22} \end{vmatrix}.$$

Твердження. *Відображення Ψ є ізометричним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках співпадають.*

Ідея доведення.

$\Leftarrow$) Припустимо, що перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках співпадають. Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M , вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і крива γ на поверхні F і відповідна крива Γ на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad a<t<b.$$

Оскільки

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\, dt$$

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\widetilde{G}_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2\widetilde{G}_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + \widetilde{G}_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\, dt$$

а перші фундаментальні форми співпадають,

$$\widetilde{G}_{11} = g_{11}, \widetilde{G}_{12} = g_{12}, \widetilde{G}_{22} = g_{22},$$

то $l(\gamma) = l(\Gamma)$.

$\Rightarrow$) Припустимо, що довжина відповідних (за відображенням Ψ) кривих на поверхнях F і M співпадає. Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M , вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і крива γ на поверхні F і відповідна крива Γ на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad a<t<b.$$

Оскільки

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\, dt$$

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\widetilde{G}_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2\widetilde{G}_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + \widetilde{G}_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\, dt$$

і $l(\gamma) = l(\Gamma)$ за умовою, то

$$\int_a^b \sqrt{g_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + g_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\widetilde{G}_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2\widetilde{G}_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + \widetilde{G}_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2}\, dt$$

Зважаючи на те, що границі інтегрування не є фіксованими, отримуємо

$$g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1 d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2 = \widetilde{G}_{11}(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2\widetilde{G}_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + \widetilde{G}_{22}(\frac{d\xi^2}{dt})^2,$$

тобто

$$(\widetilde{G}_{11} - g_{11})(\frac{d\xi^1}{dt})^2 + 2(\widetilde{G}_{12} - g_{12})\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\xi^2}{dt} + (\widetilde{G}_{22} - g_{22})(\frac{d\xi^2}{dt})^2 = 0$$

Оскільки крива γ на поверхні F , задана функціями

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases},$$

є довільною, з останньої рівності випливає

$$\widetilde{G}_{11} - g_{11} = 0, \ \ \widetilde{G}_{12} - g_{12} = 0, \quad \widetilde{G}_{22} - g_{22} = 0$$

Це і означає, що перші фундаментальні форми поверхонь поверхонь F і M у відповідних (за відображенням Ψ) точках співпадають.

Твердження. *Відображення Ψ є конформним тоді, і тільки тоді, коли перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках пропорційні.*

Ідея доведення.

$\Leftarrow$) Припустимо, що перші фундаментальні форми поверхонь F і M у відповідних точках пропорційні. Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M, вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і криві γ_1, γ_2 на поверхні F і відповідні криві Γ_1, Γ_2 на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\gamma_1,\ \Gamma_1: \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad \gamma_2,\ \Gamma_2: \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases}$$

Кут між кривими γ_1, γ_2:

$$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2)\cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2)\cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1, u_0^2)\cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0)\cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Кут між кривими Γ_1, Γ_2:

$$\cos\hat{\varphi} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \widetilde{G}_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \widetilde{G}_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot \frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot \frac{d\xi^j}{dt}(t_0)}\cdot \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \widetilde{G}_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot \frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0)\cdot \frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

За умовою, перші фундаментальні форми поверхонь F і M пропорційні

$$\widetilde{G}_{11} = \Lambda\cdot g_{11},\ \widetilde{G}_{12} = \Lambda\cdot g_{12},\ \widetilde{G}_{22} = \Lambda\cdot g_{22},$$

Отримуємо:

$$\cos\hat{\varphi} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \Lambda(u_0^1,u_0^2) g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \Lambda(u_0^1,u_0^2) g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\frac{d\xi^j}{dt}(t_0)}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \Lambda(u_0^1,u_0^2) g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0)\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\frac{d\xi^j}{dt}(t_0)}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0)\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Таким чином,

$$\cos\hat{\varphi} = \cos\varphi,$$

тобто кут між кривими γ_1, γ_2 на поверхні F і кут між відповідними кривими Γ_1, Γ_2 на поверхні M співпадають.

$\Rightarrow$) Припустимо, що кут між довільними кривими γ_1, γ_2 на поверхні F і кут муж відповідними кривими Γ_1, Γ_2 на поверхні M співпадають.

Розглянемо локальні координати на поверхнях F і M , вибрані таким чином, що відображення Ψ ставить у відповідність точки з однаковими координатами. В таких координатах і криві γ_1, γ_2 на поверхні F і відповідні криві Γ_1, Γ_2 на поверхні M задаються однаковими функціями

$$\gamma_1, \Gamma_1: \begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \qquad \gamma_2, \Gamma_2: \begin{cases} u^1 = \eta^1(\sigma) \\ u^2 = \eta^2(\sigma) \end{cases}$$

Кут між кривими γ_1, γ_2:

$$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot\frac{d\xi^j}{dt}(t_0)}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0)\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Кут між кривими $\varGamma_1, \varGamma_2$:

$$\cos\hat{\varphi} = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \widetilde{G}_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \widetilde{G}_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\xi^i}{dt}(t_0)\cdot\frac{d\xi^j}{dt}(t_0)}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2} \widetilde{G}_{ij}(u_0^1,u_0^2)\cdot\frac{d\eta^i}{d\sigma}(\sigma_0)\cdot\frac{d\eta^j}{d\sigma}(\sigma_0)}}$$

Припустимо, що криві γ_1, γ_2 є взаємно ортогональними:

$$g_{11}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma}+g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma}+g_{21}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma}+g_{22}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma}=0.$$

Тоді відповідні криві $\varGamma_1, \varGamma_2$ теж є взаємно ортогональними:

$$\widetilde{G}_{11}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma}+\widetilde{G}_{12}\frac{d\xi^1}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma}+\widetilde{G}_{21}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^1}{d\sigma}+\widetilde{G}_{22}\frac{d\xi^2}{dt}\frac{d\eta^2}{d\sigma}=0$$

Запишемо ці співвідношення у вигляді

$$\begin{pmatrix} g_{11}\frac{d\xi^1}{dt}+g_{21}\frac{d\xi^2}{dt} & g_{12}\frac{d\xi^1}{dt}+g_{22}\frac{d\xi^2}{dt} \\ \widetilde{G}_{11}\frac{d\xi^1}{dt}+\widetilde{G}_{21}\frac{d\xi^2}{dt} & \widetilde{G}_{12}\frac{d\xi^1}{dt}+\widetilde{G}_{22}\frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{d\eta^1}{d\sigma} \\ \frac{d\eta^2}{d\sigma} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Звідси отримаємо

$$\frac{g_{11}\dfrac{d\xi^1}{dt}+g_{21}\dfrac{d\xi^2}{dt}}{\widetilde{G}_{11}\dfrac{d\xi^1}{dt}+\widetilde{G}_{21}\dfrac{d\xi^2}{dt}}=\frac{g_{12}\dfrac{d\xi^1}{dt}+g_{22}\dfrac{d\xi^2}{dt}}{\widetilde{G}_{12}\dfrac{d\xi^1}{dt}+\widetilde{G}_{22}\dfrac{d\xi^2}{dt}}$$

Якщо підставити $\dfrac{d\xi^1}{dt}=0$, отримаємо $\dfrac{g_{21}}{\widetilde{G}_{21}}=\dfrac{g_{22}}{\widetilde{G}_{22}}$

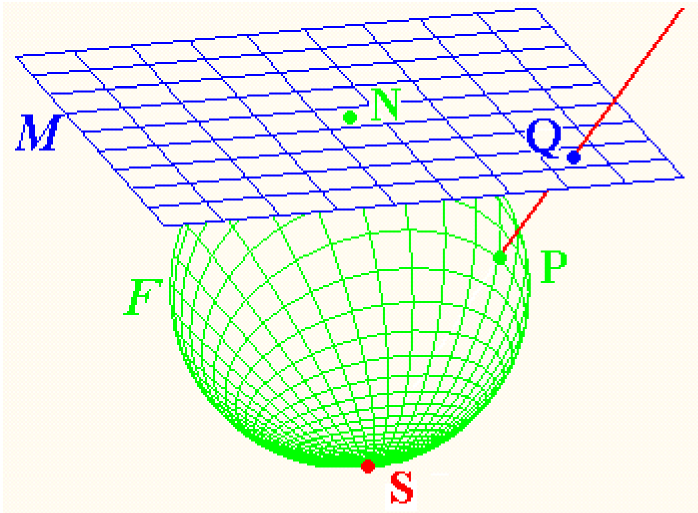
Якщо підставити $\dfrac{d\xi^2}{dt}=0$, отримаємо $\dfrac{g_{11}}{\widetilde{G}_{11}}=\dfrac{g_{12}}{\widetilde{G}_{12}}$

Значить, перші фундаментальні форми поверхонь F і M пропорційні

$$\frac{g_{11}}{\widetilde{G}_{11}}=\frac{g_{12}}{\widetilde{G}_{12}}=\frac{g_{21}}{\widetilde{G}_{21}}=\frac{g_{22}}{\widetilde{G}_{22}}$$

Приклад 1. Відображення поверхонь, породжене гомотетією в обхопному евклідовому просторі.

Приклад 2. Стереографічна проекція



Перевірити самостійно, скориставшись доведеним вище Твердженням.