34.F. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : z \mapsto e^z$ є накриттям.

$p(u+iv) = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$ $\forall\, z = u+iv \in \mathbb{C}$. p — непер. і

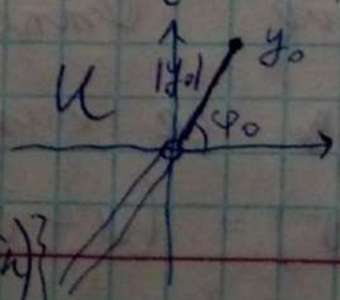
сюр'є на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$: $e^u\cos v + i e^u \sin v$. бо задається непер. ф-ціями

$\forall\, y \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $y = p(\ln|y| + i \arg y)$.

При цьому для $y = |y|e^{i\varphi}$ $p^{-1}(y) = \{\ln|y| + i(\varphi + 2\pi n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

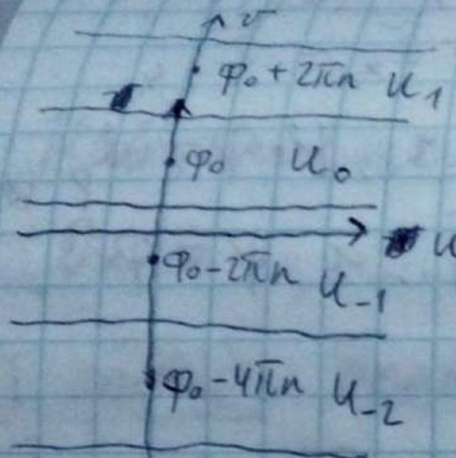
$\forall\, y_0 = |y_0|e^{i\varphi_0}$ покладемо $U := \{|y|e^{i\varphi} \mid \varphi \in (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)\}$ —

це площина $\mathbb{C}$ з вирізаним променем:



Тоді

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{u+iv \mid u \in \mathbb{R},\ v \in (\varphi_0 - \pi + 2\pi n,\ \varphi_0 + \pi + 2\pi n)\}}_{U_n}$$



Це відкриті диз'юнктні підмножини $\mathbb{C}$ (~~площини~~ смуги). $\forall n$

$$p: \underset{(\varphi_0 - \pi + 2\pi n,\ \varphi_0 + \pi + 2\pi n)}{\underset{\cap}{u + iv}} \mapsto \underset{e^u \cos v + i e^u \sin v}{\underset{\parallel}{e^u e^{iv}}} \in U \quad -$$

від, ~~[illegible]~~ неперервне, бо задається непер. ф-ціями і обернене

$$y \mapsto \begin{cases} \left(\ln|y|,\ \arccos \dfrac{\mathrm{Re}\, e^{-i\varphi_0} y}{|y|} + \varphi_0 + 2\pi n\right), & \mathrm{Im}\, e^{-i\varphi_0} y \geq 0 \\ \left(\ln|y|,\ -\arccos \dfrac{\mathrm{Re}\, e^{-i\varphi_0} y}{|y|} + \varphi_0 + 2\pi n\right), & \mathrm{Im}\, e^{-i\varphi_0} y \leq 0 \end{cases}$$

неперервне. Отже, U – правильно покр., $(\mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus\{0\}, p)$ – універсальне покр.

Також це покриття над простором орбіт дії $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}$:

$n \cdot (u + iv) = (u + i(v + 2\pi n))$, непер. і цілком розр.

Порівняємо з покриттям з задачі <u>37.1</u>:

$$q: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : (x, y) \mapsto y e^{2\pi i x}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R}^2_+ \arrow[dl, "q"] \\ & \mathbb{C}\setminus\{0\} & \end{tikzcd}$$

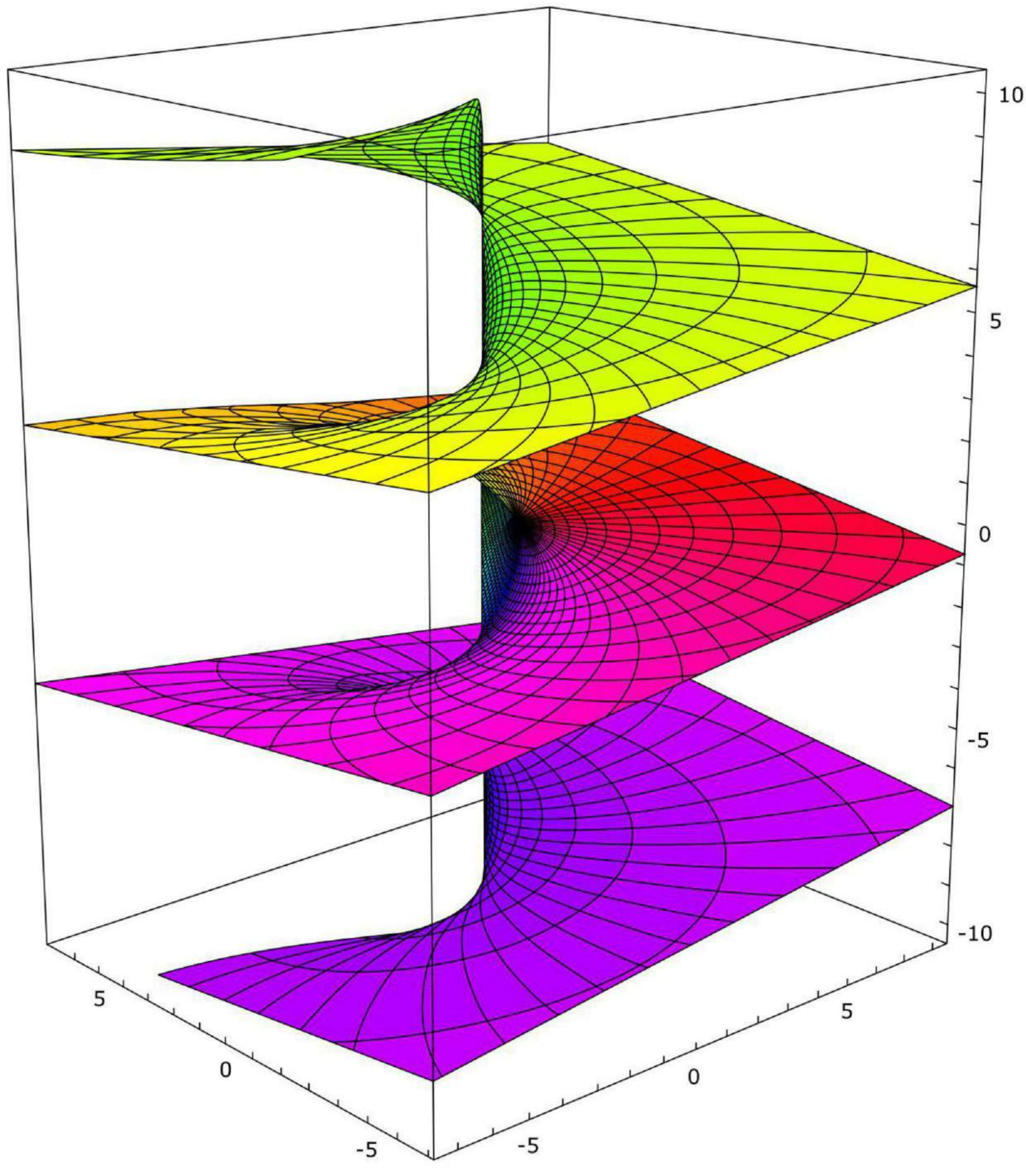
Вони ізоморфні: для гомеоморфізма

$$\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2_+ : u + iv \mapsto \left(\frac{v}{2\pi}, e^u\right).$$

Дійсно, $\forall\, u+iv \in \mathbb{C} \Rightarrow q(\varphi(u+iv)) = q\left(\frac{v}{2\pi}, e^u\right) =$

$= e^u e^{2\pi i \frac{v}{2\pi}} = e^{u+iv} = p(u+iv).$

Уявлення про структуру p дає гелікоїд ("ріманова поверхня ф-ції $y = e^z$"): беремо зліченну кількість копій $\mathbb{C}$ і склеюємо уздовж розрізів.


10
5
0
-5
-10
5
0
-5
5
0
-5

Локально визначене $(P|_{U_n})^{-1} : U \to U_n$ тоді інтерпретують як комплексний аналог логарифма. Логарифм в цілому (P^{-1}) тоді стає "багатозначною функцією".

Більш точно, розглянемо "графік" $X := \{(y,z)\in\mathbb{C}^2 \mid y = e^z\}$ та проєкції $p: X\to\mathbb{C}: (y,z)\mapsto y$ та $q: X\to\mathbb{C}: (y,z)\mapsto z$. Тоді $X_0 := p^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = X$ є поверхнею (2-вим. многовидом) з додатковою т.зв. комплексною структурою – рімановою поверхнею $y=e^z$, $p: X_0\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ – накриття, що ототожн. з [illegible], а $q: X_0\to\mathbb{C}$ – дифеоморфізмом. Композиції $q\circ(p|_{U_n})^{-1}: U\to\mathbb{C}$ для різних U_n будуть "комплексними логарифмами" $z=\ln y$.

34.3. Показати, що $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $p: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}: z \mapsto z^n$ задає накриття

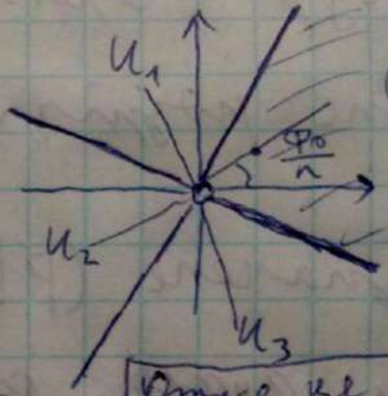
$p(z) = p(|z| e^{i\varphi}) = |z|^n e^{in\varphi}$ – неперервне, бо задається непер. ф-ціями і ~~з~~ сюр $\left(\forall\, y = |y| e^{i\psi} = p\left(\sqrt[n]{|y|}\, e^{i\frac{\psi}{n}}\right)\right)$.

$\forall\, y_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ окремо U так ~~с~~ само, як у 34.F: $y_0 = |y_0| e^{i\psi_0}$

$U = \{ y = |y| e^{i\psi} \mid \overset{|y|>0}{\psi \in (\psi_0 - \pi, \psi_0 + \pi)} \}$. Тоді

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left\{ z = |z| e^{i\varphi} \;\middle|\; \begin{array}{l} |z|>0, \\ \varphi \in \left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{(2k-1)\pi}{n}, \frac{\varphi_0}{n} + \frac{(2k+1)\pi}{n} \right) \end{array} \right\}}_{U_k},$$ — відкриті

диз. підмножини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (кути)!
(також це фактор-простір за дією групи обертань на $\frac{2\pi}{n}$).

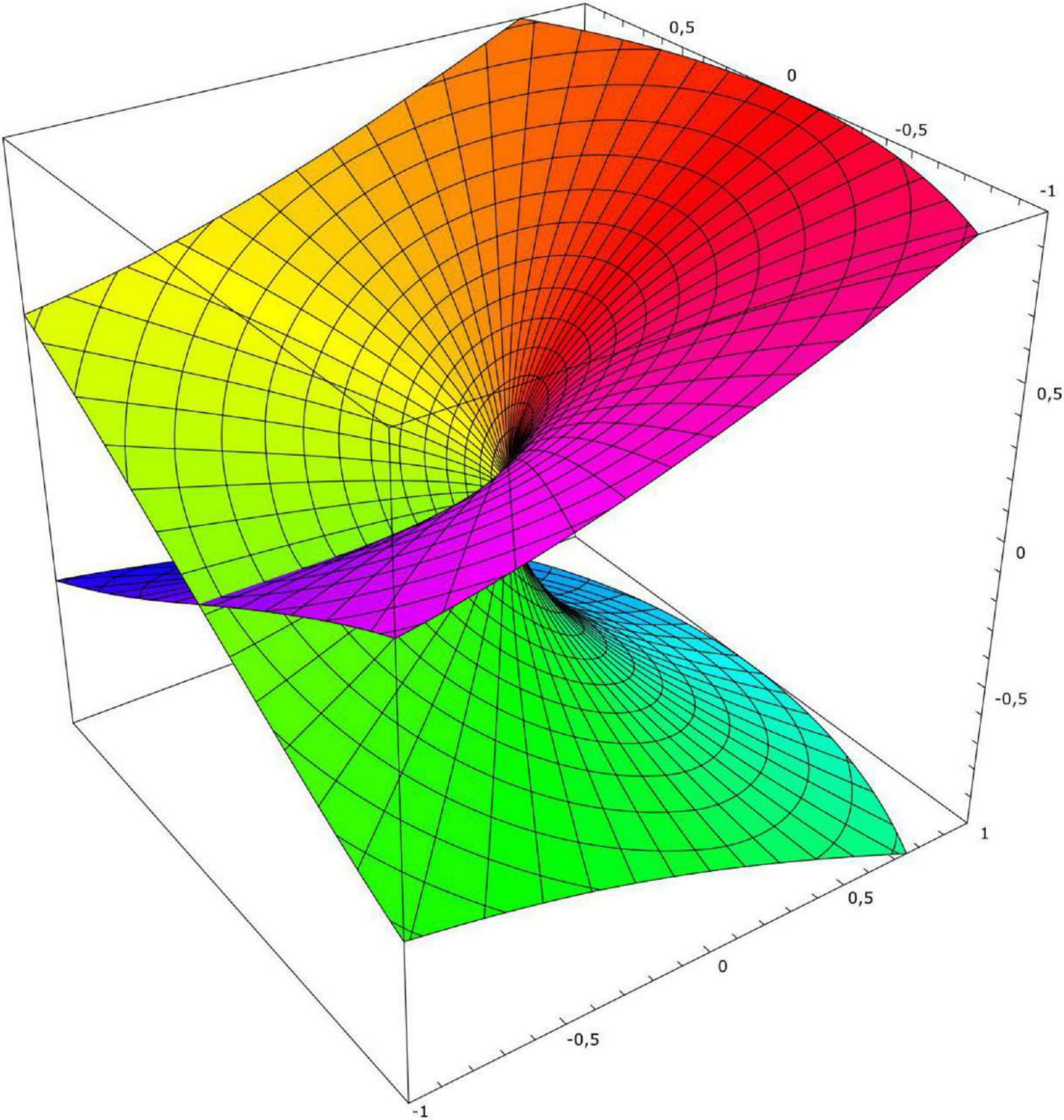


$n = 4$.

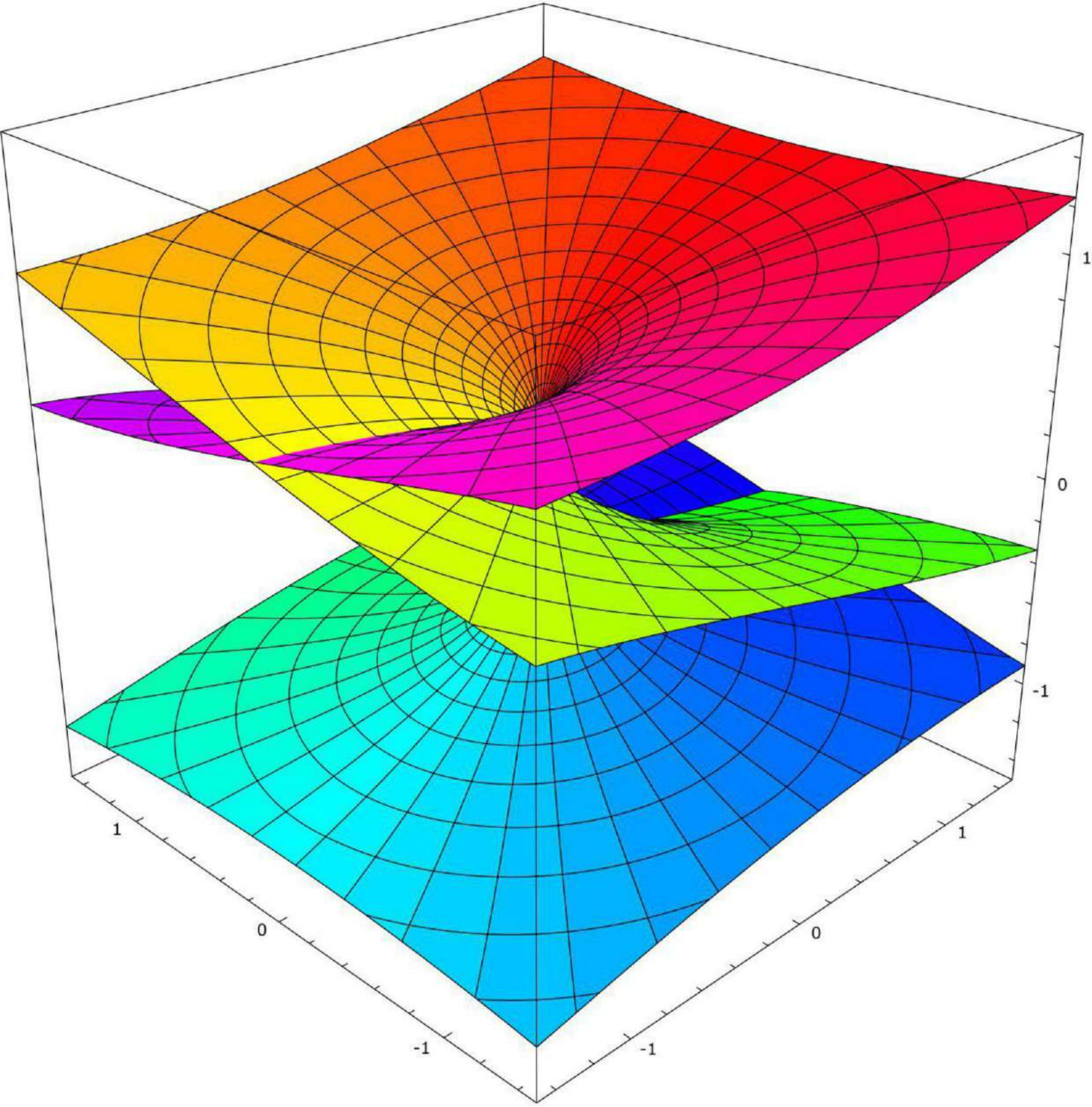
$p: U_k \to U$ — біє, непер. як обмеження

$\boxed{\text{Отже, це } n\text{-листове накриття}}$

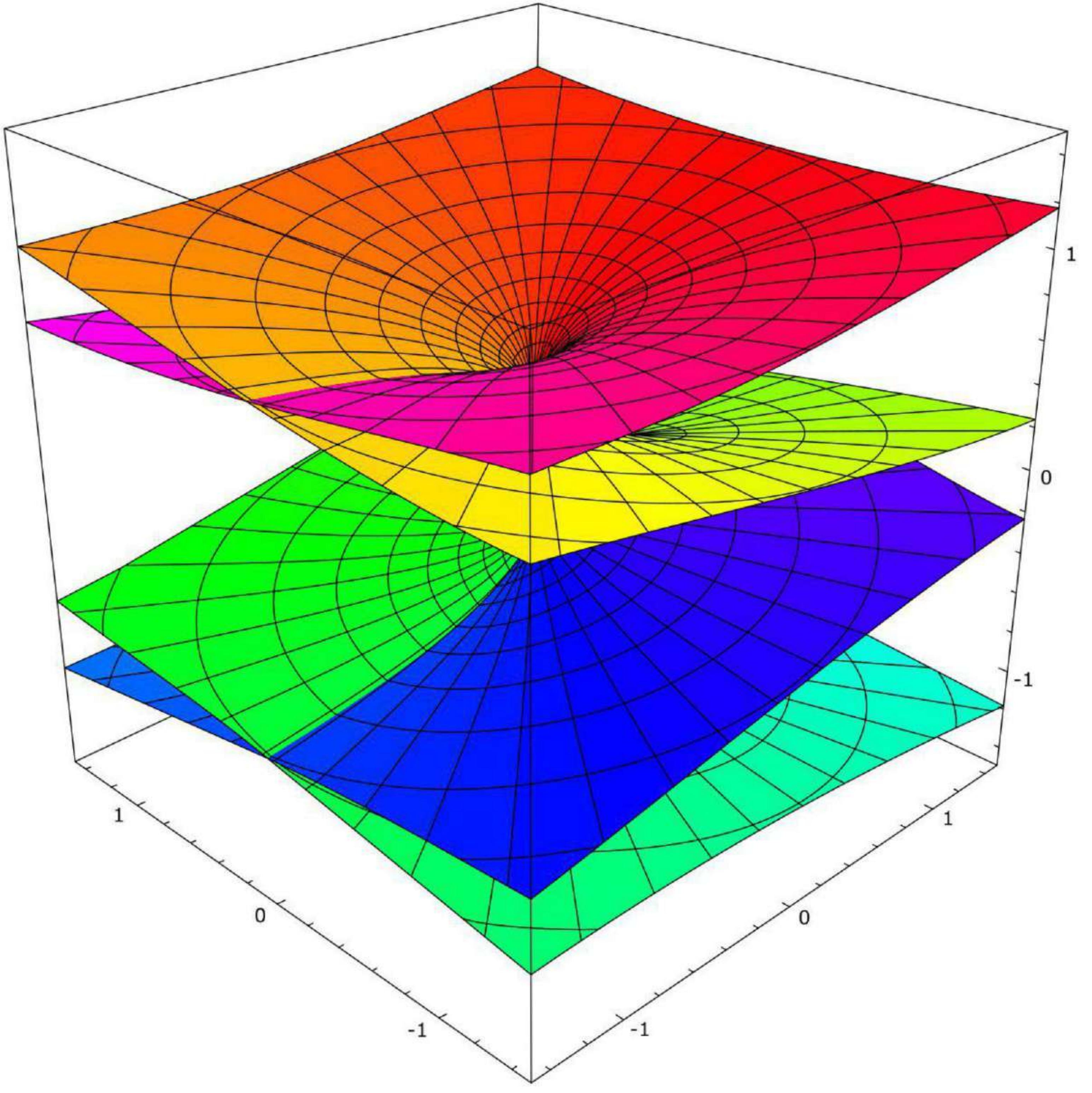
p. Обернене можна записати аналогічно до попер. задачі. Це буде лок. задання "багатозначної ф-ції" $z = \sqrt[n]{y}$. Уявлення про p при $n = 2, 3, 4$ дають поверхні:



1
0,5
0
-0,5
-1
0,5
0
-0,5
1
0,5
0
-0,5
-1



1
0
-1
1
0
-1
1
0
-1


1
0
-1
1
0
-1
1
0
-1

ф-ції $y = z^n$

Тут знову виникає ріманова поверхня $X_0 := p^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \cong \mathbb{C}\setminus\{0\}$, де $X := \{(y,z)\in\mathbb{C}^2 \mid y = z^n\}$, $p : X \to \mathbb{C} : (y,z) \to y$, і $p : X_0 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ – накриття, що ототожн. з нашим. Тоді $q\circ(p|_{U_k})^{-1} : U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, де $q : X_0 \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : (y,z) \to z$ – дифео-зм – є "комплексні корені" $z = \sqrt[n]{y}$.

Взагалі, багато ідей з комплексного аналіза можна інтерпретувати в термінах накриттів. Див., наприклад, С.Н. Львовский. Лекции по комплексному анализу.

(Тв.17.2, Косньовскі). Нехай X - хаусдорфовий ТП, група G діє на X неперервно і вільно, G скінченна. Тоді ця дія цілком розривна.

Отже, $G = \{a_0 = e, a_1, \ldots, a_n\}$, $\forall\, i = \overline{0,n}$ $\lambda_{a_i} : x \mapsto a_i \cdot x$ - неперервне ($\Rightarrow$ гомеоморфізм) $X \to X$, і $\forall\, i \neq 0$ $\forall x \in X$ $a_i \cdot x \neq x$ (при цьому $e \cdot x = x$).

$\forall\, x \in X$ розглянемо її орбіту $\{a_i \cdot x\}_{i=0}^{n}$. $\forall\, i = \overline{1,n}$ за хаусдорф. $\exists$ відкр. $U_i \ni a_i \cdot x$, $V_i \ni x$: $U_i \cap V_i = \varnothing$. Покладемо $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ - відкр. окіл x, $\forall\, i$ $V \cap U_i = \varnothing$. $\forall\, i = \overline{1,n}$ λ_{a_i} - гомео-зм $\Rightarrow$ $\lambda_{a_i}^{-1}(U_i)$ - відкр. окіл x. Покладемо $U := V \cap \bigcap_{i=1}^{n} \lambda_{a_i}^{-1}(U_i)$ - відкр. окіл x. Тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$ $\lambda_{a_i}(U) \subset \lambda_{a_i}(\lambda_{a_i}^{-1}(U_i)) = U_i$, $U \subset V \Rightarrow U \cap \lambda_{a_i}(U) = \varnothing$. За def. дія цілком розривна

Ex. Лінзові простори. $X = S^3 \subset \mathbb{C}^2$: $S^3 = \{(z, w) \mid z, w \in \mathbb{C},$ $|z|^2 + |w|^2 = 1\}$, $G = \mathbb{Z}_p$. Нехай q - вз. просте з p натуральне.

↖ хаусдорфовий

$\forall k = \overline{0, p-1}$

$$[k] \cdot (z, w) := \left(e^{\frac{2\pi k i}{p}} z, \ e^{\frac{2\pi q k i}{p}} w \right)$$

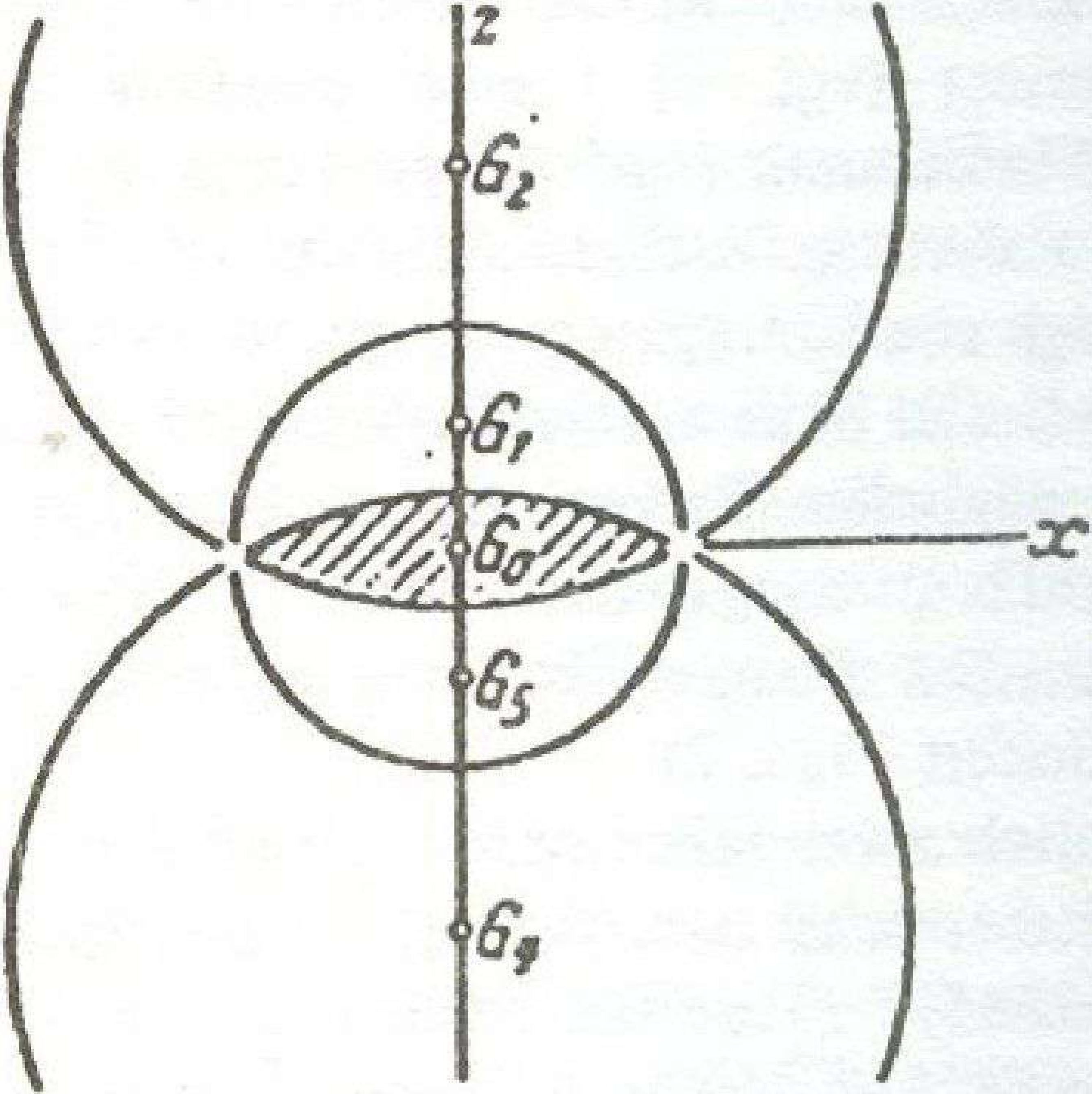
Канонічна проекція $S^3 \to L(p, q)$ задає p-листове універсальне накриття

$\forall (z, w) \in S^3$ $[k] \cdot (z, w) \in S^3$ і $[k]$ неперервне, бо у координатах $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ задається непер. ф-ціями. Це дія, бо $[0] \cdot (z, w) = (z, w)$ і $[k + l] \cdot (z, w) = [k] \cdot ([l] \cdot (z, w))$, зокрема, $[k+p] \cdot (z, w) = [k] \cdot (z, w)$:

$$\left(e^{\frac{2\pi (k+p) i}{p}} z, \ e^{\frac{2\pi q (k+p) i}{p}} w \right) = \left(e^{\frac{2\pi k i}{p} + 2\pi i} z, \ e^{\frac{2\pi q k i}{p} + 2\pi q i} w \right) = \left(e^{\frac{2\pi k i}{p}} z, \ e^{\frac{2\pi q k i}{p}} w \right)$$

Вона вільна, бо $e^{\frac{2\pi k i}{p}} z \neq z$ для $k = \overline{1, p-1}$ (при цьому це й $e^{\frac{2\pi q k i}{p}} w \neq w$ в силу вз. простоти p і q). Отже, для цілком розд лінзовий простір $L(p, q) := S^3 / \mathbb{Z}_p$. S^3 однозв. $\Rightarrow \pi_1(L(p, q)) \simeq \mathbb{Z}_p$.

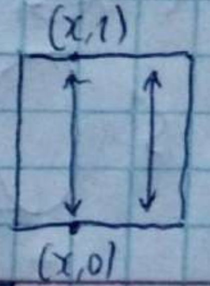
При $p = 2$, $q = 1$ $[1] \cdot (z, w) = (-z, -w)$, тобто $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$.



z
б2
б1
б0
x
б5
б4

34.4. Побудувати накриття стрічки Мебіуса у циліндром

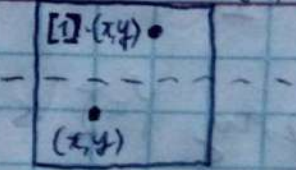
$X = I \times S^1$



$X = I^2/\sim$, де $\sim$: $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall\, x \in I$:

Подіємо на I^2 групою $\mathbb{Z}_2$: $[0] = id$,

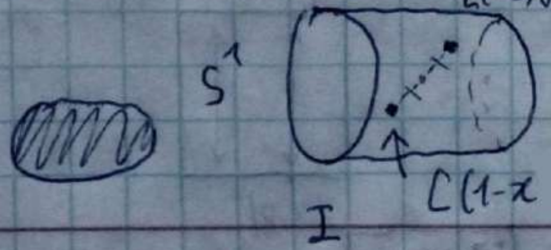
$$[1]\cdot(x,y) = \begin{cases} \left(1-x,\ y+\frac{1}{2}\right), & y \le \frac{1}{2} \\ \left(1-x,\ y-\frac{1}{2}\right), & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Насправді це не дія, бо $\forall x$ $[1]^2 \cdot (x,0) = [1]\cdot(1-x, \frac{1}{2}) = (x,1) \neq$ $\neq (x,0)$, а $[1]^2 = [0]$. Але $[0]$ і $[1]$ коректно факторизуються:

$[1]\cdot(x,0) = (1-x, \frac{1}{2}) = [1]\cdot(x,1)$ $\forall x$, тому визначені на $I \times S^1 = I^2/\sim$, і там вже $[1]^2 \cdot [(x,0)] = [(x,1)] = [(x,0)]$, тому це дія. Вона неперервна (факт. неперервного), вільна ($[1]\cdot[(x,y)] \neq$ $\neq [(x,y)]$) на хаусд $I\times S^1$ $\Rightarrow$ цілком розривна, бо $\mathbb{Z}_2$ скінченна.

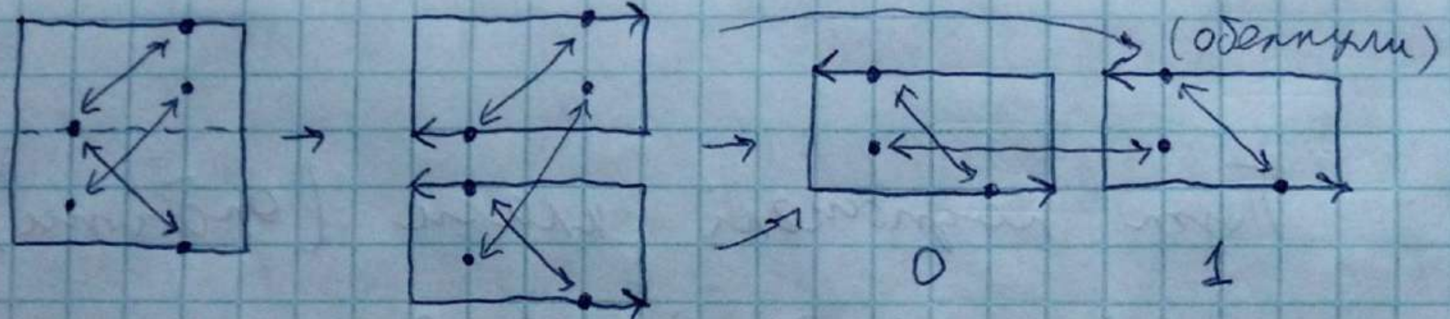
Тому $(S^1 \times I, \underbrace{S^1\times I}_{[(x,y)]}/\mathbb{Z}_2, p)$ - накриття.



$[1]$ діє на $I\times S^1$ як $(x,y) \mapsto (1-x, -y)$.

$[(1-x, y+\frac{1}{2})] = [1]\cdot[(x,y)]$

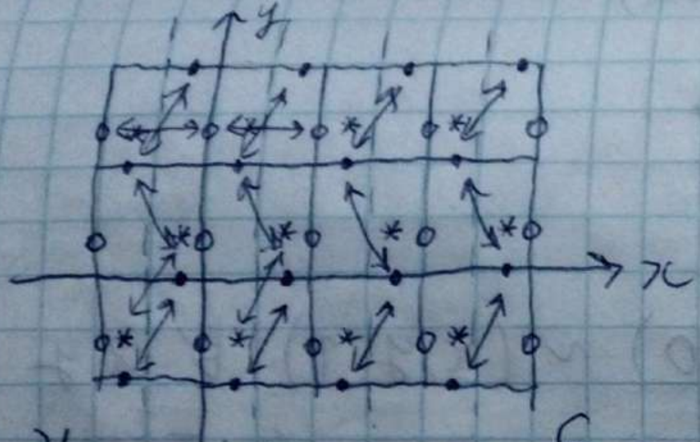
При цьому $Y = I \times S^1/\mathbb{Z}_2 = (I^2/\sim)/\mathbb{Z}_2$ гомеоморфна стрічці Мебіуса!



Тобто тепер $Y = I^2 \sqcup I^2 / \sim$, де $(x, y, 0) \sim (x, y, 1)$ $\forall\, x, y$ і $(x, 0, i) \sim (1-x, 1, i)$ $\forall\, x, i = \overline{0,1}$. Склеїмо їх: $Y = I^2/\sim$, де $(x, 0) \sim (1-x, 1)$ $\forall\, x$, тобто Y – стрічка Мебіуса.

Накриття дволистове ($\forall\, y$ $|p^{-1}(y)| = 2$).

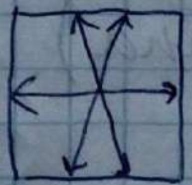
<u>34.7.8</u> Знайти накриття $(\mathbb{R}^2, K^2, p)$ (універсальне накриття пляшки Клейна)



Тут розглянемо класи (орбіти) трьох точок: $\bullet$, $\circ$, $*$.

Це дія групи G що породжена паралельними перенесеннями на $(k,0)$, $k\in\mathbb{Z}$: $(x,y)\mapsto(x+k,y)$, уздовж Ox та ковзними симетріями відносно вертикальних прямих $x=\frac{k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$: $(x,y)\mapsto(k-x,\,y+1)$.

Вона непер., цілком розр. $(U=B_{\frac{1}{2}}(x,y))$ діє, і факторпростір ізоморфний



$I^2/\sim\ \cong K^2$.

Тому $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2/G, p)\cong(\mathbb{R}^2, K^2, \hat{p})$ - універсальне накр. $\Rightarrow \pi_1(K^2)\cong G$.

Точніше, твірними G є $a: (x,y) \mapsto (1-x, y+1)$ та $b: (x,y) \mapsto (x+1, y)$ (тоді $b^k: (x,y) \mapsto (x+k, y)$ і $b^{k-1} \circ a: (x,y) \mapsto (k-x, y+1)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$). Для них виконане співвідношення $a \circ b \circ a^{-1} \circ b = id$. Дійсно, $(x,y) \overset{b}{\mapsto} (x+1,y) \overset{a^{-1}}{\mapsto} (-x, y-1) \overset{b}{\mapsto} (1-x, y-1) \overset{a}{\mapsto} (x,y)$.

35.7. $\exists$ (X, Y, p) - накр.: X, Y - лін зв., накриття неоднолистове, тобто $|p^{-1}(y)| > 1$ [$\exists y \Leftrightarrow \forall y$ в силу лін. зв-сті і 34.11)

Тоді Y неоднозв'язний.

$\exists\, x, z :\ x \neq z$, $p(x) = p(z) = y$. Лін зв-сть $X \Rightarrow \exists$ шлях f: $I \to X$: $f(0) = x$, $f(1) = z$. Тоді $p \circ f$ – петля в y: $[p \circ f] \in \pi_1(Y, y)$. $\nearrow$ $[p \circ f] = [e_y]$, тобто $p \circ f \sim e_y$. За 1ст. про накриваючу гомотопію, тоді $f \sim e_x$, бо вони накривають $p \circ f$ і e_y відп.: $p \circ e_x = e_y$ і мають початок у $f(0) = e_x(0) = x$. Зокрема, тоді у них спільний кінець: $f(1) = e_x(1) = x \neq z$ $\lightning$. Отже, $[p \circ f] \neq [e_y] \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi_1(Y, y) \neq \{[e_y]\}$.

(Насправді це просто Рч.9.2. лекції).

35.6 Для накриття $(\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, p)$, де $p(z) = e^z$ знайти піднятя шляху $f: t \mapsto 2 - t$.

$f(0) = 2$. $p^{-1}(f(0)) = \{\ln 2 + 2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Нехай $\tilde{f}_\bullet(t) = u(t) + i\,v(t)$ задає піднятя f:
$(\tilde{f} \in C(I, \mathbb{C}))$.

$\forall t \in I \quad z-t = f(t) = (p \circ \tilde{f})(t) = e^{u(t)} e^{i v(t)} = e^{u(t)}(\cos v(t) + i \sin v(t))$, тобто $e^{u(t)} \cos v(t) = z-t$, $e^{u(t)} \sin v(t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin v(t) = 0$.

При цьому $\tilde{f}$ – з початком у $\ln z + 2\pi i k \in p^{-1}(z)$, тобто $u(0) = \ln z$, $v(0) = 2\pi k$. Оскільки $\sin v(t) = 0 \ \forall t$ і $v: I \to \mathbb{R}$ непер., $v \equiv 2\pi k \Rightarrow \cos v(t) = 1 \ \forall t$. Тоді $e^{u(t)} = z-t$

$\Rightarrow u(t) = \ln(z-t)$, що узгоджується з $u(0) = \ln z$.

Отже, $\tilde{f}(t) = \ln(z-t) + 2\pi i k$ – підняття f з початком у $\ln z + 2\pi i k$.

41.10ж (1) Описати з точністю до ізоморфності усі накриття S^1 з відміченою точкою 1 (з лін. зв. накриваючими просторами) (точніше, класи ізоморфності).

Згідно з теоремою 12.1 лекцій, ці накриття знаходяться у відповідності з підгрупами $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ (далі ототожнюємо її з $\mathbb{Z}$): накриттю (X, S^1, p) з відм. точкою $x \in X : p(x) = 1$ відповідає $p_*(\pi_1(X, x)) \subset \mathbb{Z}$ [бо S^1 лін. зв., лок. лін. зв. і напівлок. однозв.).

Нехай $H \subset \mathbb{Z}$ - підгрупа і $n := \min\{|k| \mid k \in H, k \neq 0\}$. n визначений і $\in \mathbb{Z}$ $\forall H \neq \{0\}$. Тоді $\forall\, l \in \mathbb{Z}$ $ln \in H$ ($\underbrace{n + \ldots + n}_{l}$ при $l > 0$, $-\underbrace{(n + \ldots + n)}_{-l}$ при $l < 0$ або 0). З іншого боку, якщо $H \ni k \neq ln$, $l \in \mathbb{Z}$, то залишок m від ділення k на n належить до H: $m = k - ln$ для деякого l, $m \neq 0$ і $m < n$ $\lightning$. Отже, $H = n\mathbb{Z} = \{ln \mid l \in \mathbb{Z}\}$ (звичайно, і навпаки, $\forall$ $n\mathbb{Z}$ - підгрупа), включно з $\mathbb{Z}$ при $n = 1$.

Як бачили у Ex. 9.3 лекцій, $H = n\mathbb{Z}$ відповідає накриття (S^1, S^1, p), де $p(z) = z^n$. Отже, $\forall$ накриття $(S^1, 1)$ ізоморфне одному з таких (з відм. точкою $1 \to 1$), у т.ч. тривіальному при $n = 1$ або універсальному $(\mathbb{R}, S^1, p)$, де $p(t) = e^{2\pi i t}$ при $H = \{0\}$.

З'ясуємо підпорядкованість: $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \,\vdots\, m$, тобто $n = mk$, $k \in \mathbb{N}$ (також можливо $n=0$, тобто це $\{0\}$). Згідно з рез-тами розділу 10, це $\Leftrightarrow$ (S^1, S^1, p_m) підпорядковане (S^1, S^1, p_n), де $p_n(z) = z^n$, або універсальному $(\mathbb{R}, S^1, p)$ при $n=0$. Тобто $\exists$ накриття (S^1, S^1, q) таке, що $p_n = p_m \circ q$ (або $(\mathbb{R}, S^1, q)$: $p = p_m \circ q$).

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p_n"'] & & S^1 \arrow[dl, "p_m"] \\ & S^1 & \end{tikzcd} \quad \text{або} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & S^1 \arrow[dl, "p_m"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}.$$

Дійсно, для $q: z \mapsto z^k$: $p_m(q(z)) = (z^k)^m = z^n = p_n(z)$ $\forall z$ (відп., $q: t \mapsto e^{\frac{2\pi i t}{m}}$: $p_m(q(t)) = \left(e^{\frac{2\pi i t}{m}}\right)^m = e^{2\pi i t} = p(z)$ – це теж унів. накриття S^1). Усі підпорядковані універсальному, а тривіальне — цій. Це частковий порядок, але не повний (не лінійний).