1045(2) - ая - но 1045(1), 807(6) - ая - но 807(12).

807 (20) (дослухали) - ан-но 807 (4)

808. $x^2+2\alpha xy+y^2-1=0$

$A=\begin{pmatrix}1&\alpha\\ \alpha&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\ \alpha&1&0\\ 0&0&-1\end{pmatrix}$

$I_2=\det A=1-\alpha^2$, $I_3=\det B=-\det A=\alpha^2-1$.

Тобто це

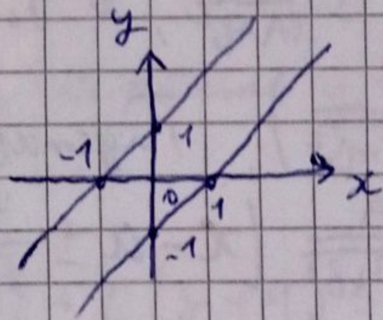
- еліпс при $\alpha\in(-1,1)$
- пара паралельних прямих при $\alpha=-1,1$.
- гіпербола при $\alpha\in(-\infty,-1)$ або $\alpha\in(1,+\infty)$

Зокрема, при $\alpha=-1$:

$$x^2-2xy+y^2-1=0$$

$$(x-y)^2=1$$

$x-y+1=0$, $x-y-1=0$.

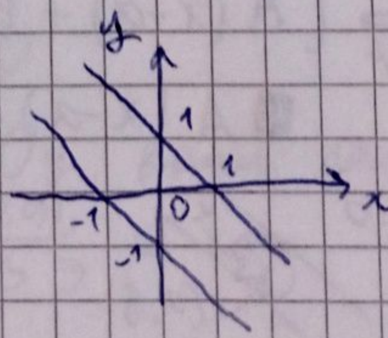


При $\alpha=1$:

$$x^2+2xy+y^2-1=0$$

$$(x+y)^2=1$$

$x+y+1=0$, $x+y-1=0$.



Для визначення розташування при інших α знайдено власні вектори A. Вл. знач.:

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda&\alpha\\ \alpha&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1-\alpha^2$$

$$\lambda=1\pm\sqrt{1-(1-\alpha^2)}=1\pm|\alpha|$$

Тобто $\lambda_1 = 1+\alpha$, $\lambda_2 = 1-\alpha$.

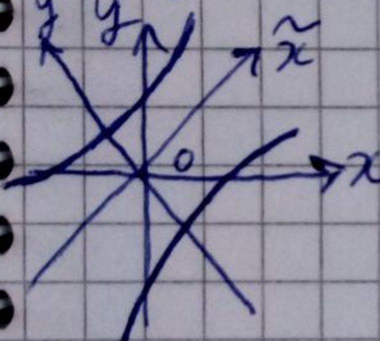
a_1: $\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha\\ \alpha & -\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=0$, тобто $a_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

$a_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

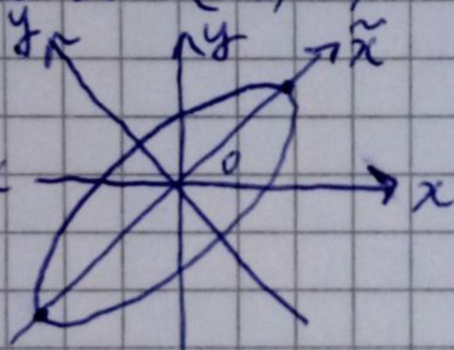
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}:$$

$(1+\alpha)\tilde{x}^2 + (1-\alpha)\tilde{y}^2 = 1$ центр у $(0,0)$.

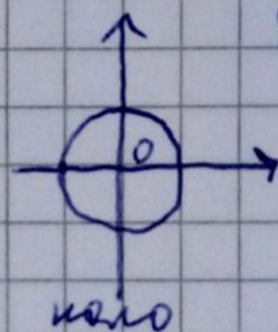
$\alpha \in (-\infty, -1)$



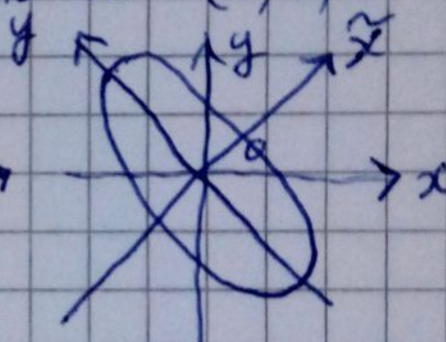
$\alpha \in (-1, 0)$



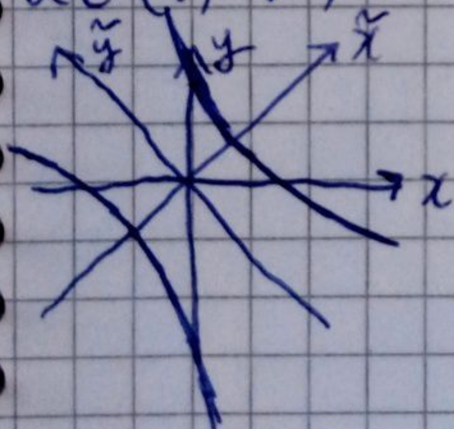
$\alpha = 0$



$\alpha \in (0, 1)$



$\alpha \in (1, +\infty)$



1046(9)

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$$

Матриця квадратичної частини:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

Розширена матриця:

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&-1\\1&5&1&3\\3&1&1&1\\\hline -1&3&1&0\end{array}\right)$$

A

коеф. при x, y, z, поділені на 2

вільний член

Знову знайдемо канонічне рівняння, не використовуючи перетворення координат.

Інваріанти:

$$I_1=\operatorname{Tr}A=a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+5+1=7$$

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{13}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&1\\1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&1\\1&1\end{vmatrix}=4-8+4=0$$

$$I_3=\det A=$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 1\cdot(-2) + 3\cdot(-14) = -36$$

$$I_4 = \det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-5+3-6) - (-1-1+12) +$$

$$+ 3(-3-5+30) + (-2-20+10) = 36.$$

(або: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & 7 \end{vmatrix} =$

$= -12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 7 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 36$)

$I_3 \neq 0$ означає, що це центральна поверхня (еліпсоїд, гіперболоїд або конус), $I_4 \neq 0$ – невироджена, тобто що не конус. Канонічне рівняння:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \lambda_3 \hat{z}^2 + \hat{c} = 0.$$

Інваріанти:

$$I_1 = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \left(= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$I_3 = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

За теоремою Вієта, характеристичне

рівняння:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$$

Перебираючи дільники 36, знаходимо, що -2 підходить:

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 & \lambda + 2 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3 + 2\lambda^2} & \lambda^2 - 9\lambda + 18 \\ \quad -9\lambda^2 + 36 & \\ \quad \underline{-9\lambda^2 - 18\lambda} & \\ \qquad 18\lambda + 36 & \\ \qquad \underline{18\lambda + 36} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Інші корені: $\lambda = \frac{1}{2}\left(9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 18}\right) = \frac{1}{2}(9 \pm 3)$

Отже, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$.

Нарешті

$$I_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{c} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\hat{c} = I_3\hat{c}.$$

Тому $\hat{c} = \frac{I_4}{I_3} = \frac{36}{-36} = -1$.

Отже, канонічне рівняння:

$$3\hat{x}^2 + 6\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\hat{x}^2}{\frac{1}{3}} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{1}{6}} - \frac{\hat{z}^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

Однопорожнинний гіперболоїд.

1046 (8)

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&2&1&-2\\2&2&1&3\\1&1&3&-1\\-2&3&-1&3\end{pmatrix}$$

$$I_1=2+2+3=7$$

$$I_2=\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=0+5+5=10$$

$I_3=\det A=0$ (бо перші 2 рядки збігаються)

$$I_4=\begin{vmatrix}2&2&1&-2\\2&2&1&3\\1&1&3&-1\\-2&3&-1&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\2&2&1&3\\2&2&1&-2\\-2&3&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\0&0&-5&5\\0&0&-5&0\\0&5&5&1\end{vmatrix}=$$

$$=25\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\0&5&5&1\\0&0&1&0\\0&0&1&-1\end{vmatrix}=25\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\0&5&5&1\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-125$$

$I_3=0$, $I_4\neq0$ => нецентральна невироджена поверхня, тобто параболоїд.

	$I_3\neq0$, центральні	$I_3=0$, нецентральні
$I_4\neq0$, невироджені	еліпсоїди (у т.ч. уявні), гіперболоїди	параболоїди
$I_4=0$, вироджені	конуси (у т.ч. уявні)	циліндри, пари площин

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda - 0 = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{49-40}\right) = \frac{1}{2}(7 \pm 3)$$

$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0.$

Канон. рівняння параболоїда:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 - 2\hat{p}\hat{z} = 0.$$

Інваріантність:

$$I_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{p} \\ 0 & 0 & -\hat{p} & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 \hat{p}^2 = -I_2 \hat{p}^2.$$

$$\hat{p} = \sqrt{-\frac{I_4}{I_2}} = \sqrt{\frac{125}{10}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$5\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 = 5\sqrt{2}\,\hat{z}$$

$$\frac{\hat{x}^2}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{5}{\sqrt{2}}} = \hat{z}.$$

Еліптичний параболоїд.

811. Записати у термінах інваріантів умову того, що крива є рівнобічною гіперболою, і знайти її канонічне рівняння.

Гіпербола $\Leftrightarrow I_2 < 0,\ I_3 \neq 0.$

Канонічне рівн.:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \hat{c} = 0,$$

де $\lambda_1 + \lambda_2 = I_1$, $\lambda_1\lambda_2 = I_2$, $\lambda_1\lambda_2\hat{c} = I_2\hat{c} = I_3$, як у

807(12). Тому рівнобічна $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = -\lambda_2 \Leftrightarrow$

$I_1 = 0$. Тоді $I_2 = \lambda_1\lambda_2 = -\lambda_1^2 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{-I_2}$

(і $I_1 = 0 \Rightarrow I_2 < 0$, бо $I_2 = -\lambda_1^2 \leq 0$ і при

$I_2 = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A = 0$, тобто це не лінія

II порядку; тому умова $I_2 < 0$ тепер зайва)

Отже, канонічне:

$$\sqrt{-I_2}\,\hat{x}^2 - \sqrt{-I_2}\,\hat{y}^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

$$\hat{x}^2 - \hat{y}^2 = -\frac{I_3}{I_2\sqrt{-I_2}}.$$

Умови $I_1 = 0$, $I_3 \neq 0$.

1047(1) Записати у термінах інваріантів

умову того, що поверхня є (дійсним) еліпсоїдом.

Відноситься до групи центральних невироджених

$\Leftrightarrow I_3 \neq 0, I_4 \neq 0$. Канонічне рівн. тоді:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \lambda_3 \hat{z}^2 + \hat{c} = 0,$$

де $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = I_1$, $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = I_2$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = I_3$,

$I_3\hat{c} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\hat{c} = I_4$ як у 1046(9). Це еліпсоїд

$\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ і $\hat{c} < 0$ або $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ і

$\hat{c} > 0$ $\Leftrightarrow I_1 > 0, I_2 > 0, I_3 > 0$ і $\frac{I_4}{I_3} < 0$ ($\Leftrightarrow I_4 < 0$)

або $I_1<0,\ I_2>0,\ I_3<0$ і $\frac{I_4}{I_3}>0$ $(\Leftrightarrow I_4<0)$

(за правилом знаків Декарта для рівняння $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$ або безпосередньо) $\Leftrightarrow$

$I_2>0,\ I_4<0$ і $I_1>0, I_3>0$ або $I_1<0, I_3<0 \Leftrightarrow$

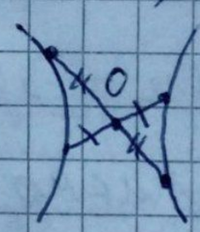
$I_2>0,\ I_4<0,\ I_1 I_3>0$.

<u>807(г)</u> Знайдемо центр кривої, не знаходячи канонічну с.к. (для якої це початок коорд.):

$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$

$\left(I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \Leftrightarrow\right.$ лінія центральна,

тобто $\exists!$ центр симетрії; значно, що це гіпербола, бо $I_2<0,\ I_3\neq 0$).



Рівняння центра для

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$: (A)

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}F'_x = \\ \frac{1}{2}F'_y = \end{matrix} \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

це рівн $F'(x,y)=0$, тобто $F'_x = F'_y = 0$

У нас:

$$\begin{cases} 5x + 6y - 11 = 0 \\ 6x \qquad\ \ - 6 = 0 \end{cases}$$

$x = 1 \Rightarrow 6y = 11 - 5x = 6 \Rightarrow y = 1$.

Тобто центр $(1,1)$. Це дійсно початок знайденої напівне канонічної с.к.

899. Знайти рівняння лінії II порядку, що описана навколо ΔABC, де $A(6,0)$, $B(0,4)$, $C(6,4)$, з центром у $(4,3)$.

Будемо шукати у вигляді (*).

$A, B, C \in$ лінії:

$$\begin{cases} 36a_{11} + 12a_{13} + a_{33} = 0 \\ 16a_{22} + 8a_{23} + a_{33} = 0 \\ 36a_{11} + 48a_{12} + 16a_{22} + 12a_{13} + 8a_{23} + a_{33} = 0 \end{cases}$$

$(4,3)$ задов. рівн. центра:

$$\begin{cases} 4a_{11} + 3a_{12} + a_{13} = 0 \\ 4a_{12} + 3a_{22} + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Віднімаємо перше і друге від третього:

$48a_{12} - a_{33} = 0 \Rightarrow a_{33} = 48a_{12}$. Підставимо:

$$\begin{cases} 36a_{11} + 12a_{13} + 48a_{12} = 0 \\ 4a_{11} + 3a_{12} + a_{13} = 0 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 3a_{11} + 4a_{12} + a_{13} = 0 \\ 4a_{11} + 3a_{12} + a_{13} = 0 \end{cases}$$

$-a_{11} + a_{12} = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{12} \Rightarrow a_{13} = -3a_{11} - 4a_{12} = -7a_{12}$.

$$\begin{cases} 16a_{22} + 8a_{23} + 48a_{12} = 0 \\ 4a_{12} + 3a_{22} + a_{23} = 0 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 6a_{12} + 2a_{22} + a_{23} = 0 \\ 4a_{12} + 3a_{22} + a_{23} = 0 \end{cases}$$

$2a_{12} - a_{22} = 0 \Rightarrow a_{22} = 2a_{12} \Rightarrow a_{23} = -6a_{12} - 2a_{22} = -10a_{12}$.

Рівняння лінії визначається з точністю до множення на константу, тому можемо покласти $a_{12} = 1$. Тоді $a_{11} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{13} = -7$, $a_{23} = -10$, $a_{33} = 48$:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 14x - 20y + 48 = 0.$$

875(1) Знайти асимптоти гіперболи

$$3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=0.$$
$=: F(x,y)$

це гіпербола, бо

$$I_2=\begin{vmatrix}3 & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & 4\end{vmatrix}=12-\frac{49}{4}=-\frac{1}{4}<0$$

$$I_3=\begin{vmatrix}3 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{7}{2} & 4 & 1\\ \frac{5}{2} & 1 & -6\end{vmatrix}=3(-25)-\frac{7}{2}\left(-\frac{47}{2}\right)+\frac{5}{2}\left(-\frac{13}{2}\right)=-9\neq 0$$

Канонічне рівняння: $\hat{F}(\hat{x},\hat{y})=\lambda_1\hat{x}^2+\lambda_2\hat{y}^2+\hat{c}=0$,

де $\hat{c}=\frac{I_3}{I_2}$ (як у 807(12), 811). Тоді рівняння асимптот: $\lambda_1\hat{x}^2+\lambda_2\hat{y}^2=0$, тобто $\hat{F}(\hat{x},\hat{y})=\hat{c}=\frac{I_3}{I_2}$. Але $F(x,y)=\hat{F}(\hat{x},\hat{y})$. Тому рівн. асимптот: $F(x,y)=\frac{I_3}{I_2}=\frac{-9}{-\frac{1}{4}}=36$:

$$3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=36$$

Виділяємо повний квадрат:

$$3\underbrace{\left(x^2+2\cdot\frac{7}{6}xy+2\cdot\frac{5}{6}x\right.}_{+\left(\frac{7}{6}y+\frac{5}{6}\right)^2}\left.\vphantom{\frac{7}{6}}\right)-3\left(\frac{7}{6}y+\frac{5}{6}\right)^2+4y^2+2y-42=0$$

$$3\left(x+\frac{7}{6}y+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{49}{12}y^2-\frac{35}{6}y-\frac{25}{12}+4y^2+2y-42=0$$

$$3\left(x+\frac{7}{6}y+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{12}y^2-\frac{23}{6}y-\frac{\overset{=23^2}{529}}{12}=0$$

$$12\cdot \quad 3\left(x+\frac{7}{6}y+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{12}\left(y+23\right)^2=0$$

$$(6x+7y+5)^2-(y+23)^2=0$$

$$(6x+7y+5-y-23)(6x+7y+5+y+23)=0$$

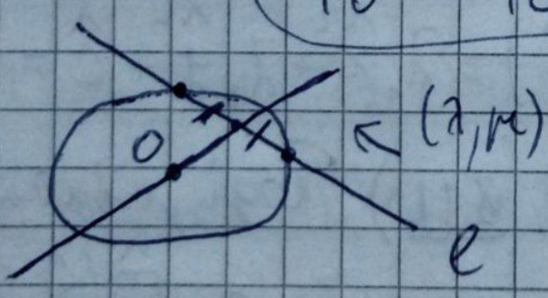
$$(6x+6y-18)(6x+8y+28)=0$$

$$(x+y-3)(3x+4y+14)=0$$

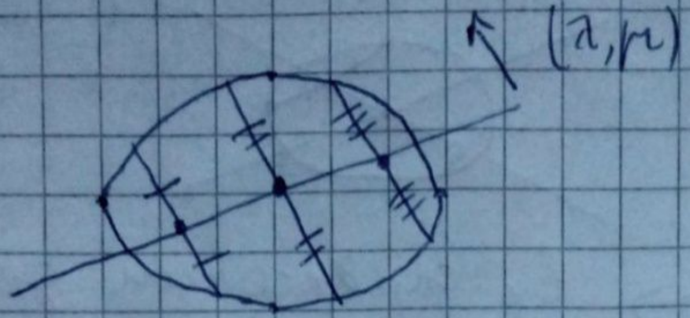
Отже, асимптоти: $x+y-3=0$, $3x+4y+14=0$.

877. Знайти рівняння діаметра еліпса, що проходить через середину хорди, яка висікається еліпсом на прямій $3x+2y-6=0$ l:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$



Умова означає, що діаметр спряжений до напрямного вектора (λ,μ) прямої l:



Тобто це множина центрів усіх хорд, що паралельні (λ, μ). Для загальної кривої

$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$(*)$ рівняння діаметра:

$$\lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \mu(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

$(\lambda F'_x + \mu F'_y = 0)$

Зокрема, діаметр містить усі центри симетрії кривої (для центральної, як еліпс – містить центр)

У нас пряма $3x + 2y - 6 = 0$ з вектором нормалі $(3, 2) \Rightarrow$ напрямний вектор $(-2, 3)$.

Спряжений діаметр:

$$-8 \cdot \Big| \quad -2 \cdot \frac{x}{16} + 3 \cdot \frac{y}{12} = 0$$

$$x - 2y = 0$$

Дійсно проходить через центр $(0, 0)$.