

Лекція 13. Відображення поверхонь. Перша фундаментальна форма

13.1. Відображення поверхонь

Розглянемо неперервне відображення простих поверхонь F і M в \mathbb{R}^3 :

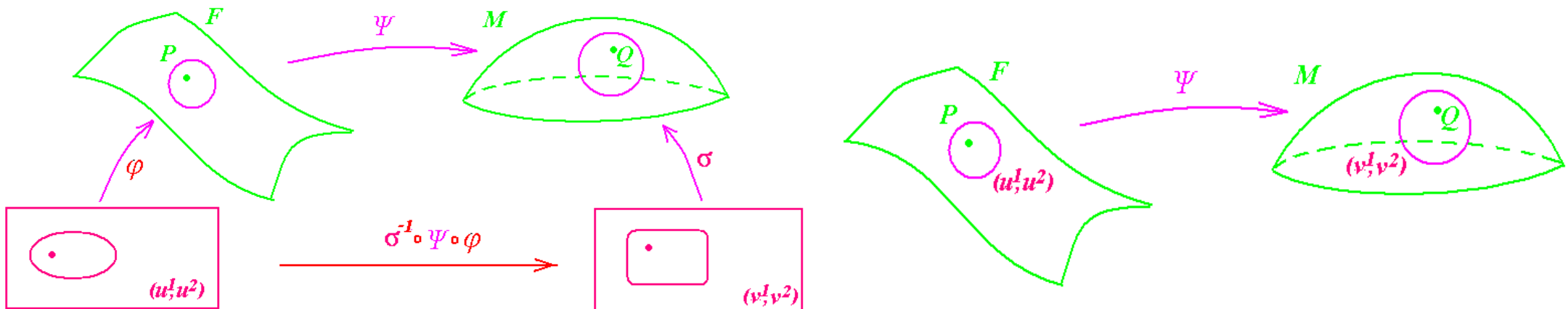
$$\Psi : F \rightarrow M$$

Зафіксуємо точку P на поверхні F та її образ $\Psi(P) = Q$ на поверхні M .

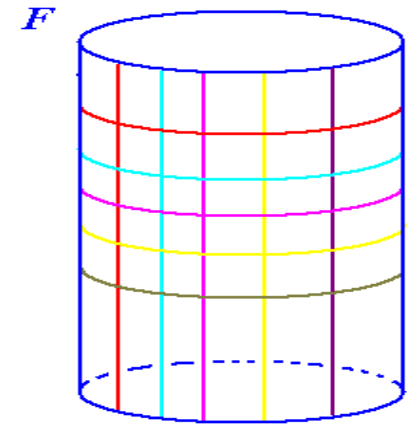
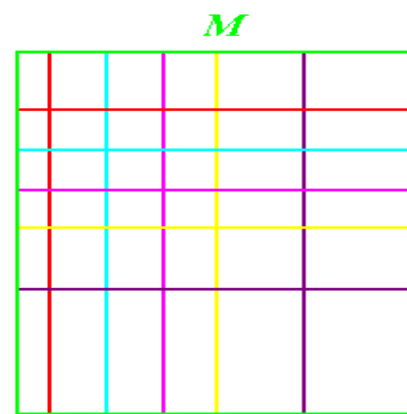
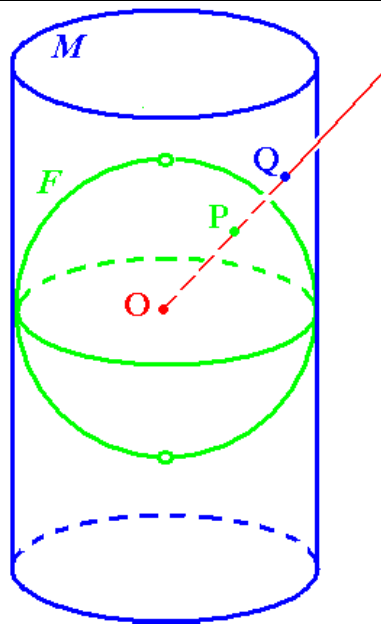
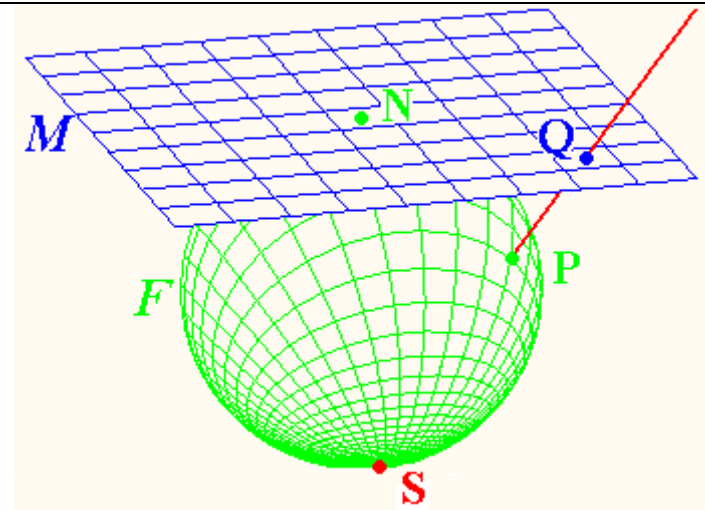
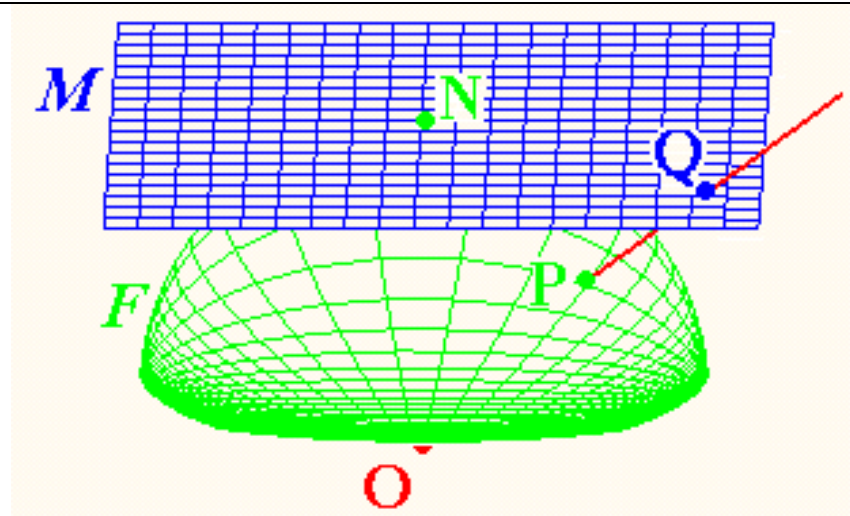
Введемо локальні координати (u^1, u^2) в околі точки P на поверхні F і локальні координати (v^1, v^2) в околі точки Q на поверхні M .

Тоді в локальних координатах відображення Ψ задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$



Приклади



Припустимо, що поверхні F і M є регулярними.

Визначення. Відображення $\Psi : F \rightarrow M$ назовемо *регулярним* в точці $P \in F$, якщо в локальних координатах (u^1, u^2) в околі точки P на поверхні F і в локальних координатах (v^1, v^2) в околі точки Q на поверхні M відображення Ψ задається у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

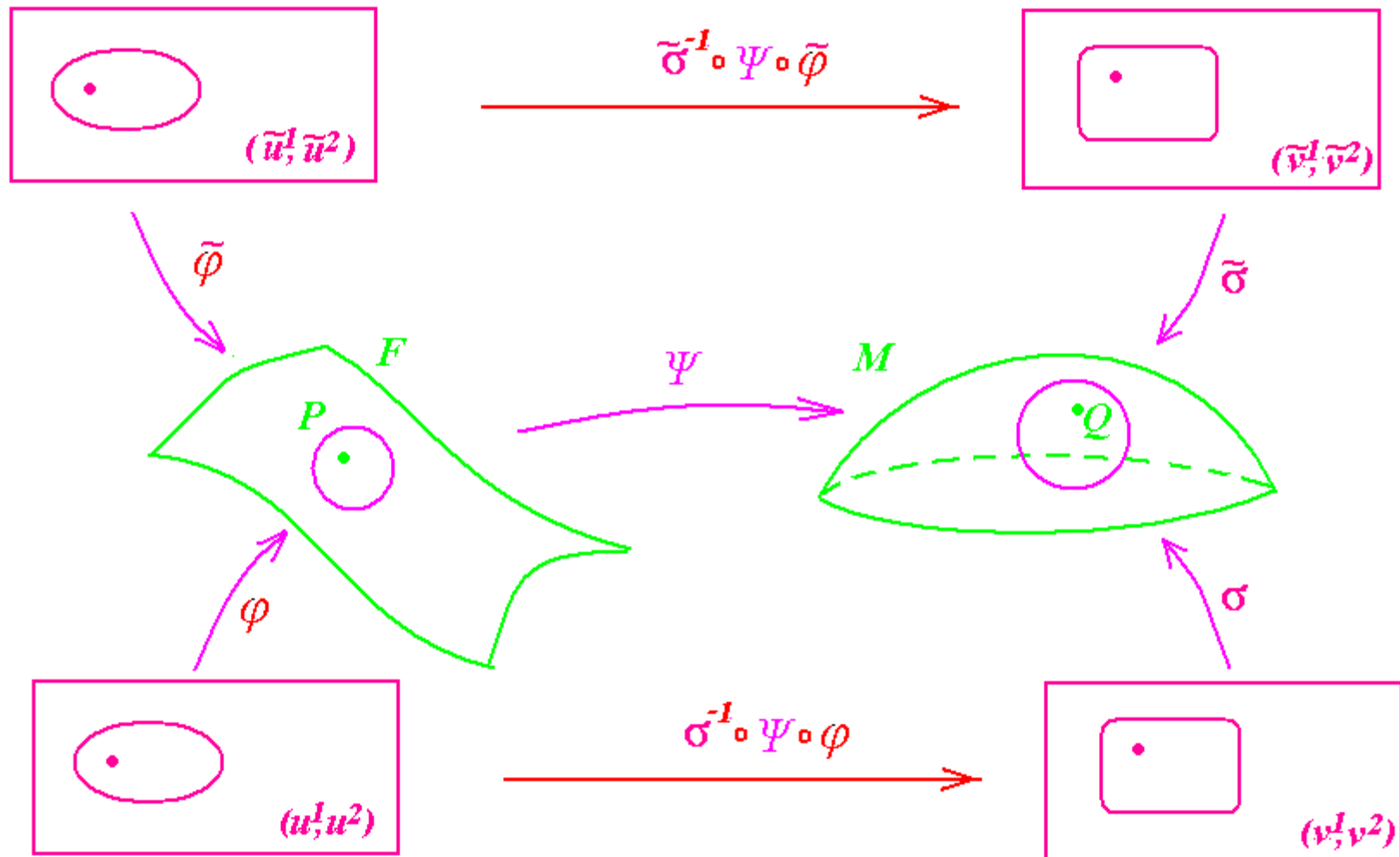
так, що

1) функції $\xi^1(u^1, u^2)$, $\xi^2(u^1, u^2)$ є неперервно диференційованими,

$$2) \begin{vmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix}_P \neq 0$$

Визначення регулярності відображення є коректним – воно не залежить від вибору локальних координат.

Ілюстрація-пояснення:



Відображення $F \rightarrow M$ в старих координатах

$$\begin{cases} v^1 = \xi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \xi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні M

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(v^1, v^2) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(v^1, v^2) \end{cases}$$

Заміна координат на поверхні F

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$$

Відображення $F \rightarrow M$ в нових координатах

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = \tilde{v}^1(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \\ \tilde{v}^2 = \tilde{v}^2(\xi^1(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)), \xi^2(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))) \end{cases}$$

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

Як наслідок, при регулярних замінах координат на поверхнях F і M :

1) зберігається неперервна диференційованість функцій, що представляють відображення, як композицій неперервно диференційованих функцій;

$$2) \begin{vmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Зауваження 1. Регулярне відображення регулярних простих поверхонь є локальним гомеоморфізмом.

Зауваження 2. Якщо в нас є регулярне відображення регулярних простих поверхонь $F \rightarrow M$, то його можна застосовувати для регулярної заміни локальних координат на поверхні F (або на поверхні M) так, щоб в нових координатах відображення задавалось за відповідністю координат – відповідні за відображенням точки на поверхнях F і M мають однакові координати.

13.2. Диференціал відображення поверхонь

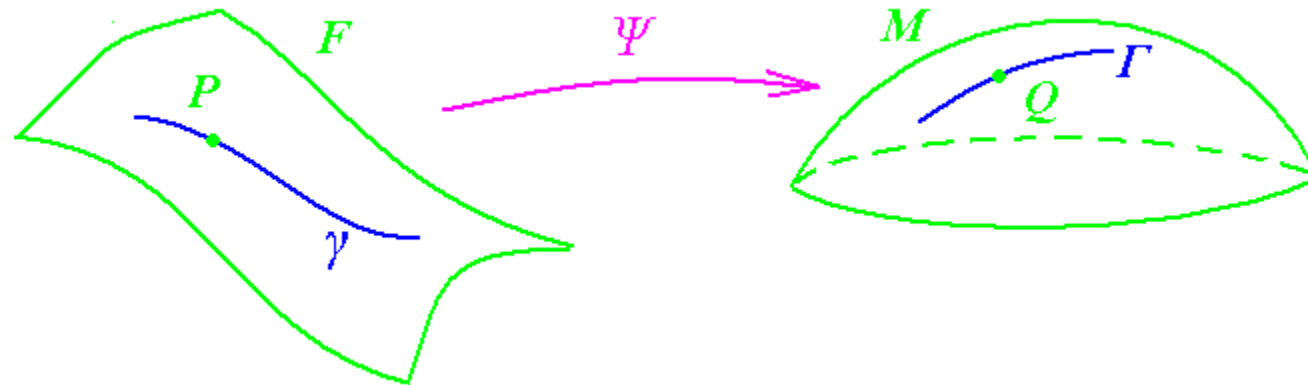
Розглянемо регулярне відображення регулярних поверхонь в \mathbb{R}^3 :

$$\Psi: F \rightarrow M$$

Зафіксуємо точку P на поверхні F та її образ $\Psi(P) = Q$ на поверхні M .

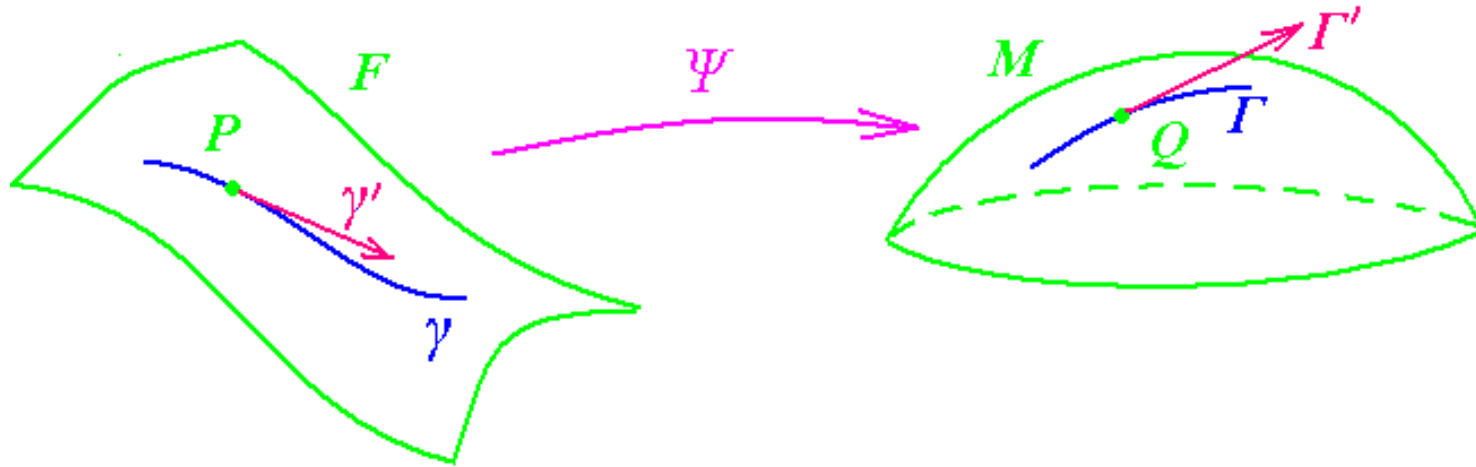
Розглянемо криву $\gamma: (a, b) \rightarrow F$, що проходить через точку P .

Розглянемо відповідну криву $\Gamma = \Psi \circ \gamma: (a, b) \rightarrow M$, що проходить через точку Q .



Розглянемо вектор швидкості γ' кривої γ в точці P і поставимо йому у відповідність вектор швидкості Γ' кривої Γ в точці Q :

$$\gamma'(P) \rightarrow \Gamma'(Q)$$



Оскільки будь-який вектор в дотичній площині $T_P F$ реалізується як вектор швидкості деякої кривої γ , що проходить через точку P , на поверхні F , виникає відображення

$$d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M ,$$

яке називається *диференціалом* відображення Ψ в точці P .

Запишемо, як виглядає відображення $d\Psi_P$ в локальних координатах і проаналізуємо коректність його визначення.

Нехай (u^1, u^2) – локальні координати в околі точки P на поверхні F , і $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ – радіус-вектор поверхні F .

Нехай (v^1, v^2) – локальні координати в околі точки Q на поверхні M , і $\vec{x} = \vec{h}(v^1, v^2)$ – радіус-вектор поверхні M .

Відображення $\Psi: F \rightarrow M$ задається в локальних координатах у вигляді

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(u^1, u^2) \\ v^2 = \psi^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

Крива γ на поверхні F задається в локальних координатах

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}'$$

її вектор швидкості в точці P має вигляд

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\xi^2}{dt}(t_0).$$

Відповідна крива $\Gamma = \Psi(\gamma)$ на поверхні M задається в локальних координатах

$$\begin{cases} v^1 = \psi^1(\xi^1(t), \xi^2(t)) \\ v^2 = \psi^2(\xi^1(t), \xi^2(t)) \end{cases},$$

її вектор швидкості в точці Q має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}_\Gamma}{dt}(t_0) &= \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^1}(v_0^1, v_0^2) \cdot \frac{d\psi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{d\psi^2}{dt}(t_0) = \\ &= \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^1}(v_0^1, v_0^2) \cdot \left(\frac{\partial \psi^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \psi^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^2}{dt}(t_0) \right) + \\ &+ \frac{\partial \vec{h}}{\partial v^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \frac{\partial \psi^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \frac{d\xi^2}{dt}(t_0) \right) \end{aligned}$$

Відображення $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$, яке ставить у відповідність вектори швидкостей $\gamma'(P) \rightarrow \Gamma'(Q)$, представляється у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} \in T_P F \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \psi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \psi^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} \in T_Q M$$

Як наслідок, отримуємо наступну формулу (аналітичне представлення в локальних координатах) для відображення $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

Інваріантність відносно регулярних замін координат

Якщо зробити регулярну заміну координат $u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, $u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ на поверхні F і регулярну заміну координат $v^1 = v^1(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$, $v^2 = v^2(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2)$ на поверхні M , то тоді координати дотичних векторів змінюються згідно з відповідним тензорним законом:

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}_P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{v}^2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^1} & \frac{\partial v^2}{\partial \tilde{v}^2} \end{pmatrix}_Q \cdot \begin{pmatrix} \tilde{X}^1 \\ \tilde{X}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Зауваження.

Відображення $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$ є лінійним відображенням дотичних площин.

Регулярність відображення $\Psi: F \rightarrow M$ в точці P означає, що лінійне відображення $d\Psi_P : T_P F \rightarrow T_Q M$ є невиродженим (ранг цього лінійного відображення дорівнює $\dim T_P F = \dim T_Q M = 2$).

13.3. Перша фундаментальна форма поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в \mathbb{R}^3 , представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F .

Візьмемо в дотичній площині $T_P F$ пару векторів

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

і обчислимо їх скалярний добуток.

Маємо:

$$X = X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), \quad Y = Y^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + Y^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Обчислюємо скалярний добуток (всі обчислення – в точці $P(u_0^1, u_0^2)$):

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \\ &= \langle X^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, Y^1 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} + Y^2 \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \rangle = \\ &= X^1 Y^1 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \rangle + X^1 Y^2 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \rangle + X^2 Y^1 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \rangle + X^2 Y^2 \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \rangle = \\ &= X^1 Y^1 g_{11} + X^1 Y^2 g_{12} + X^2 Y^1 g_{21} + X^2 Y^2 g_{22} \end{aligned}$$

де

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Отже, скалярний добуток векторів

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

в дотичній площині $T_P F$ в точці P обчислюється за формулою

$$\langle X, Y \rangle = X^1 Y^1 g_{11} + X^1 Y^2 g_{12} + X^2 Y^1 g_{21} + X^2 Y^2 g_{22} ,$$

тобто,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i Y^j ,$$

або

$$\langle X, Y \rangle = \begin{pmatrix} X^1 & X^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} ,$$

тут коефіцієнти g_{ij} обчислені в точці $P(u_0^1, u_0^2)$

Визначення. Білінійна диференціальна форма

$$g = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2$$

з коефіцієнтами

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

називається *першою фундаментальною формою* регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$.

Приклад 1. Нехай F – площина з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{c} + u^1 \vec{e}_1 + u^2 \vec{e}_2,$$

натягнута на ортонормовані вектори \vec{e}_1 і \vec{e}_2 . Координати u^1, u^2 – декартові.

Тоді $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, тобто,

$$g = du^1 du^1 + du^2 du^2, \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивості першої фундаментальної форми

1) *Симетричність*: $g_{12} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = g_{21}$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^1 & X^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^1 & Y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$

2) Додатна визначеність:

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle > 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle > 0,$$

$$\det g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} =$$

$$= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = \left| \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \right|^2 > 0$$

Зауваження. Додатна визначеність першої фундаментальної форми еквівалентна регулярності параметрично заданої поверхні.

$$3) \quad \langle d\vec{f}, d\vec{f} \rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} du^2, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} du^2 \right\rangle = g$$

4) *Тензорний закон зміни коефіцієнтів першої фундаментальної форми*

Зробимо регулярну заміну координат на поверхні F :

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}'$$

запишемо радіус-вектор поверхні F в новій системі координат

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$

і обчислимо коефіцієнти першої фундаментальної форми в нових координатах:

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} + \\ &+ \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} = \\ &= g_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + g_{12} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} + g_{21} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^j} + g_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^j} \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо тензорний закон зміни коефіцієнтів першої фундаментальної форми поверхні:

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^2 g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

В матричній формі той же закон записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{g} = J^t \cdot g \cdot J$$

Додатна визначеність і симетричність першої фундаментальної форми не залежать від вибору локальних координат на поверхні (зберігаються при регулярних замінах координат).

Інваріантність скалярного добутку – узгодженість тензорних законів для векторів і для першої фундаментальної форми:

$$\left(\tilde{X}^1 \tilde{X}^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{Y}^1 \\ \tilde{Y}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(X^1 X^2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(X^1 X^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$$

Підсумок

Для будь-якої регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ обчислюється перша фундаментальна форма:

$$g = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2$$

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Геометричний сенс – вона визначає скалярний добуток векторів в дотичній площині в кожній точці на поверхні.

Перспектива

Перша фундаментальна форма поверхні використовується при обчисленні:

- 1) довжини кривих, розташованих на поверхні,
- 2) кута між кривими, що розташовані на поверхні,
- 3) площі області на поверхні.

13.4. Довжина кривої на поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в \mathbb{R}^3 , представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \quad (u^1, u^2) \in D.$$

Розглянемо криву γ на поверхні F , задану у внутрішніх локальних координатах

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b.$$

Обчислимо довжину кривої γ .

Для цього спочатку розглянемо вектор швидкості кривої γ . Як вектор в дотичній площині поверхні F , він має координати

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix}$$

Далі помножимо цей вектор сам на себе скалярно.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} & \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} \\ \frac{d\xi^2}{dt} \end{pmatrix} = \\
& = g_{11} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{21} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\xi^1}{dt} + g_{22} \frac{d\xi^2}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} = \\
& = g_{11} \cdot \left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \cdot \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2
\end{aligned}$$

В цій формулі $g_{ij}=g_{ij}(\xi^1(t), \xi^2(t))$ – це коефіцієнти першої фундаментальної форми поверхні F , обчислені в точках кривої γ .

Як наслідок, довжина вектора швидкості кривої γ дорівнює

$$\sqrt{g_{11} \cdot \left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \cdot \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2} \quad ,$$

а довжина самої кривої γ дорівнює

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11} \cdot \left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \cdot \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2} dt$$

Твердження. Довжина кривої γ на поверхні F , заданої у внутрішніх локальних координатах на поверхні F у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b,$$

обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12} \frac{d\xi^1}{dt} \frac{d\xi^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2} dt,$$

де $g_{ij} = g_{ij}(\xi^1(t), \xi^2(t))$ – це коефіцієнти першої фундаментальної форми поверхні F , обчислені в точках кривої γ .

Зауваження 1. Щоб обчислювати довжину кривих на поверхні, не обов'язково знати радіус-вектор поверхні (як виглядає поверхня в просторі), а потрібно знати лише першу фундаментальну форму поверхні.

Зауваження 2.
$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11} (d\xi^1)^2 + 2g_{12} d\xi^1 d\xi^2 + g_{22} (d\xi^2)^2}$$

Приклад. Розглянемо сферу F радіуса R з радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R \cos u^1 \cos u^2 \\ R \cos u^1 \sin u^2 \\ R \sin u^1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -R \sin u^1 \cos u^2 \\ -R \sin u^1 \sin u^2 \\ R \cos u^1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -R \cos u^1 \sin u^2 \\ R \cos u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо попарні скалярні добутки:

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = R^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = 0,$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = R^2 \cos^2 u^1.$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів першої фундаментальної форми сфери (в «географічних» координатах):

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u^1 \end{pmatrix}$$

Довжина кривої γ на сфері, що задано у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = \xi^1(t) \\ u^2 = \xi^2(t) \end{cases}, \quad a < t < b,$$

дорівнює

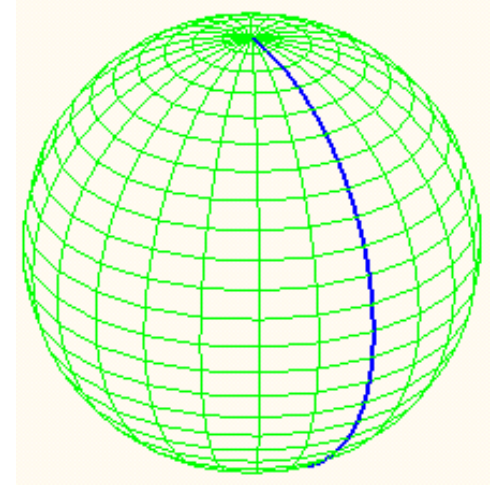
$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{g_{11}(d\xi^1)^2 + 2g_{12}d\xi^1d\xi^2 + g_{22}(d\xi^2)^2} = \\ &= \int_a^b \sqrt{R^2(d\xi^1)^2 + R^2 \cos^2 \xi^1 (d\xi^2)^2} = \\ &= R \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\xi^1}{dt}\right)^2 + \cos^2 \xi^1 \left(\frac{d\xi^2}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Наприклад, довжина координатної кривої γ , заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \alpha \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

на сфері F , дорівнює

$$L = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1)^2 + \cos^2 t (0)^2} dt = \pi R$$

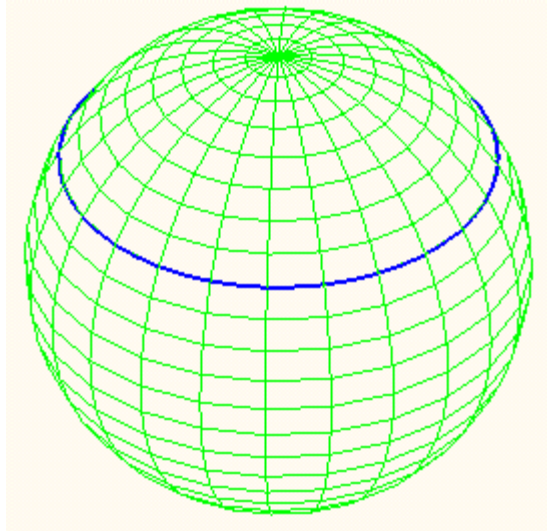


Довжина координатної кривої γ , заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = \beta \\ u^2 = t \end{cases}, \quad -0 < t < 2\pi$$

на сфері F , дорівнює

$$L = R \int_0^{2\pi} \sqrt{(0)^2 + \cos^2 \beta (1)^2} dt = 2\pi R \cos \beta$$

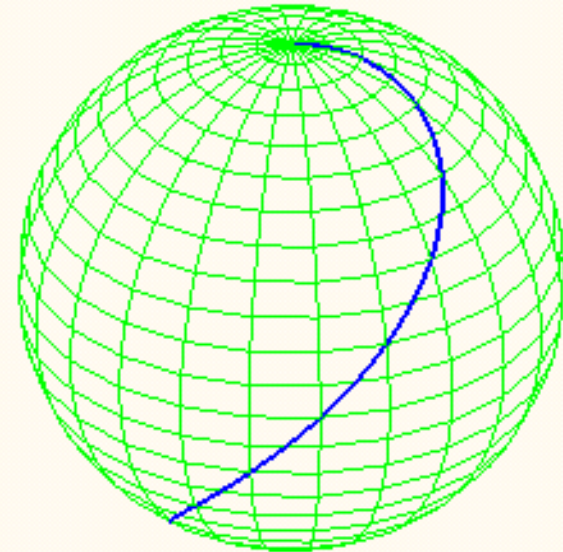
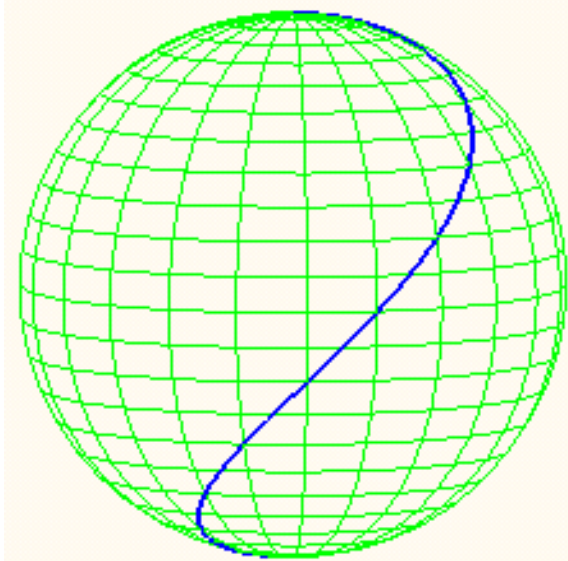


Довжина кривої γ , заданої параметрично

$$\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = t + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

на сфері F , дорівнює

$$L = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1)^2 + \cos^2 t \cdot (1)^2} dt = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt$$



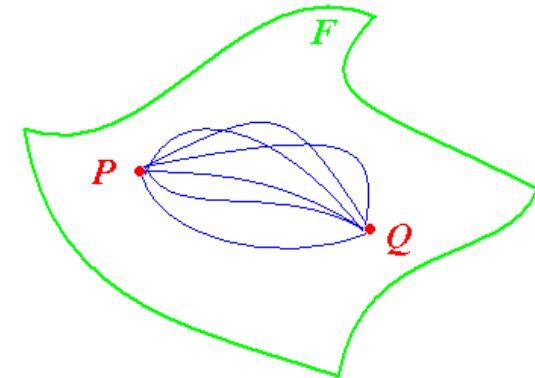
13.4. Регулярні поверхні як метричні простори

Нехай F – регулярна поверхня в \mathbb{R}^3 .

Визначення. Відстанню (внутрішньою відстанню) між точками P і Q на поверхні F називається

$$d(P, Q) = \inf L(\gamma) ,$$

де інфімум береться по множині усіх кусково-регулярних кривих γ , що розташовані на поверхні F і поєднують точки P і Q .



Твердження. Внутрішня відстань d , як функція $F \times F \rightarrow \mathbb{R}$, має наступні властивості:

- 1) $d(P, Q) \geq 0 \quad \forall P, Q \in F$, при цьому $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P=Q$
- 2) $d(P, Q) = d(Q, P) \quad \forall P, Q \in F$
- 3) $d(P, M) + d(M, Q) \geq d(P, Q) \quad \forall P, Q, M \in F$

Отже, кожна регулярна поверхня F з внутрішньою відстанню d представляє собою приклад метричного простору.