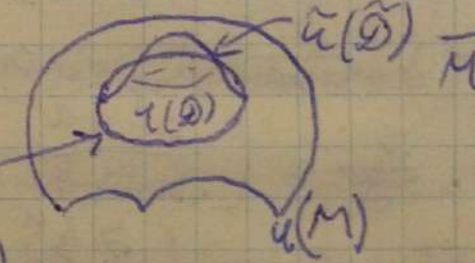
# Мінімальні підмноговиди

(і підмноговиди з паралельним полем середньої кривини)

## Варіації об'єму і мінімальність

**def.** Говорять, що орієнтований підмноговид $(M, \varphi)$ у $(\bar{M}, \bar{g})$ мінімізує об'єм, якщо $\forall$ кубовної $\mathcal{D} \subset M$ і $\forall$ підмноговида $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ у $\bar{M}$ разом з кубовною $\tilde{\mathcal{D}} \subset \tilde{M}$ такого, що $\varphi(\partial \mathcal{D}) = \tilde{\varphi}(\partial \tilde{\mathcal{D}})$

$$\mathrm{Vol}_g(\mathcal{D}) \leq \mathrm{Vol}_{\tilde{g}}(\tilde{\mathcal{D}})$$




(це ріманові об'єми відносно перших фунд. форм $g = \varphi^* \bar{g}$ і $\tilde{g} = \tilde{\varphi}^* \bar{g}$ відп.)

**def.** Варіацією (з компактним носієм) орієнтованого підмноговида $(M, \varphi)$ у $(\bar{M}, \bar{g})$ будемо називати $\sigma \in C^\infty(M \times (-\varepsilon, \varepsilon), \bar{M})$ $(\varepsilon > 0)$ таке, що

- $\exists$ кубовна $\mathcal{D} \subset M$ така, що $\sigma(p, s) = \varphi(p)$ $\forall p \notin \mathrm{Int}\,\mathcal{D}$ (зокрема, $p \in \partial \mathcal{D}$) і $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

– $\sigma(p,0) = \varphi(p) \quad \forall p \in M$.

– $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \varphi_s : M \to \bar{M} : p \mapsto \sigma(p,s)$ – занурення

Rem. Тобто $\forall s$ $(M, \varphi_s)$ – підмноговид (і $\varphi_0 = \varphi$). Нехай $g_s := \varphi_s^* \bar{g}$ – його I ф.ф. Розглянемо функцію

$$s \mapsto \mathrm{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} \qquad (*)$$

$$\overset{\shortparallel}{\int_{\mathcal{D}} dV_{g_s}}$$

(це $dV_{g_s}$ – різн. ф. об'єму $g_s$).

За побудовою, вона гладка (це випливає, наприклад, з підрахунку у лок. коорд.). Як і для варіацій довжини кривої, можна розглянути першу і другу варіації об'єму $\mathcal{D}$:

$$\delta \mathrm{Vol}(\mathcal{D}) := \frac{d}{ds} \mathrm{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) \Big|_{s=0} \quad \text{і}$$

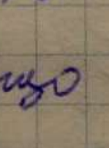
$$\delta^2 \mathrm{Vol}(\mathcal{D}) := \frac{d^2}{ds^2} \mathrm{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) \Big|_{s=0}$$

(для фікс. $\sigma$). За def., якщо $(M, \varphi)$ мінімізує об'єм, то $\forall s$ $\mathrm{Vol}_{g_s}(\mathcal{D}) \geq \mathrm{Vol}_{g_0}(\mathcal{D})$, тобто 0 – точка мінімуму ф-ції $(*)$.

Сл. Якщо $(M, \varphi)$ мінімізує об'єм, то $\forall$ варіації ($\forall D$)
$\delta Vol(D) = 0$ і $\delta^2 Vol(D) \geq 0$.

Якщо для деякої варіації $G : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \bar{M}$ (що $= \varphi$ за межами $Int\, D$ для кубової $D$) $\delta Vol(D) = 0$ і $\delta^2 Vol(D) > 0$, то $\exists\ \varepsilon' > 0 : \forall s \in (-\varepsilon', \varepsilon')$ $Vol_{g_s}(D) \geq Vol_{g_0}(D)$.

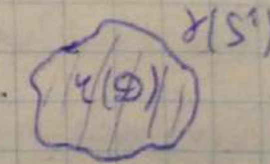
Rem Тобто якщо для $\forall$ варіації $\delta Vol(D) = 0$ і $\delta^2 Vol(D) \geq 0$, то $(M, \varphi)$ мінімізує об'єм "серед близьких підмноговидів", що утворюються з нього за допомогою варіацій з достатньо малими $\varepsilon$. Пор. з задачею пошуку найкоротших у рім. геометрії: навіть якщо друга варіація $\geq 0$, геодезична може не бути найкоротшою "глобально" (гвинтові лінії на циліндрі в $E^3$).



Rem. Умова мінімізації об'єму відповідає поведінці (незамкнених) мильних плівок. Зокрема:

(тобто γ рег. і топ. вклад.?)

**Th.** (Задача Плато; Дуглас[a], Радо, 1930-ті). $\forall$ вкладеної замкненої кривої $\gamma : S^1 \to E^3$ $\exists$ поверхня з межею $(D, \varphi)$ у $E^3$, що мінімізує площу і $\varphi(\partial D) = \gamma(S^1)$.




**Rem.** Це вірно і для нерегулярних кривих і пов-нь.

**Rem.** Детальніше див., наприклад, А. Тужилин, А. Фоменко. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей; T. Colding, W. Minicozzi. A course in minimal surfaces.

**Pr.** $(M, \varphi)$ у $(\overline{M}, \overline{g})$ мінімізує об'єм $\Rightarrow$ його поле середньої кривини $H = 0$.

$\triangleleft$ $M$ орієнтований, далі лок. коорд. у кожному обираємо з атласів, що відповідають орієнтації.

Зауважимо: $\forall$ варіації $\Phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ $\forall$ лок. коорд. $(u^1, \ldots, u^n)$ на $U \subset M$ якщо позначити через $G_s = ((g_s)_{ij})_{i,j=1}^n$ лок. м-цю Грама $g_s$, то $\varphi_s := \sqrt{\det G_s}\sqrt{\det G_0^{-1}}$ не змінюється при переході до інших лок. коорд. $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$ на $\tilde{U}$:

на $U \cap \tilde{U}$ $\quad \tilde{G}_s = C^T G_s C \quad \forall s$, де $C = \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}\right)_{i,j=1}^{n}$ (і $\det C > 0$ з орієнт.), тому $\sqrt{\det \tilde{G}_s} = \det C \sqrt{\det G_s}$; і $\tilde{G}_0^{-1} = C^{-1} G_0^{-1} (C^{-1})^T$, тому $\sqrt{\det \tilde{G}_0^{-1}} = \det C^{-1} \sqrt{\det G_0^{-1}}$. Отже, $\varphi_s : M \to \mathbb{R}$ — коректно визначена (бо $\sqrt{\det \tilde{G}_s}\sqrt{\det \tilde{G}_0^{-1}} = \sqrt{\det G_s}\sqrt{\det G_0^{-1}}$), гладка (у т.ч. за $s$), і

$$dV_{g_s} = \sqrt{\det G_s}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^n = \sqrt{\det G_s}\sqrt{\det G_0^{-1}}\sqrt{\det G_0}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^n = \varphi_s\, dV_{g_0}$$

(на $\forall$ коорд. околі, а отже на $M$). Тому

$$\delta Vol(D) = \frac{d}{ds}\int_D dV_{g_s}\Big|_{s=0} = \int_D \frac{d}{ds}\varphi_s\Big|_{s=0} dV_{g_0}.$$

$\forall p \in M$ оберемо лок. коорд. $(u^1, \dots, u^n)$ на $U \ni p$ так, що на $U$ заданий лок. ортонорм. базис норм. полів $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^{q}$, і $\psi(U) \subset B^N_\delta(\psi(p))$ — кульовий норм. окіл з норм. координатами $(x^1, \dots, x^{n+q})$. Зокрема, у них с. Кр. $\bar{\Gamma}^c_{ab}(\psi(p)) = 0$ $\forall a, b, c$ (дійсно, у норм. коорд. усі $t \mapsto (tv^1, \dots, tv^{n+q})$ —

– геодезичні, тому для них виконуються рівняння

$$0 + \Gamma^a_{bc}(tv^1,\dots,tv^{n+q})\, v^b v^c = 0, \quad a=\overline{1,n+q}$$

При $t=0$ : $\Gamma^a_{bc}(0,\dots,0)\, v^b v^c = 0 \ \forall (v^1,\dots,v^{n+q})$, тобто

$\Gamma^a_{bc} = 0 \ \forall\, a,b,c=\overline{1,n+q}$. Це і є точка $\varphi(p)$ ).

$(0,\dots 0)$

У якості $D$ $(p\in D\subset U)$ оберемо якийсь (відкритий) кубовий окіл $p$ (наприклад, прообраз під дією коорд. відобр. евкл. кулі в $\mathbb{R}^n$)

Нехай $w\in C^\infty(M)$ – якась гладка ф-ція Урисона для $p$ і $M\setminus D$, тобто $\exists$ відкр. $W$ і $V$ такі, що $p\in W$, $\overline{W}\subset V$, $\overline{V}\subset D$, і $w=1$ на $\overline{W}$, $w=0$ на $M\setminus V$ і $w(M)\subset[0,1]$. Визначимо варіацію

$$\sigma(p',s) := \begin{cases} \psi^{-1}\left(x^1(p') + s\,w(p')\,\xi^1_\alpha(p'),\dots,x^{n+q}(p') + s\,w(p')\,\xi^{n+q}_\alpha(p')\right), & p'\in U; \\ \varphi(p'), & p'\notin U \end{cases}$$

$\psi$ – коорд. відобр., що відповідає $(x^1,\dots,x^{n+q})$, $\varepsilon$ обираємо так, щоб було визначене

для якогось $\alpha=\overline{1,q}$, де $(x^1,\dots,x^{n+q})$ – лок. задання $\varphi$, і $\xi_\alpha = \xi^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}$. Тобто локально на $U$ це $\varphi + s\,w\,(\xi^1_\alpha,\dots,\xi^{n+q}_\alpha)$.

За власт. $w$, воно коректно визначене і гладке.

**Втр.** Можна обрати $\varepsilon>0$ так, що $\forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ $\varphi_s=\sigma(\cdot,s)$ — занурення.

Звичайно, за побудовою, $\varphi_0=\sigma(\cdot,0)=\varphi$, і $\sigma(\cdot,s)=\varphi$ за межами $V$ (зокрема, на $\partial D$). Отже, це варіація.

Підрахуємо $\Phi_s$ для такої $\sigma$ на $U$ $\forall i=\overline{1,n}$

$$(\varphi_s)_i=(\varphi_s)_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}+s\frac{\partial w}{\partial u^i}\xi^a_\alpha+sw\frac{\partial \xi^a_\alpha}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Оскільки $\bar\Gamma^c_{ab}(\varphi(p))=0$ $\forall a,b,c$:

$$(\varphi_s)_i(p)=\left(\varphi_i+s\frac{\partial w}{\partial u^i}\xi_\alpha+sw\,\xi_{\alpha,i}\right)(p),$$

тому $\forall i,j=\overline{1,n}$, оскільки $\bar g(\varphi_i,\xi_\alpha)=0$ $\forall i,\alpha$ і за форм. Вейнгартена:

$$(g_s)_{ij}(p)=\bar g_{\varphi(p)}\big((\varphi_s)_i(p),(\varphi_s)_j(p)\big)=\big(\bar g(\varphi_i,\varphi_j)+sw\,\bar g(\varphi_i,\xi_{\alpha,j})+sw\,\bar g(\varphi_j,\xi_{\alpha,i})+s^2\dots\big)(p)\underset{s\to0}{=}\big(g_{ij}-sw\,\bar g(\varphi_i,b^\alpha_{jk}g^{kl}\varphi_l)-sw\,\bar g(\varphi_j,b^\alpha_{ik}g^{kl}\varphi_l)\big)(p)+\bar o(s)=$$

$$=\left[\bar g(\varphi_i,b^\alpha_{jk}g^{kl}\varphi_l)=b^\alpha_{jk}\underbrace{g^{kl}g_{li}}_{\delta^k_i}=b^\alpha_{ji}\text{ — сим. за } i,j\right]=$$

$$\underset{s\to0}{=}g_{ij}(p)-2s\,w(p)\,b^\alpha_{ij}(p)+\bar o(s).$$

Зауважимо, що $w(p)=1$

Але цей вираз не залежить від лок. коорд на $\overline{M}$. Отже, і для будь-якої точки $U$, обравши норм. коорд. на околі її образа, отримаємо те ж:

$$(g_s)_{ij} \underset{s\to 0}{=} g_{ij} - 2s\varpi b^{\alpha}_{ij} + \bar{o}(s) \quad \text{на } U \quad \forall\, i,j=\overline{1,n}.$$

Звідси і за властивостями det на $U$

$$\det G_s \underset{s\to 0}{=} \det\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn}\end{pmatrix} - 2s\varpi\left(\det\begin{pmatrix} b^{\alpha}_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b^{\alpha}_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn}\end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1\,n-1} & b^{\alpha}_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{n\,n-1} & b^{\alpha}_{nn}\end{pmatrix}\right) + \bar{o}(s) \underset{s\to 0}{=} \det G_0 - 2s\varpi b^{\alpha}_{ij} \underbrace{g^{ij}\det G_0}_{\text{алгебраїчне доповнення до } g_{ij}} + \bar{o}(s).$$

Отже,

$$\det G_s \det G_0^{-1} \underset{s\to 0}{=} 1 - 2s\varpi b^{\alpha}_{ij} g^{ij} + \bar{o}(s) = 1 - 2ns\varpi\, \bar{g}(H,\xi_\alpha) + \bar{o}(s).$$

Корінь: $\varphi_s|_U \underset{s\to 0}{=} 1 - ns\varpi\, \bar{g}(H,\xi_\alpha) + \bar{o}(s)$.

Тоді на $U$ $\frac{d}{ds}\varphi_s|_{s=0} = -n\varpi\, \bar{g}(H,\xi_\alpha)$ (і $0$ за межами $U$ за побудовою варіації). Отже,

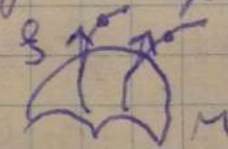
$$\delta \mathrm{Vol}(D) = \int_D \frac{d}{ds}\varphi_s|_{s=0}\, dV_{g_0} = -n\int_D \varpi\, \bar{g}(H,\xi_\alpha)\, dV_{g_0}.$$

$\neg$ $H_p \neq 0$. Оскільки $\{(\xi_\alpha)_p\}_{\alpha=1}^{q}$ - базис $N_pM$, $\exists \alpha : \bar{g}(H,\xi_\alpha) \neq 0$ і зберігає знак на околі $U \ni p$. Зменшивши за необхідності $U$ і побудувавши $\varpi$ як вище, отримаємо $\delta\mathrm{Vol}(D) \neq 0$ (ф.у. $\varpi: M\to[0,1]$ і $=1$ в $p$) ↯ ▲

Rem. Можна було брати варіацію і як для кривих:

$G(p,s) = \exp_{r(p)}\left(s\,\varpi(p)\,\xi_p\right)$ (де $\exp$ – експ. відобр. $(\bar{M}, \bar{g})$)

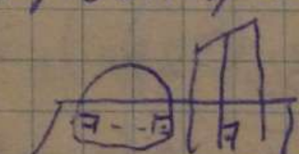
для норм. поля $\xi$, тобто випускаючи у напрямку $\xi$ геодезичні з точок $r(p)$.




Впр. Як виглядає тут ф-ла першої варіації?
(у $E^{n+q}$ це просто $r + s\varpi\xi$, як у нас).

Def. Підмноговид $(M, r)$ зветься мінімальним, якщо $H=0$.

Rem. Це означення застосовують і для неорієнтовних підмноговидів.

Ex. 1. У цілком геодезичних підмноговидів $B=0$, тому і $H=0$. Зокрема, це афф. підпростори $E^{n+q}$, великі сфери у $S^{n+q}$, підмн. вигляду  у гіперболічному просторі $H^{n+q}$ (і це усі повні зв. вкладені цілком геод. у них)

2. Гелікоїд у $E^3$: $r:\mathbb{R}^2\to E^3$: $r(u^1,u^2)=(u^1\cos u^2, u^1\sin u^2, au^2)$
(див. також узагальнений гелікоїд з Ex. вище)

3. Катеноїд у $E^3$: $r:\mathbb{R}\times S^1\to E^3$: $(u^1, e^{iu^2})\mapsto(\operatorname{ch}u^1\cos u^2, \operatorname{ch}u^1\sin u^2, au^1)$
(пов. обертання ланцюгової лінії). Це повні вкл. мін. поверхні у $E^3$.

4. Тори Кліфорда $r: T^n\to S^{2n-1}\subset E^{2n}$ - мін. у $S^{2n-1}$ (див. вище):
$\rho\circ r: (e^{iu^1},\dots,e^{iu^n})\mapsto\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cos u^1, \frac{1}{\sqrt{n}}\sin u^1,\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\cos u^n,\frac{1}{\sqrt{n}}\sin u^n\right)$, де $\rho: S^{2n-1}\to E^{2n}$ - вкладення - компактні мін. підмноговиди у $S^{2n-1}$ (але не у $E^{2n}$)

Тор Кліффорда у $S^3$: $\varphi: T^2 \to S^3$. Доповнюємо це стандартним вкладенням $\rho: S^3 \to E^4$. $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{iu^1}, e^{iu^2})\}$

У цих лок. координатах

$(\rho \circ \varphi)(u^1, u^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u^1, \sin u^1, \cos u^2, \sin u^2)$.

Оскільки в точках $(\rho\circ\varphi)(T^2)$ $\sum_{a=1}^{4}(x^i)^2 = 1$, це дійсно задає $\varphi: T^2 \to S^3$.

Далі ототожнюємо $T_q\mathbb{R}^4$ з $\mathbb{R}^4$. Зокрема, для $i=1,2$ у $p\in T^2$ з коорд. $(u^1, u^2)$

$d_{\varphi(p)}\rho(\varphi_i^{(p)}) = d_{\varphi(p)}\rho\left(d_p\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right) = d_p(\rho\circ\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = (\rho\circ\varphi)_i$

$d\rho(\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin u^1, \cos u^1, 0, 0)$,

$d\rho(\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\sin u^2, \cos u^2)$.

Якщо $g$ і $\bar{g}$ – I фунд. форми $(T^2, \varphi)$ і $(S^3, \rho)$ відп., то для $i, j = 1, 2$:

$g_{ij} = \bar{g}(\varphi_i, \varphi_j) = \langle d\rho(\varphi_i), d\rho(\varphi_j) \rangle$. Тому

$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{2}$, $g_{12} = 0 \ (= g_{21})$.

Зокрема, $T^2$ з м-ною $g = \frac{1}{2}\left((du^1)^2 + (du^2)^2\right)$ плаский (ізометричний локально $E^2$). Крім того, оскільки $\varphi_1$ і $\varphi_2$ лін. незалежні, це занурення (і вкладення, бо ін'єкт., а $T^2$ компактний).

Оскільки при ототожненні дот. просторів $\mathbb{R}^m$ з $\mathbb{R}^m$ для станд. гіперсфери $S^{m-1} \xrightarrow{\rho} E^m$ маємо $d_q\rho(T_q S^{m-1}) = \rho(q)^\perp \ \forall q \in S^{m-1}$ (бо, диференціюючи $\langle \rho, \rho \rangle = 1$, отримуємо $\langle d\rho(X), \rho \rangle = 0 \ \forall$ поля $X$ на сфері), для $p(u^1, u^2) \in T^2$:

$$d_{\psi(p)}\rho\left(T_{\psi(p)}S^3\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos u^1, \sin u^1, \cos u^2, \sin u^2\right)^{\perp}$$

Значення одиничного норм. поля $\xi$ (точніше $d\rho(\xi)$) повинні належати сюди, крім того, $\langle d\rho(\xi), d\rho(\xi)\rangle = \bar{g}(\xi, \xi) = 1$, і $\langle d\rho(\psi_i), d\rho(\xi)\rangle = \bar{g}(\psi_i, \xi) = 0$ для $i = 1, 2$. Тому у якості такого (глобального) поля можна взяти, наприклад,

$$d\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos u^1, \sin u^1, -\cos u^2, -\sin u^2\right).$$

Нехай $\nabla$, $\bar{\nabla}$ і $\bar{\bar{\nabla}}$ – рім. зв'язності $g$, $\bar{g}$ і евкл. м-ки $E^4$ відповідно; $b$, $\bar{b}$ – (скалярні) II фунд. форми $(T^2, \psi)$ і $(S^3, \rho)$ відп. Для полів $X$ і $Y$ на $T^2$ два рази запишемо розкладення Гаусса:

$$\bar{\bar{\nabla}}_X Y = d\rho(\bar{\nabla}_X Y) + \bar{b}(d\psi(X), d\psi(Y))\rho\circ\psi = d\rho(d\psi(\nabla_X Y)) +$$
$$+ d\rho(b(X,Y)\xi) + \bar{b}(d\psi(X), d\psi(Y))\rho\circ\psi,$$

де $\rho\circ\psi$ виконує роль норм. поля $S^3$ у $E^4$. Тому

$$b(X,Y) = \langle \overline{\overline{\nabla}}_X Y,\ d\rho(\xi) \rangle.$$

Для $X = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$ $\overline{\overline{\nabla}}_X Y = (\rho\circ\varphi)_{ij}$ (бо зв'язність пласка).

$(\rho\circ\varphi)_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u^1, -\sin u^1, 0, 0)$, $(\rho\circ\varphi)_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\cos u^2, -\sin u^2)$;

$(\rho\circ\varphi)_{12} = (\rho\circ\varphi)_{21} = 0$. Домножуючи на $d\rho(\xi)$, отримуємо:

$$b_{11} = -\frac{1}{2} = -b_{22},\quad b_{12} = b_{21} = 0.$$

Оскільки $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тому середня кривина

$H = \frac{1}{2} b_{ij} g^{ij} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) = 0$. Поверхня мінімальна.

<u>Впр.</u> Чи буде мінімальним тор Кліффорда $\varphi: T^n \to S^{2n-1}$:

$(\rho\circ\varphi)(u^1, \dots, u^n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\cos u^1, \sin u^1, \dots, \cos u^n, \sin u^n)$

(це $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n} = \{(e^{iu^1}, \dots, e^{iu^n})\}$, $S^{2n-1} \xrightarrow{\rho} E^{2n}$).

<u>Тп.</u> (Гіпотеза Лоусона; Брендле, 2012) Єдине (з точністю до еквівалентності підмноговидів і рухів $S^3$) мінімальне вкладення $T^2$ у $S^3$ – це тор Кліффорда.

Rem. Еквівалентність $(M, \varphi)$ і $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ - це дифео-зм $F:$
$M \to \tilde{M}$ такий, що $\tilde{\varphi} \circ F = \varphi$.

Впр. Показати, що $\varphi: T^2 \to S^3$, що задається (у позначеннях, як у Ex. 4.)
$(\rho \circ \varphi)(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2, \cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^1 \sin u^2)$ - тоже тор Кліффорда у цьому сенсі.