Задача 0. Розглянемо площину $F \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = u^2 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

Знайти першу фундаментальну форму

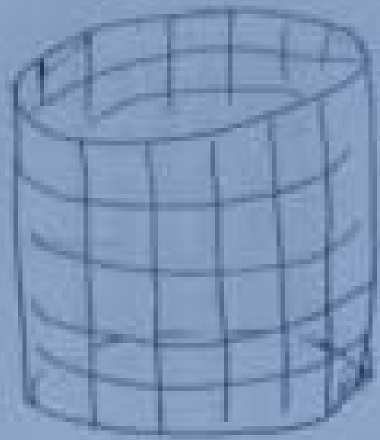
Розв'язання. $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \right\rangle = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\rangle = 1$$

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1. Розглянемо круговий циліндр $F \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x^1 = R\cos\frac{u^1}{R} \\ x^2 = R\sin\frac{u^1}{R}, \quad (u^1,u^2)\in\mathbb{R}^2 \\ x^3 = u^2 \end{cases}$$



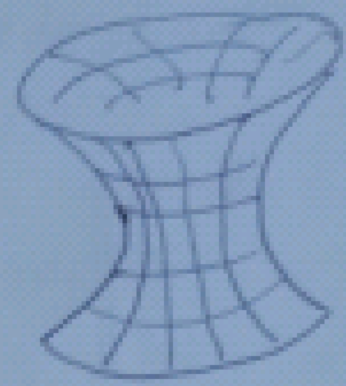
Знайти першу фундаментальну форму

Розв'язання: $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{u^1}{R} \\ \cos\frac{u^1}{R} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \right\rangle = 1, \quad g_{12} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right\rangle = 1$$

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3 Розглянемо катеноїд $F \subset \mathbb{R}^3$



$$\begin{cases} x^1 = \operatorname{ch} u^1 \cos u^2 \\ x^2 = \operatorname{ch} u^1 \sin u^2 \\ x^3 = u^1 \end{cases}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

Знайти першу фундаментальну форму

Розв'язання. $\vec{r} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u^1 \cos u^2 \\ \operatorname{ch} u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}, \quad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u^1 \cos u^2 \\ \operatorname{sh} u^1 \sin u^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} u^1 \sin u^2 \\ \operatorname{ch} u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

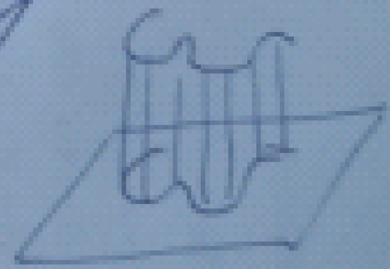
$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \right\rangle = \operatorname{ch}^2 u^1, \quad g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\rangle = \operatorname{ch}^2 u^1$$

$$g = \operatorname{ch}^2 u^1 \cdot \left((du^1)^2 + (du^2)^2 \right), \quad g = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 u^1 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 u^1 \end{pmatrix}$$

Задача 4 Розглянемо циліндричну поверхню $F \subset \mathbb{R}^3$, базова крива якої лежить в площині, перпендикулярній прямолінійним твірним:

$$\vec{r} = \vec{\rho}(t) + v \cdot \vec{e}$$

Знайти першу фундаментальну форму



Розв'язання: $\vec{r}(t,v) = \vec{\rho}(t) + v \cdot \vec{e}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{e}$$

$$g_{11} = \left\langle \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right\rangle, \quad g_{12} = \left\langle \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \vec{e} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle$$

Якщо t - натуральний параметр на базовій кривій, то $g_{11} = 1$

Якщо $\vec{e}$ - одиничний вектор, то $g_{22} = 1$

$$g = (dt)^2 + (dv)^2, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 5 Нехай поверхня $F \subset \mathbb{R}^3$ має першу фундаментальну форму $g = (du^1)^2 + (du^2)^2$

Зробимо регулярну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases}, \quad \tilde{u}^1 > 0, \ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi$$

Як виглядатиме перша фундаментальна форма в нових координатах?

Розв'язання I спосіб)

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{u}^2 & \sin \tilde{u}^2 \\ -\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 & \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{u}^2 & -\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \\ \sin \tilde{u}^2 & u^1 \cos \tilde{u}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\tilde{u}^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$g = (d\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^1)^2 (d\tilde{u}^2)^2, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\tilde{u}^1)^2 \end{pmatrix}$$

Задача 5 Нехай поверхня $F \subset \mathbb{R}^3$ має першу фундаментальну форму $g = (du^1)^2 + (du^2)^2$

Зробимо регулярну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases}, \quad \tilde{u}^1 > 0, \ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi$$

Як виглядатиме перша фундаментальна форма в нових координатах?

Розв'язання I спосіб)

$$du^1 = d\tilde{u}^1 \cdot \cos \tilde{u}^2 - \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \, d\tilde{u}^2$$

$$du^2 = d\tilde{u}^1 \cdot \sin \tilde{u}^2 + u^1 \cos \tilde{u}^2 \, d\tilde{u}^2$$

$$(du^1)^2 + (du^2)^2 = (d\tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 - \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \, d\tilde{u}^2)^2 + (d\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 + u^1 \cos \tilde{u}^2 \, d\tilde{u}^2)^2 =$$

$$= \ldots\ldots = (d\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^1)^2 (d\tilde{u}^2)^2$$

Задача 6 Нехай поверхня $F\subset\mathbb{R}^3$ має п. ф. форму

$$g=ch^2u^1(du^1)^2+ch^2u^1(du^2)^2$$

Зробимо заміну координат

$$\begin{cases}\tilde{u}^1=sh\,u^1\\ \tilde{u}^2=u^2\end{cases}$$

Запишіть п. ф. форму поверхні в нових координатах.

Розв'язання: I спосіб)

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^1}\\ \frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12}\\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\tilde{u}^1}{\partial u^2}\\ \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\tilde{u}^2}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ch^2u^1 & 0\\ 0 & ch^2u^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ch\,u^1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12}\\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ch\,u^1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ch^2u^1 & 0 \\ 0 & ch^2u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} chu^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} chu^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{chu^1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch^2u^1 & 0 \\ 0 & ch^2u^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{chu^1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ch^2u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+(\tilde{u}^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$g = (d\tilde{u}^1)^2 + \left(1+(\tilde{u}^1)^2\right)(d\tilde{u}^2)^2$$

* Чи можна придумати заміну координат $\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$, після якої $g = (d\tilde{u}^1)^2 + (d\tilde{u}^2)^2$, тобто $\begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 7 На поверхні $\Gamma^2 \subset \mathbb{R}^3$ з першою фундаментальною формою $g=(du^1)^2+(du^2)^2$ знайти довжину кривої γ, заданої у вигляді $\begin{cases} u^1=t \\ u^2=t \end{cases}$, $a<t<b$

Розв'язання I спосіб)

$$\begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \frac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(b-a)$$

II спосіб) $L = \int_a^b \sqrt{(du^1)^2+(du^2)^2} = \int_a^b \sqrt{(dt)^2+(dt)^2} = \int_a^b \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(b-a)$

Задача 8 На поверхні $F \subset \mathbb{R}^3$ з першою фундаментальною формою $g=(du^1)^2+(u^1)^2(du^2)^2$ знайти довжину кривої $\gamma: \begin{cases} u^1=r \\ u^2=t \end{cases}, t \in (0,2\pi)$ і кривої $\Gamma: \begin{cases} u^1=e^t \\ u^2=t \end{cases}, t \in (0,2\pi)$

Розв'язання

$$L(\gamma_1)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(du^1)^2+(u^1)^2(du^2)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{(0)^2+r^2(dt)^2}=r\int_0^{2\pi}dt=2\pi r$$

$$L(\gamma_2)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(e^t dt)^2+(e^t)^2(dt)^2}=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}e^t dt=\sqrt{2}\,(e^{2\pi}-1)$$

Задача 9. На поверхні $F^2 \subset R^3$ з першою фундаментальною формою $g = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\,du^1 du^2$ в
Обчислити довжину координатних ліній

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = u_0^2 \end{cases}, \ a < t < b \quad і \quad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = u_0^1 \\ u^2 = t \end{cases}, \ c < t < d$$

Розв'язання:

$$l(\gamma_1) = \int_a^b \sqrt{g_{11}(\underbrace{du^1}_{dt})^2 + 2g_{12}\underbrace{du^1}_{dt}\underbrace{du^2}_{0} + g_{22}(\underbrace{du^2}_{0})^2} = \int_a^b \sqrt{g_{11}(t, u_0^2)} \cdot dt$$

$$l(\gamma_2) = \int_c^d \sqrt{g_{11}(\underbrace{du^1}_{0})^2 + 2g_{12}\underbrace{du^1}_{0}\underbrace{du^2}_{dt} + g_{22}(\underbrace{du^2}_{dt})^2} = \int_c^d \sqrt{g_{22}(u_0^1, t)}\, dt$$

Задача 10. На поверхні $F^2 \subset \mathbb{R}^3$ з першою фундаментальною формою $g = \frac{1}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$ знайти довжину кривих

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = u_0 = const \\ u^2 = t \end{cases}, \quad 0 < a < t < b$$

і

$$\gamma_2 : \begin{cases} u^1 = c + r \cdot \cos t \\ u^2 = r \cdot \sin t \end{cases}, \quad 0 < \alpha < t < \beta < \pi$$

Розв'язання

$$l(\gamma_1) = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{t^2}(0)^2 + \frac{1}{t^2}(dt)^2} = \int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \ln b - \ln a$$

$$l(\gamma_2) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{1}{r^2 \sin^2 t}(r \sin t\, dt)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 t}(r \cos t\, dt)^2} =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sin t}\,dt = \ldots$$