Варіант 0

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{so}(3)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & -a & 0 & b \\ 0 & -c & -b & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SO(4)$, $H \cong SO(3)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину К(e_4, e_5) простору G/H у напрямку площини, що породжена e_4, e_5, використавши нормальність G/H.

Варіант 1

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(1)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ai \end{pmatrix},$$

де $a \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1 є базисним для $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H \cong U(1)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину К(e_2, e_3) простору G/H у напрямку площини, що породжена e_2, e_3, використавши нормальність G/H.

Варіант 2

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SO(4)$, $H \cong SO(2) \times SO(2)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину К (e_3, e_4) простору G/H у напрямку площини, що породжена e_3, e_4, використавши нормальність G/H.

Варіант 3

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & 0 \\ 0 & bi \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(2)$, $H \cong U(1) \times U(1)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину К (e_3, e_4) простору G/H у напрямку площини, що породжена e_3, e_4, використавши нормальність G/H.

Варіант 4

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{u}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & b+ci & 0 \\ -b+ci & di & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3, e_4 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H \cong U(2)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $\mathrm{K}\,(e_5, e_6)$ простору G/H у напрямку площини, що породжена e_5, e_6, використавши нормальність G/H.

Вариант 5

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{su}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & b+ci & 0 \\ -b+ci & -ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SU(3)$, $H \cong SU(2)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $\mathrm{K}\,(e_4, e_5)$ простору G/H у напрямку площини, що породжена e_4, e_5, використавши нормальність G/H.

Варіант 6

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{su}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & b+ci & 0 \\ -b+ci & -ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H \cong U(2)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $\mathrm{K}\,(e_4, e_5)$ простору G/H у напрямку площини, що породжена e_4, e_5, використавши нормальність G/H.

Варіант 7

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(3)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} ai & 0 & 0 \\ 0 & bi & c+di \\ 0 & -c+di & ei \end{pmatrix},$$

де $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = U(3)$, $H \cong U(1) \times U(2)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $\mathrm{K}\,(e_6, e_7)$ простору G/H у напрямку площини, що породжена e_6, e_7, використавши нормальність G/H.

Варіант 8

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{so}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix},$$

де $a \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1 є базисним для $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SO(4)$, $H \cong SO(2)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $\mathrm{K}(e_2, e_3)$ простору G/H у напрямку площини, що породжена e_2, e_3, використавши нормальність G/H.

Варіант 9

Дана алгебра Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4)$ та її підалгебра Лі $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2)$, що складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

- Перевірити, що $\mathfrak{h}$ – дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g}$.
- Обрати базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ортонормований відносно інваріантного скалярного добутку $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}Tr(xy)$ і такий, що e_1, e_2 утворюють базис $\mathfrak{h}$.
- Нехай $G = SO(4)$, $H \cong SO(2) \times SO(2)$ – зв'язні групи Лі з алгебрами Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. Введемо на однорідному просторі G/H інваріантну метрику, що породжена скалярним добутком з попереднього пункту. Обчислити секційну кривину $\mathrm{K}(e_3, e_4)$ простору G/H у напрямку площини, що породжена e_3, e_4, використавши нормальність G/H.