807(10) - ан-но 807(5)

1046(3) - ан-но 1046(4)

1046(10) - теж, але можемо розібрати:

$$x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10xz+2x+4y-10z-1=0$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\2&-2&2\\-5&2&1\end{pmatrix}$$

Власні значення:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-5\\2&-2-\lambda&2\\-5&2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\big((-2-\lambda)(1-\lambda)-4\big)-2\big(2(1-\lambda)+10\big)-5\big(4+5(-2-\lambda)\big)=0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)-4+4\lambda-4+4\lambda-20-20+50+25\lambda=0$$

$$-\lambda^3+\cancel{\lambda^2}-\cancel{\lambda^2}+\lambda+2\lambda-\cancel{2}+33\lambda+\cancel{2}=0$$

$$\lambda^3-36\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-6)(\lambda+6)=0.$$

$\lambda_1=6,\ \lambda_2=-6,\ \lambda_3=0.$

Власний вектор $a_1=\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}-5&2&-5\\2&-8&2\\-5&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-5\lambda+2\mu-5\nu=0\\ \lambda-4\mu+\nu=0\end{cases}$$ 5·

$-18\mu=0 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow \lambda+\nu=0 \Rightarrow a_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Для $a_2=\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

$$-\left(\begin{cases} 7\lambda + 2\mu - 5\nu = 0 \\ \lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ -5\lambda + 2\mu + 7\nu = 0 \end{cases}\right.$$

$$12\lambda - 12\nu = 0 \Rightarrow \lambda = \nu \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}(\lambda + \nu) = -\lambda \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = [a_1, a_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, -1)$$

Перетворення коорд.:

$$\boxed{\left(i \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} : \begin{cases} x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{3}} - \frac{\tilde{z}}{\sqrt{6}} \\ y = -\frac{\tilde{y}}{\sqrt{3}} - \frac{2\tilde{z}}{\sqrt{6}} \\ z = -\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{3}} - \frac{\tilde{z}}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Підставляємо:

$$\underset{\lambda_1}{6\tilde{x}^2} - \underset{\lambda_2}{6\tilde{y}^2} + \underset{\lambda_3}{0 \cdot \tilde{z}^2} + 2\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{3}} - \frac{\tilde{z}}{\sqrt{6}}\right) + 4\left(-\frac{\tilde{y}}{\sqrt{3}} - \frac{2\tilde{z}}{\sqrt{6}}\right) -$$

$$-10\left(-\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{3}} - \frac{\tilde{z}}{\sqrt{6}}\right) - 1 = 0$$

$$6\tilde{x}^2 - 6\tilde{y}^2 + 6\sqrt{2}\,\tilde{x} - 4\sqrt{3}\,\tilde{y} - 1 = 0$$

$$6\left(\tilde{x}^2 + \sqrt{2}\,\tilde{x} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot 6 - 6\left(\tilde{y}^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\cdot 6 - 1 = 0$$

$$6\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6\left(\tilde{y} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2$$

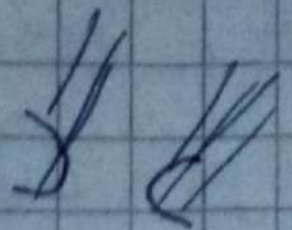
Канонічні коорд.:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{y} = \tilde{\tilde{y}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tilde{z} = \tilde{\tilde{z}} \end{array}$$

Канонічне рівняння:

$$3\tilde{\tilde{x}}^2 - 3\tilde{\tilde{y}}^2 = 1$$

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{\frac{1}{3}} - \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{\frac{1}{3}} = 1$$



Гіперболічний циліндр.

Перетворення:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{\tilde{y}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Канон. с.к.: початок $\left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$, базис $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

1045 (1)

$$x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8xz-14x-4y+14z+18=0$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Власні значення:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -4\\ 2 & -2-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\big((-2-\lambda)(1-\lambda)-4\big)-2\big(2(1-\lambda)-8\big)-4\big(-4+4(-2-\lambda)\big)=0$$

$$-(1-\lambda)^2(2+\lambda)-4+4\lambda-4+4\lambda+16+16+32+16\lambda=0$$

$$-(\lambda^2-2\lambda+1)(2+\lambda)+24\lambda+56=0$$

$$-\lambda^3-\cancel{2\lambda^2}+\cancel{2\lambda^2}+4\lambda-\lambda-2+24\lambda+56=0$$

$$\lambda^3-27\lambda-54=0.$$

$54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3$. $\lambda = \pm 1, \pm 2, 3$ не підходять,

-3 підходить: $-27 + 81 - 54 = 0$.

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 27\lambda - 54 & \lambda + 3 \\
\cline{2-2}
\underline{\lambda^3 + 3\lambda^2} & \lambda^2 - 3\lambda - 18 \\
\quad -3\lambda^2 - 27\lambda - 54 & \\
\quad \underline{-3\lambda^2 - 9\lambda} & \\
\qquad\quad -18\lambda - 54 & \\
\qquad\quad \underline{-18\lambda - 54} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Інші корені: $\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{9 + 72}\right) = \frac{1}{2}(3 \pm 9)$$

Отже, власні значення:

$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$.

a_1, a_2 – власні вектори, що відповідають $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Шукаємо їх як (λ, μ, ν):

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

Всі три рівняння пропорційні:

$$2\lambda + \mu - 2\nu = 0.$$

Отже, такі вектори утворюють 2-вимірний підпростір (площину) з вектором нормалі $(2, 1, -2)$. Він повинен бути колінеарний a_3.

Оберемо якийсь такий вектор у якості a_1. Скажімо, при $\mu = 0$ маємо $\lambda = \nu$, і після нормування $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Переконаємося, що a_3 дійсно колінеарний $(2,1,-2)$: для $a_3 = \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-5 & 2 & -4\\ 2 & -8 & -2\\ -4 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = 0$$

$$+\left(\begin{cases} -5\lambda + 2\mu - 4\nu = 0\\ 2\lambda - 8\mu - 2\nu = 0\\ -4\lambda - 2\mu - 5\nu = 0\end{cases}\right.$$

$$-9\lambda - 9\nu = 0 \Rightarrow \lambda = -\nu,\ \mu = \frac{1}{2}(-4\lambda - 5\nu) = \frac{\lambda}{2}.$$

Тому дійсно після нормування $a_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Тоді з умови ортонормованості і додатної орієнтованості $\{a_1, a_2, a_3\}$:

$$a_2 = [a_3, a_1] = \begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$= \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, -1)$. Він дійсно $\perp a_3, a_1$ і міститься у власній площині для $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Перетворення:
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3\end{array}\end{array}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \dfrac{2\tilde{z}}{3} \\ y = -\dfrac{4\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \dfrac{\tilde{z}}{3} \\ z = \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} - \dfrac{2\tilde{z}}{3} \end{cases}$$

Підставляємо:

$$\underset{\lambda_1}{-3\tilde{x}^2} \underset{\lambda_2}{-3\tilde{y}^2} \underset{\lambda_3}{+6\tilde{z}^2} - 14\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \frac{2\tilde{z}}{3}\right) -$$

$$-4\left(-\frac{4\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \frac{\tilde{z}}{3}\right) + 14\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} - \frac{2\tilde{z}}{3}\right) + 18 = 0$$

$$-3\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 - 2\sqrt{2}\,\tilde{y} - 20\tilde{z} + 18 = 0$$

$$-3\tilde{x}^2 - 3\left(\tilde{y}^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\tilde{y} + \frac{2}{9}\right) + \frac{2}{3} + 6\left(\tilde{z}^2 - \frac{10}{3}\tilde{z} + \frac{25}{9}\right) -$$

$$-\frac{50}{3} + 18 = 0$$

$$-3\tilde{x}^2 - 3\left(\tilde{y} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 6\left(\tilde{z} - \frac{5}{3}\right)^2 + 2 = 0$$

Канонічні коорд.:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} \\ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} + \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} - \dfrac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{y} &= \tilde{\tilde{y}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \tilde{z} &= \tilde{\tilde{z}} + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Канонічне рівняння:

$$3\tilde{\tilde{x}}^2 + 3\tilde{\tilde{y}}^2 - 6\tilde{\tilde{z}}^2 = 2$$

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{\frac{2}{3}} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{\frac{2}{3}} - \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Однопорожнинний гіперболоїд обертання.

Перетворення: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \tilde{\tilde{z}} + \frac{5}{3} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} + \frac{10}{9} \\ \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} - \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Канонічна с.к.: початок $O(1,1,-1)$ (центр гіперболоїда), базис $\{a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), a_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right), a_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\}$. При цьому a_3 є напрямним вектором осі симетрії гіперболоїда.

1046(1)

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Власні значення:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\left((1-\lambda)(4-\lambda)-4\right) - (-2)\left(-2(4-\lambda)+8\right) - 4\left(-4+4(1-\lambda)\right) = 0$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) - 16 + 4\lambda - \cancel{16} + 4\lambda + \cancel{16} + \cancel{16} - \cancel{16} + 16\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda^2 - \cancel{20\lambda} - \cancel{4\lambda} + \cancel{16} + \cancel{24\lambda} - \cancel{16} = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda - 9) = 0$$

$$\lambda_1 = 9, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Для власного вектора $a_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

$$+\left(\begin{cases} 5\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu - \nu = 0 \\ 4\lambda - 2\mu + 5\nu = 0 \end{cases}\right.$$

$$9\lambda + 9\nu = 0 \Rightarrow \nu = -\lambda \Rightarrow \mu = -\frac{1}{4}(\lambda - \nu) = -\frac{\lambda}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Для a_2 і a_3, що відповідають 0:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

Знову ж, залишається одне рівняння:

$$2\lambda - \mu - 2\nu = 0.$$

Це площина з вектором нормалі a_1 (як і повинно бути). Знайдемо в ній якийсь вектор. Наприклад, при $\mu = 0$: $\lambda - \nu = 0$, $\lambda = \nu$, після нормування $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Тоді

$$a_3 = [a_1, a_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, -4, 1)$$

Перетворення координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$
$$\qquad\quad a_1 \quad\ a_2 \quad\ a_3$$

$$: \quad \begin{cases} x = \frac{2\tilde{x}}{3} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2}} - \frac{\tilde{z}}{3\sqrt{2}} \\ y = -\frac{\tilde{x}}{3} - \frac{4\tilde{z}}{3\sqrt{2}} \\ z = -\frac{2\tilde{x}}{3} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{z}}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

Підставимо:

$$\underset{\lambda_1}{9}\tilde{x}^2 + \underset{\lambda_2}{0}\cdot\tilde{y}^2 + \underset{\lambda_3}{0}\cdot\tilde{z}^2 - 28\left(\frac{2\tilde{x}}{3} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2}} - \frac{\tilde{z}}{3\sqrt{2}}\right) +$$
$$+ 2\left(-\frac{\tilde{x}}{3} - \frac{4\tilde{z}}{3\sqrt{2}}\right) + 16\left(-\frac{2\tilde{x}}{3} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{z}}{3\sqrt{2}}\right) + 45 = 0$$

$$9\tilde{x}^2 - 30\tilde{x} - 6\sqrt{2}\,\tilde{y} + 6\sqrt{2}\,\tilde{z} + 45 = 0$$

$$9\left(\tilde{x}^2 - \frac{10}{3}\tilde{x} + \frac{25}{9}\right) - 25 - 6\sqrt{2}\,\tilde{y} + 6\sqrt{2}\,\tilde{z} + 45 = 0$$

$$\left(\tilde{x} - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\tilde{y} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\tilde{z} - \frac{20}{9}$$

Це рівняння неможливо звести до канонічного паралельним перенесенням, треба обертати навколо $O\tilde{x}$. Таке обертання задається наступним чином:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{x}}\\ \tilde{\tilde{y}}\\ \tilde{\tilde{z}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix} : \quad \begin{aligned}\tilde{\tilde{x}} &= \tilde{x}\\ \tilde{\tilde{y}} &= \cos\varphi\,\tilde{y} - \sin\varphi\,\tilde{z}\\ \tilde{\tilde{z}} &= \sin\varphi\,\tilde{y} + \cos\varphi\,\tilde{z}.\end{aligned}$$

У нас $\frac{2\sqrt{2}}{3}\tilde{y} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\tilde{z} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot \underbrace{\sqrt{2}}_{=\sqrt{1^2+1^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z}\right)$,

тому можна покласти $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (тобто $\varphi = \frac{\pi}{4}$), і $\tilde{\tilde{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z}$. Отже:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{x}} &= \tilde{x}\\ \tilde{\tilde{y}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z}\\ \tilde{\tilde{z}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z}.\end{aligned}$$

Тоді рівняння:

$$\left(\tilde{\tilde{x}} - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\tilde{\tilde{y}} - \frac{20}{9} = \frac{4}{3}\left(\tilde{\tilde{y}} - \frac{5}{3}\right)$$

Нарешті, канонічні:

$$\begin{cases}\tilde{\tilde{\tilde{x}}} = \tilde{\tilde{x}} - \frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{y}}} = \tilde{\tilde{y}} - \frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{z}}} = \tilde{\tilde{z}}\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned}\tilde{\tilde{x}} &= \tilde{\tilde{\tilde{x}}} + \frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{y}} &= \tilde{\tilde{\tilde{y}}} + \frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{z}} &= \tilde{\tilde{\tilde{z}}}\end{aligned}$$

Канонічне рівняння:

$$\tilde{\tilde{\tilde{x}}}^2 = \frac{4}{3}\tilde{\tilde{\tilde{y}}} \quad \text{— параболічний циліндр.}$$

(насправді тут було б потрібно ще поміняти місцями $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}$ і $\tilde{\tilde{\tilde{y}}}$, але ми вже не будемо цього робити).

Щоб знайти перетв. координат, скористаємося транспонованою матрицею:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{x}}\\ \tilde{\tilde{y}}\\ \tilde{\tilde{z}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{x}}\\ \tilde{\tilde{y}}\\ \tilde{\tilde{z}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{x}}\\ \tilde{\tilde{y}}\\ \tilde{\tilde{z}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{\tilde{x}}}+\frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{y}}}+\frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{z}}}\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{3\sqrt2}\\-\frac{1}{3}&0&-\frac{4}{3\sqrt2}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{3\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{\tilde{x}}}+\frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{y}}}+\frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{z}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{\tilde{x}}}+\frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{y}}}+\frac{5}{3}\\ \tilde{\tilde{\tilde{z}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{\tilde{x}}}\\ \tilde{\tilde{\tilde{y}}}\\ \tilde{\tilde{\tilde{z}}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{20}{9}\\ \frac{5}{9}\\ -\frac{5}{9}\end{pmatrix}$$

Канонічна с.к.: початок у $\left(\frac{20}{9}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{9}\right)$, базис $\left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

<u>807(12)</u>

$$x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$$

Знайдемо канонічне рівняння, не використовуючи перетворення координат. Замість цього використаємо інваріанти.

Матриця квадратичної частини: $A=\begin{pmatrix}1&-6\\-6&-4\end{pmatrix}$

Розширена матриця:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 6 \\ -6 & -4 & 4 \\ \hline 6 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

A ← коеф. при x, y, поділені на 2

вільний член.

Тоді інваріанти:

$$I_1 = \operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} = 1 + (-4) = -3$$

$$I_2 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 36 = -40$$

$$I_3 = \det B = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 6 \\ -6 & -4 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-20-16) + 6(-30-24) +$$

$$+ 6(-24+24) = -360.$$

Вони ті ж, що у напотінного рівняння.

Власні значення:

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 40 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 40}\right) = \frac{1}{2}(-3 \pm 13)$$

$$\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -8.$$

Тип кривої можна встановити за знаками інваріантів:

$I_2 \neq 0 \iff$ крива центральна:

- $I_2 > 0 \iff$ дійсний або уявний еліпс
- $I_2 < 0 \iff$ гіпербола або пара дійсних (чи уявних) прямих, що перетинаються

$I_2 = 0 \Leftrightarrow$ крива нецентральна: парабола, пара паралельних прямих (дійсних або уявних) або прямих, що збігаються.

$I_3 \neq 0 \Leftrightarrow$ крива, що не розпадається: еліпс, гіпербола, парабола

$I_3 = 0 \Leftrightarrow$ пара прямих.

Тут $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0 \Rightarrow$ гіпербола. Канонічне рівняння:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \hat{c} = 0$$

I_1, I_2, I_3 – інваріанти, означає, що:

$$I_1 = Tr \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

(саме тому характеристичне рівняння A має вигляд $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$).

за теоремою Вієта

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \hat{c} = I_2 \hat{c}.$$

Тому $\hat{c} = \frac{I_3}{I_2} = \frac{-360}{-40} = 9$. Отже, канон. рівн.:

$$5\hat{x}^2 - 8\hat{y}^2 + 9 = 0$$

$$\frac{\hat{x}^2}{\frac{9}{5}} - \frac{\hat{y}^2}{\frac{9}{8}} = -1.$$

807(13)

$$9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$$

$$A=\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}9 & 12 & -115\\ 12 & 16 & 55\\ -115 & 55 & -475\end{pmatrix}$$

$I_1 = \operatorname{Tr} A = 9+16 = 25$

$I_2 = \det A = 144-144 = 0$

$I_3 = \det B = -390625$.

$I_2=0,\ I_3\neq 0 \Rightarrow$ парабола.

Власні значення: $\lambda^2 - 25\cdot\lambda + 0 = 0$, тобто $\lambda_1=0,\ \lambda_2 = 25\ (=I_1)$.

Канонічне рівняння параболи:

$$\lambda_2 \hat{y}^2 - 2\hat{p}\hat{x} = 0.$$

$$I_3 = \begin{vmatrix}0 & 0 & -\hat{p}\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ -\hat{p} & 0 & 0\end{vmatrix} = -\lambda_2\hat{p}^2 = -I_1\hat{p}^2$$ (бо $I_1 = \lambda_1+\lambda_2 = \lambda_2$).

Тому $\hat{p} = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 125$. ($\hat{p}>0$ для канонічного рівняння):

$$25\hat{y}^2 - 2\cdot 125\,\hat{x} = 0$$

$$\hat{y}^2 = 10\hat{x}.$$

807(4)

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \operatorname{Tr} A = 1 + 4 = 5$$

$$I_2 = \det A = 4 - \frac{25}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$I_3 = \det B = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 1 + \frac{5}{2}\left(5 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2} - 2\right) =$$

$$= -9 + \frac{45}{4} - \frac{9}{4} = 0.$$

$I_2 < 0$, $I_3 = 0$ => пара прямих, що перетинаються (можливо, уявних, тобто точка).

Самі прямі можна знайти, виділяючи повні квадрати:

$$\underbrace{x^2 + 2x\left(-\frac{5y}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5y}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(-\frac{5y}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$+ 4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$\left(x - \frac{5y}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25y^2}{4} + \frac{5y}{2} - \frac{1}{4} + 4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$\left(x - \frac{5y}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9y^2}{4} + \frac{9y}{2} - \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{5y}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3y}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{5y}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3y}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5y}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

$(x-4y+2)(x-y-1)=0.$

Отже, це прямі $x-4y+2=0$ і $x-y-1=0.$