Нормальні та головні кривини гіперповерхні

Нехай (M, r) – (гладка) гіперповерхня в $(\overline{M}, \overline{g})$. У точці $p \in M$ фіксуємо один з двох одиничних нормальних векторів $\nu \in N_pM$ (що може бути значенням ξ_p у цій точці локального або глобального одиничного нормального поля ξ). Отже $\overline{g}_{r(p)}(\nu, \nu) = 1$. Скалярна друга ф.ф. b_p у точці визначається умовою $B_p = b_p\,\nu$. За її властивостями, для будь-яких $v, w \in T_pM$

$$b_p(v, w) = \overline{g}_{r(p)}(B_p(v, w), \nu) = g_p(A_\nu v, w)$$

у позначеннях попереднього розділу.

<u>def.</u> Нормальною кривиною (M, r) (у точці p) у напрямку $v \in T_pM$, де $v \neq 0$, називають

$$k_\nu(v) := \frac{b_p(v, v)}{g_p(v, v)}.$$

Rem. Очевидно, $k_\nu(\lambda v) = k_\nu(v)$ для будь-якого $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, тобто k_ν дійсно залежить саме від напрямка, а не від вектора. Іншими словами, це функція на $P(T_pM)$ – проєктивному просторі, що асоційований з T_pM. Він природним чином ототожнюється з $\mathbb{R}P^{n-1}$, $n = \dim M$, зокрема, є компактним.

def. Головними кривинами (M, r) у p називають власні значення $k_1, \ldots, k_n$ оператора A_ν. При цьому кажуть, що вектор $v \in T_pM$, $v \neq 0$ має головний напрямок, що відповідає k_i, $i = \overline{1, n}$, якщо він власний: $A_\nu v = k_i v$.

Rem. З def. нормальної кривини і формули для b_p вище, при цьому $k_i = k_\nu(v)$.

Rem. Нехай у локальних координатах $G = (g_{ij})_{i,j=1}^n$, $A = (a^i_j)_{i,j=1}^n$ і (лише у цьому розділі) $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриці g_p, A_ν і b_p відповідно. Як ми бачили вище, тоді $a^i_j = g^{ik}\, b_{kj}$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$, тобто $A = G^{-1}B$. Зокрема, головні кривини – корені характеристичного полінома $\det(A - k\, I) = \det(G^{-1}B - k\, I)$. Домноживши на $\det G > 0$, отримаємо рівняння $\det(B - k\, G) = 0$.

Згадаємо, що A_ν самоспряжений відносно g_p:

Cor. 1. Існують n дійсних (з урахуванням кратності) головних кривин $k_1, \ldots, k_n$.

2. Головні напрямки, що відповідають різним головним кривинам, ортогональні.

3. Існує ортонормований базис T_pM з векторів головних напрямків, і у ньому матриця A_ν діагоналізується, тобто має вигляд

$$\begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix}.$$

Pr. (Формула Ейлера) Нехай $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – ортонормований базис T_pM з векторів головних напрямків, α_i – кут між $0 \neq v \in T_pM$ і e_i, $i = \overline{1, n}$. Тоді

$$k_\nu(v) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cos^2 \alpha_i.$$

► Отже, $A_\nu e_i = k_i \, e_i$ для $i = \overline{1, n}$. Оскільки нормальна кривина залежить лише від напрямку v, можемо вважати його одиничним. Тоді $v = \sum\limits_i \cos\alpha_i\, e_i$, і тому

$$k_\nu(v) = \frac{b_p(v,v)}{g_p(v,v)} = g_p(A_\nu v, v) =$$

$$= g_p\left(\sum_i \cos\alpha_i\, k_i\, e_i, \sum_j \cos\alpha_j\, e_j\right) = \sum_i \cos^2\alpha_i\, k_i.$$

з означень і формули для b_p. ◀

<u>Rem.</u> Для ортонормованого базиса $\sum\limits_i \cos^2\alpha_i = 1$. Тому при $n = 2$ ця формула має вигляд $k_\nu(v) = k_1 \cos^2\alpha_1 + k_2 \sin^2\alpha_1$. Крім того, звідси випливає:

<u>Cor.</u> $\min\limits_{i=\overline{1,n}} k_i = \min\limits_{0\neq v\in T_pM} k_\nu(v)$; $\max\limits_{i=\overline{1,n}} k_i = \max\limits_{0\neq v\in T_pM} k_\nu(v)$.

Rem. Нормальна кривина приймає свої найменше і найбільше значення, бо це неперервна (чому?) функція на компакті $P(T_pM)$.

Впр. Чи є геометричний сенс у інших k_i?

Rem. Знаки головних і нормальних кривин залежать від вибору ν та змінюються (усі одночасно) при його заміні на протилежний.

Rem. З однієї з Lem. попереднього розділу випливає, що (скалярна) середня кривина у p дорівнює

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu = \frac{1}{n}(k_1 + \ldots + k_n).$$

Впр. При $n = 2$ $H(p) = \frac{1}{2}(k_\nu(v)+k_\nu(w))$ для будь-яких ортогональних $0 \neq v, w \in T_pM$.

def. Кривиною Гаусса – Кронекера (M, r) у p зветься

$$K(p) := \det A_\nu = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n.$$

Rem. У локальних координатах

$$K(p) = \det A = \det(G^{-1}B) = \frac{\det B}{\det G}.$$

Тобто, якщо задавати $\nu = \xi_p$ для гладкого поля ξ на $U \subset M$, $K\colon U \to \mathbb{R}$ – гладка. Глобально вона "визначена з точністю до знака" (але коректно визначена і не залежить від вибору ξ для парних n). При $n = 2$

$K(p)$ збігається з зовнішньою (гауссовою для поверхні в E^3) кривиною $K_{ext}(p) = \frac{b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2}$ в єдиному можливому напрямку.

<u>Rem.</u> З означень і критеріїв минулих розділів, омбілічність гіперповерхні в p еквівалентна $k_1 = \ldots = k_n = H(p)$, зокрема, з геодезичності в p випливає $k_1 = \ldots = k_n = 0$. Також аналогічно до поверхонь можна ввести поняття:

<u>def.</u> Точка p зветься:

– параболічною, якщо A_ν (а отже й b_p) вироджений;

– еліптичною, якщо A_ν (і b_p) знаковизначений;

– гіперболічною у всіх інших випадках.

Rem. Тут знаковизначеність операторів – відносно g_p. Зокрема,

– параболічність еквівалентна $K(p) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n = 0$;

– еліптичність еквівалентна тому, що всі $k_i \neq 0$ та мають один й той самий знак, і те ж вірно для k_ν: $k_\nu(v) \neq 0$ і мають один й той самий знак для усіх $0 \neq v \in T_pM$;

– гіперболічність еквівалентна тому, що всі $k_i \neq 0$ і серед них є числа різних знаків.

При цьому у гіперболічному випадку серед значень $k_\nu(v)$ є додатні, від'ємні та нульові, як випливає з формули Ейлера.

При $n = 2$ ці умови еквівалентні $K(p) = 0$, $K(p) > 0$ і $K(p) < 0$ відповідно (хоча в класичній теорії поверхонь точки сплощення, тобто геодезичні, виключають з параболічних).

Rem. Також можна розглядати лінії кривини та асимптотичні лінії довільної гіперповерхні аналогічно до класичної диференціальної геометрії.

Rem. Для довільної ковимірності дослівно так само визначаються нормальні та головні кривини відносно якогось фіксованого одиничного $\nu \in N_pM$.

Впр. Аналогічно до класичного означення визначити нормальну кривину натурально параметризованої кривої γ, що проходить через p, у гіперповерхні (або відносно фіксованого одиничного $\nu \in N_pM$ для довільної ковимірності) як довжину зі знаком проєкції (тобто скалярний добуток) $\overline{\nabla}_{(r\circ\gamma)'}(r\circ\gamma)'$ у точці $r(p)$ на ν і показати що вона визначається напрямком дотичного вектора γ' (використати розкладення Гаусса для кривої).

Підмноговиди з паралельним полем середньої кривини

<u>def.</u> Говорять, що поле середньої кривини H (гладкого) підмноговида (M, r) у $(\overline{M}, \overline{g})$ паралельне, якщо для будь-якого поля X на M похідна $\nabla^{\perp}_{X} H = 0$ (далі позначаємо цю умову $\nabla^{\perp} H = 0$).

<u>Rem.</u> Зокрема, $X(\overline{g}(H, H)) = 2\overline{g}(\nabla^{\perp}_{X} H, H) = 0$ для будь-якого X, тобто модуль $|H| = \sqrt{\overline{g}(H, H)}$ постійний на зв'язних компонентах M. Важливим окремим випадком є мінімальність:

<u>def.</u> Якщо $H = 0$, то (M, r) називають мінімальним.

Rem. Мінімальні підмноговиди – це критичні (стаціонарні) точки функціонала об'єму, тобто мінімальність – це необхідна умова мінімізації об'єму компактних підмножин підмноговида відносно локальних варіацій. Докладніше див., наприклад, Dajczer – Tojeiro, глава 3, Амінов, глава 7 та нижче. Схожа варіаційна умова вірна й для підмноговидів з паралельним полем середньої кривини (там розглядаються варіації, що зберігають обмежений підмноговидом об'єм).

Впр. Нагадаємо, що кривиною Річчі n-вимірного ріманового многовида (M, g) в $p \in M$ у напрямку $0 \neq v \in T_pM$ називають $\frac{1}{n-1}\frac{\mathrm{Ric}_p(v,v)}{g_p(v,v)}$, де Ric – тензор Річчі (M, g). Показати, що для мінімального (M, r) в многовиді постійної секційної кривизни c ці кривини не перевищують c, і якщо в $p \in M$ всі кривини Річчі підмноговида дорівнюють c, то $B_p = 0$ (і навпаки). Зокрема, для мінімального занурення многовида постійної секційної кривини c у многовид постійної секційної кривини $\overline{c}$ $c \leqslant \overline{c}$, і $c = \overline{c}$ тоді й тільки тоді, коли це занурення цілком геодезичне.

Згадаємо, що для цілком омбілічного підмноговида $B = g\,H$:

<u>Cor.</u> (M, r) цілком геодезичний тоді й тільки тоді, коли він цілком омбілічний та мінімальний.

<u>Rem.</u> У випадку гіперповерхні поле середньої кривини має вид $H\,\xi$, де ξ – одиничне нормальне поле, H –

скалярна середня кривина (взагалі кажучи, локально). Тоді умова паралельності дає за властивістю нормального поля

$$0 = \nabla^{\perp}_{X}(H\,\xi) = X(H)\xi + H\nabla^{\perp}_{X}\xi = X(H)\xi.$$

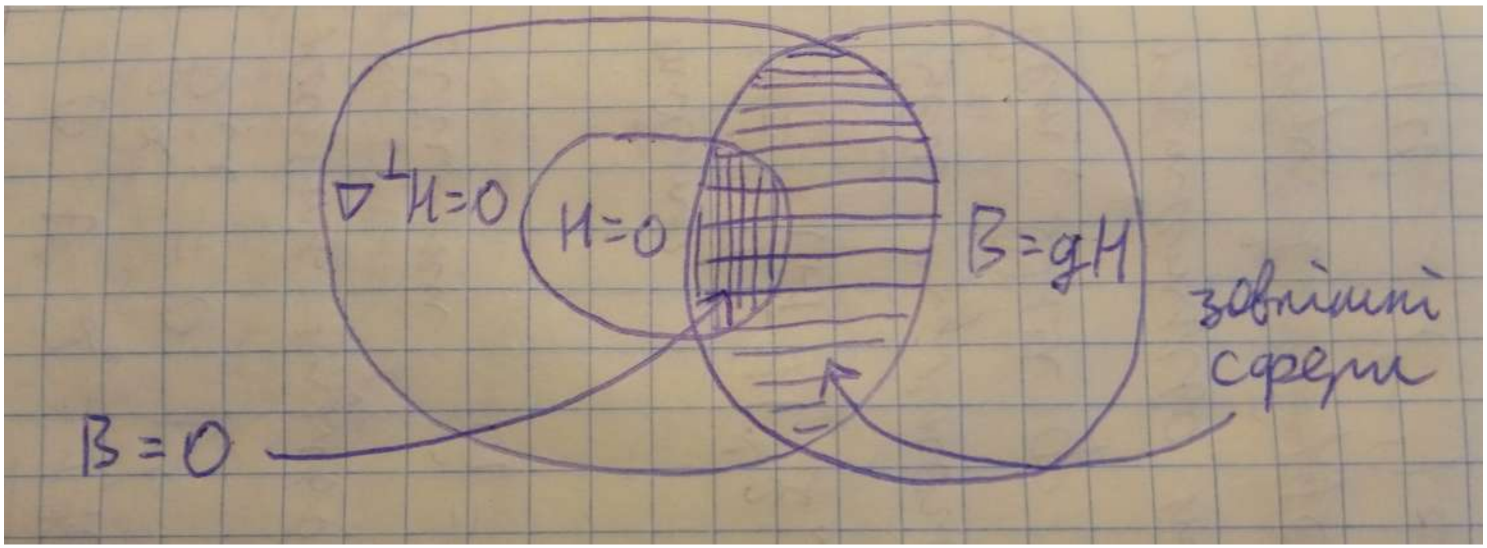
Cor. Поле середньої кривини гіперповерхні паралельне тоді і тільки тоді, коли її середня кривина H постійна на зв'язних компонентах M.

Rem. У таких випадках кажуть, що M – гіперповерхня постійної середньої кривини (CMC).

def. Цілком омбілічний підмноговид з паралельним полем середньої кривини називається зовнішньою сферою.

Ex. Цілком геодезичні підмноговиди, як ми бачили, є зовнішніми сферами.

Rem. Тобто маємо наступні класи підмноговидів:



Pr.1. Будь-який цілком омбілічний підмноговид у рімановому многовиді постійної секційної кривини є зовнішньою сферою.

2. Якщо (M, r) – зовнішня сфера, то $\nabla^{\perp} B = 0$.

3. Якщо (M, r) – зовнішня сфера, то $\overline{\mathsf{R}}(X, Y)\xi = \mathsf{R}^{\perp}(X, Y)\xi$ для будь-яких дотичних полів X, Y та нормального ξ.

► 1. випливає з останнього Pr. розділу про омбілічність.

2. З Lem. розділу про омбілічність, умова цілком омбілічності дає $\nabla^{\perp}_{X} B = g \nabla^{\perp}_{X} H = 0$ для будь-якого поля X (це ми й позначили в умові через $\nabla^{\perp} B = 0$).

3. З тієї ж Lem., для цілком омбілічного випадку $(\overline{\mathsf{R}}(X, Y)\xi)^{\perp} = \mathsf{R}^{\perp}(X, Y)\xi$. При цьому дотична компонента $(\overline{\mathsf{R}}(X, Y)\xi)^{T} = 0$ в силу рівняння Кодацці та 2.
◄

Ex. Як ми бачили вище, гіперсфери радіуса R у E^{n+1} цілком омбілічні й мають постійну середню кривину $H = \pm\frac{1}{R}$ ($k_1 = \ldots = k_n = \pm\frac{1}{R}$ у кожній точці). Тому це приклад зовнішньої сфери (і справедливості Pr.1.)

Гіпотези площин і сфер Картана

def. Кажуть, що $(n+q)$-вимірний рімановий многовид $(\overline{M}, \overline{g})$ задовольняє гіпотезу n-площин (відповідно, n-сфер), якщо для будь-якої $\overline{p} \in \overline{M}$ і для будь-якого n-вимірного підпростору $\sigma \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ існує n-вимірний цілком геодезичний підмноговид (відповідно, n-вимірна зовнішня сфера) (M, r) і точка $p \in M$ така, що $\overline{p} = r(p)$ і $\sigma = d_p r(T_p M)$.

Rem. Тобто у будь-якій точці у напрямку будь-якого n-вимірного підпростору дотичного простору можна провести цілком геодезичний підмноговид (відповідно, зовнішню сферу).

Rem. Оскільки цілком геодезичні підмноговиди є зовнішніми сферами, якщо $(\overline{M}, \overline{g})$ задовольняє гіпотезу n-площин, то він задовольняє й гіпотезу n-сфер (тобто гіпотеза n-площин апріорі сильніша).

Ex.1. Гіпотеза n-площин тривіально вірна при $q = 0$.

2. При $n = 1$ одновимірні цілком геодезичні підмноговиди – геодезичні, тому гіпотеза 1-площин завжди виконується за теоремою існування геодезичних.

3. Для многовидів $(\overline{M},\overline{g})$ постійної секційної кривини виконана гіпотеза n-площин для будь-якого n, як згадувалося в розділі про цілком геодезичні підмноговиди.

Th. (Картан) Нехай зв'язний ріманoвий $(\overline{M},\overline{g})$ задовольняє гіпотезу n-сфер для якогось $n > 1$ і ковимірності $q > 0$. Тоді $(\overline{M},\overline{g})$ має постійну секційну кривину.

▶ Для будь-якої $\overline{p} \in \overline{M}$ нехай $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ – довільна ортонормована система з 3 векторів у $T_{\overline{p}}\overline{M}$ (за умовою вимірність $\overline{M}$ дорівнює $n+q \geqslant 3$). В силу умови, існує зовнішня сфера (M,r) і $p \in M$ такі, що $\overline{p} = r(p)$, $\overline{u} = d_p r(u)$, $\overline{v} = d_p r(v)$ для деяких $u, v \in T_p M$, і $\overline{w} \in N_pM$ (доповнюємо $\overline{u}, \overline{v}$ до базиса n-вимірного підпростора, що ортогональний $\overline{w}$, і проводимо сферу у його напрямку). Тоді в силу Pr.3. вище

$$\overline{\mathsf{R}}_{\overline{p}}(\overline{u}, \overline{v})\overline{w} = \mathsf{R}_p^{\perp}(u, v)\overline{w} \in N_pM.$$

Зокрема, $\overline{g}_{\overline{p}}(\overline{\mathsf{R}}_{\overline{p}}(\overline{u}, \overline{v})\overline{w}, \overline{u}) = 0$. Для ортонормованої $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ система $\{\overline{u}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{v} + \overline{w}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{v} - \overline{w})\}$ також ортонормована, тому для неї це теж виконується:

$$0 = \overline{g}_{\overline{p}}\left(\overline{\mathsf{R}}_{\overline{p}}\left(\overline{u}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{v} + \overline{w})\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{v} - \overline{w}), \overline{u}\right) =$$

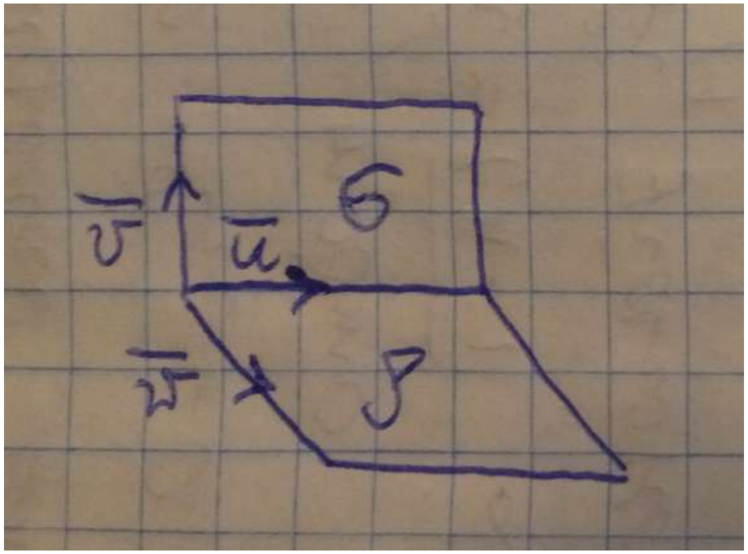
$$= \frac{1}{2}\Big(\overline{g}_{\overline{p}}(\overline{\mathsf{R}}_{\overline{p}}(\overline{u}, \overline{v})\overline{v}, \overline{u}) - \overline{g}_{\overline{p}}(\overline{\mathsf{R}}_{\overline{p}}(\overline{u}, \overline{v})\overline{w}, \overline{u}) +$$

$$+ \overline{g}_{\overline{p}}(\overline{\mathsf{R}}_{\overline{p}}(\overline{u}, \overline{w})\overline{v}, \overline{u}) - \overline{g}_{\overline{p}}(\overline{\mathsf{R}}_{\overline{p}}(\overline{u}, \overline{w})\overline{w}, \overline{u})\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{K}(\overline{u},\overline{v}) - \overline{K}(\overline{u},\overline{w})\right),$$

де другий і третій доданки у передостанній суммі нульові за тим же фактом. Тут $\overline{K}(\overline{u},\overline{v})$ – секційна кривина $(\overline{M},\overline{g})$ у напрямку площини, що натягнута на $\overline{u}$ та $\overline{v}$, і використовується означення секційної кривини.

Зауважимо, що для будь-яких площин $\sigma,\tau \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ існує площина $\rho \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ така, що $\sigma \perp \rho$ і $\tau \perp \rho$ у наступному сенсі (див. мал. нижче): існують ненульові вектори $\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}$ такі, що $\sigma \cap \rho = \{\lambda\,\overline{u} |\, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\overline{v} \in \sigma$, $\overline{w} \in \rho$, і $\overline{u} \perp \overline{v}$, $\overline{u} \perp \overline{w}$, $\overline{v} \perp \overline{w}$, і аналогічно для τ і ρ (Впр.)



Звичайно, усі ці вектори можна зробити одиничними, отже вони утворять ортонормовану систему. В силу доведеного, $\overline{K}(\sigma) = \overline{K}(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{K}(\overline{u}, \overline{w}) = \overline{K}(\rho)$, і аналогічно $\overline{K}(\rho) = \overline{K}(\tau)$. Тобто всі секційні кривини в $\overline{p} \in \overline{M}$ збігаються. В силу теореми Шура та зв'язності, $(\overline{M}, \overline{g})$ – постійної секційної кривини. ◀

<u>Cor.</u> Те ж вірно і для гіпотези n-площин.

Rem. Тобто гіпотези еквівалентні, і приклади вище вичерпують усі випадки, коли вони виконуються.

Підмноговиди евклідового простору

Нехай $r\colon M \to E^{n+q}$ – ізометричне занурення. Як завжди, ототожнюємо для кожної $p \in M$ дотичний простір $T_{r(p)}\mathbb{R}^{n+q}$ з $\mathbb{R}^{n+q}$. Тоді $dr(X)$ для поля X на M – поле зі значеннями в $\mathbb{R}^{n+q}$, тобто гладке відображення $M \to \mathbb{R}^{n+q}$. Нехай $r = (x^1, \ldots, x^{n+q})$, де $x^a\colon M \to \mathbb{R}$, $a = \overline{1, n+q}$. Для локальних координат $(u^1, \ldots, u^n)$ на M нехай $X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, тоді

$$dr(X) = X^i \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^a} = X(x^a) \frac{\partial}{\partial x^a} = (X(x^1), \ldots, X(x^{n+q})),$$

де ми використали наше ототожнення. Позначимо це поле через $X(r)$. Нехай $\overline{X} = \overline{X}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ і $\overline{Y} = \overline{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ продовжують $dr(X)$ і $dr(Y)$ відповідно, тобто в точках M виконується $\overline{X}^a = X(x^a)$ і $\overline{Y}^a = Y(x^a)$ для усіх $a = \overline{1, n+q}$. Тоді, оскільки зв'язність E^{n+q} пласка, формула коваріантного диференціювання дає

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{X}^a \frac{\partial \overline{Y}^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}.$$

У точках M аналогічно до конструкцій розкладень Гаусса і Вейнгартена (як само?) маємо:

$$\overline{\nabla}_X Y = X(x^a)\frac{\partial(Y(x^b))}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b} = X(Y(x^b))\frac{\partial}{\partial x^b} =$$

$$= (X(Y(x^1)), \ldots, X(Y(x^{n+q}))),$$

що позначаємо через $X(Y(r))$.

Ex. Повернемося до афінної гіперсфери $S^n_R(x_0) = \{x \mid |x - x_0| = R\} \subset E^{n+1}$. У цьому випадку $r\colon S^n \to E^{n+1}$ – вкладення (тобто включення), що задовольняє умові $\langle r - x_0, r - x_0 \rangle = R^2$. Продиференціюємо цю функціональну рівність у напрямку довільного поля X на S^n:

$$2\langle X(r) - 0, r - x_0 \rangle = 0.$$

Тобто $dr(X) \perp r - x_0$ (у E^{n+1}) для будь-якого X. Звідси, $r - x_0$ – нормальне поле, і

$$\xi := \pm\frac{r - x_0}{|r - x_0|} = \pm\frac{r - x_0}{R}$$

є (глобальним) одиничним нормальним полем. Продифференцюємо ще раз за полем Y на M:

$$\langle Y(X(r)), r - x_0 \rangle + \langle X(r), Y(r) \rangle = 0;$$

$$\langle \overline{\nabla}_Y X, \pm R\,\xi \rangle = -\langle dr(X), dr(Y) \rangle = -g(X, Y)$$

за означенням першої ф.ф. В силу розкладення Гаусса зліва тут стоїть $\pm R\, b(Y, X)$, тобто (враховуючи симетричність) знову ж маємо $b = \mp\frac{1}{R} g$, отже $S^n_R(x_0)$ – цілком омбілічний із середньою кривиною $H = \mp\frac{1}{R}$ (зовнішня сфера).

<u>Впр.</u> Перевірити, що для довільної ковимірності q афінна n-вимірна сфера $S_R^{n+q-1}(x_0) \bigcap \sigma^{n+1} \subset E^{n+q}$ – теж цілком омбілічна, а отже повинна бути зовнішньою сферою, знайти її поле середньої кривини і переконатися у його паралельності. Тут σ^{n+1} – афінний $(n+1)$-вимірний підпростір, що проходить через x_0 (наприклад, можна використати пару вкладень $S^n \to \sigma^{n+1} \to E^{n+q}$, друге з яких цілком геодезичне, або додаткові умови на r).

Th. Нехай (M, r) – цілком омбілічна гіперповерхня в E^{n+1}. Тоді образи зв'язних компонент M містяться у афінних гіперплощинах або афінних гіперсферах.

▶ З Pr.1., (M, r) – зовнішня сфера, тобто має постійну середню кривину H (на зв'язних компонентах) відносно одиничного нормального поля ξ (нам воно важливе з точністю до множення на -1, тому його локальний характер несуттєвий). Розглянемо довільну зв'язну компоненту (тому далі без обмеження загальності вважаємо M зв'язним) і два випадки для неї:

1. Якщо $H = 0$, то з цілком омбілічності маємо $b = 0$, тобто (M, r) – цілком геодезичний, а тому $r(M)$, як

ми знаємо, є областю гіперплощини. Перевіримо також це аналітично. Використаємо позначення як вище. Оскільки $\overline{\nabla}$ пласка, для $\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ (що теж в силу ототожнення вважаємо полем в $\mathbb{R}^{n+1}$) і довільного поля X на M аналогічно до міркувань вище маємо

$$\overline{\nabla}_X \xi = X(\xi^a)\frac{\partial}{\partial x^a} = (X(\xi^1), \dots, X(\xi^{n+1})),$$

що позначаємо через $X(\xi)$. Розкладення Вейнгартена тоді має вигляд

$$X(\xi) = \overline{\nabla}_X \xi = -dr(A_\xi X) = -dr(H\,X) = 0.$$

Тобто ξ – постійне. Оскільки для будь-якого X

$$X\langle r, \xi\rangle = \langle X(r), \xi\rangle + \langle r, X(\xi)\rangle = \langle dr(X), \xi\rangle = 0,$$

функція $\langle r, \xi\rangle$ постійна, а отже $r(M)$ міститься у гіперплощині з рівнянням вигляду $\langle x, \xi\rangle = C$.

2. Аналогічно, якщо $H \neq 0$, то для будь-якого X розкладення Вейнгартена виглядає як

$$X(\xi) = \overline{\nabla}_X \xi = -dr(A_\xi X) = -H\, dr(X).$$

Покладемо $\rho := r + \frac{\xi}{H} \colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Тоді

$$X(\rho) = X(r) + \frac{1}{H} X(\xi) = dr(X) - \frac{1}{H} H\, dr(X) = 0.$$

Тобто відображення ρ постійне. При цьому

$$|r - \rho| = |-\frac{\xi}{H}| = \frac{1}{|H|}$$

постійне, тобто $r(M)$ міститься у гіперсфері $S^n_{\frac{1}{|H|}}(\rho)$ з центром у ρ. ◀

Кривина і опуклість гіперповерхонь евклідового простору

Критичні точки і форма Гессе

Нехай M – гладкий многовид, f – гладка функція на M. Згадаємо, що $p \in M$ є критичною точкою f тоді й тільки тоді, коли $d_p f = 0$, що еквівалентне $v(f) = d_p f(v) = 0$ для будь-якого $v \in T_p M$. У локальних координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ це рівносильно умові $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0$ для $i = \overline{1, n}$. Зокрема, усі точки локальних мінімумів та максимумів f (у тому числі глобальних) є критичними.

<u>def.</u> Нехай p – критична точка f. Формою Гессе f у p називається

$$\mathsf{Hess}_p f \colon T_p M \times T_p M \to \mathbb{R} \colon \ \mathsf{Hess}_p f(v, w) := v(X(f)),$$

де X – векторне поле, що продовжує w на деякий окіл $U \ni p$ (тобто $X_p = w$).

<u>Pr.</u> $\mathrm{Hess}_p\, f$ коректно визначена і є симетричною білінійною формою на T_pM.

▶ Нехай $v, w \in T_pM$, а X, Y продовжують v, w відповідно на відкриту $U \ni p$.

$$v(Y(f)) - w(X(f)) = (X(Y(f)) - Y(X(f)))(p) =$$

$$= ([X, Y](f))(p) = [X, Y]_p(f) = 0,$$

оскільки p – критична для f. Т.ч., $v(Y(f)) = w(X(f))$. Оскільки ліва частина тут не залежить від X, а права – від Y, вони обидві не залежать від X і Y (тільки від f, p, v і w). Це й означає коректність. Звідси і з означення:

$$\mathrm{Hess}_p f(v,w) = \mathrm{Hess}_p f(w,v).$$

Білінійність очевидно випливає з властивостей диференціювання. ◂

<u>Rem.</u> У локальних координатах для $i,j=\overline{1,n}$:

$$(\mathrm{Hess}_p f)_{ij} = \mathrm{Hess}_p f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^j}(p).$$

Тобто локальна матриця форми – це матриця Гессе локального задання f (а її визначник – його гессіан).

З відомих фактів про функції на $\mathbb{R}^n$, що застосовуються до локального завдання f, тоді випливає:

<u>Cor.</u> Функція f має у p (строгий) локальний максимум тоді й тільки тоді, коли p – критична точка f і $\mathrm{Hess}_p f$ недодатно (відповідно, від'ємно) визначена.

Функція f має у p (строгий) локальний мінімум тоді й тільки тоді, коли p – критична точка f і $\mathrm{Hess}_p f$ невід'ємно (відповідно, додатно) визначена.

Це, зокрема, відноситься до глобальних екстремумів, що є окремими випадками локальних.

<u>Pr.</u> Нехай (M, r) – (гладкий) компактний підмноговид у евклідовому просторі E^{n+q}. Тоді існують такі

$p \in M$ і $\nu \in N_pM$, що оператор A_ν строго знаковизначений (відносно першої ф.ф. (M, r) у p).

▶ Визначимо $f\colon M \to \mathbb{R}$: $f(p) := \langle r(p), r(p) \rangle$. Очевидно, вона гладка. Оскільки M – компакт, існує p – точка глобального максимума f. Оскільки p критична, для будь-якого $v \in T_pM$ аналогічно міркуванням у попередньому розділі маємо

$$0 = v(f) = 2\langle v(r), r(p) \rangle = 2\langle d_p r(v), r(p) \rangle.$$

Тобто $r(p) \in N_pM$. Покладемо $\nu := -r(p)$ (це не нуль, бо інакше підмноговид вироджується в точку). Оскільки p – точка максимума, для будь-якого $v \in T_pM$

$$0 \geqslant \mathrm{Hess}_p\, f(v, v) = [\text{продовжуємо } v \text{ полем } X] =$$

$$= v(X(f)) = v(2\langle dr(X), r\rangle) = [\text{див. попередній розділ}] =$$

$$= 2(\langle \overline{\nabla}_X X, r\rangle + \langle dr(X), dr(X)\rangle)(p) =$$

$$= 2(\langle B_p(v,v), -\nu\rangle + \langle d_p r(v), d_p r(v)\rangle) =$$

$$= 2(-g_p(A_\nu v, v) + g_p(v,v))$$

за розкладенням Гаусса, зв'язком другої ф.ф. з оператором Вейнгартена і означенням першої ф.ф. Тобто $g_p(A_\nu v, v) \geqslant g_p(v,v)$. Оскільки g_p додатно визначена, A_ν – теж: $g_p(A_\nu v, v) \geqslant g_p(v,v) > 0$ для будь-якого вектора $0 \neq v \in T_pM$. ◀

<u>Cor.</u> В евклідовому просторі не існує компактних мінімальних підмноговидів.

▶ Для p і ν з попереднього Pr.

$$\langle H_p, \nu \rangle = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu \neq 0,$$

тому $H_p \neq 0$. ◀

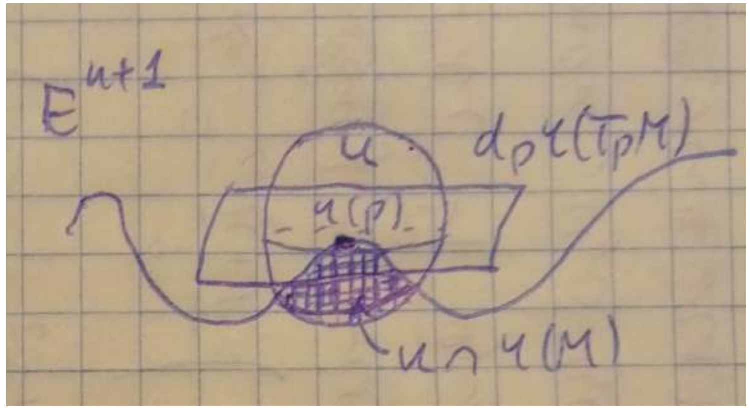
Rem. Існує зв'язок між топологією многовида та індексами форм Гессе критичних точок функцій на ньому, що встановлюється теорією Морса. Див., наприклад, Хірш, або Дж. Мілнор, Теорія Морса.

Локальна опуклість

Далі у цьому розділі (M, r) – (гладка) гіперповерхня в евклідовому просторі E^{n+1}, усі позначення стандартні. Як і раніше, для $p \in M$ вважаємо $d_p r(T_p M)$

підпростором $\mathbb{R}^{n+1}$, але тепер перенесемо його в $r(p)$ (тобто розглянемо афінний дотичний підпростір $T_p(M, r)$).

<u>def.</u> Назвемо гіперповерхню (M, r) локально опуклою в $p \in M$, якщо $d_p r(T_p M)$ – опорна гіперплощина множини $r(M) \cap U$ для деякої відкритої $U \ni r(p)$ (тобто $r(M) \cap U$ лежить в одному замкненому напівпросторі відносно $d_p r(T_p M)$). Якщо при цьому $r(M) \cap U \cap d_p r(T_p M) = r(p)$, будемо звати (M, r) строго локально опуклою в p.



Pr. Нехай $\nu \neq 0$ – нормальний вектор гіперповерхні (M, r) в p. (M, r) (строго) локально опукла в p тоді й тільки тоді, коли A_ν (строго) знаковизначений (відносно першої ф.ф. гіперповерхні у p).

▶ Отже, ν – вектор нормалі $d_p r(T_p M)$. Тоді з попереднього def., (M, r) (строго) локально опукла в p тоді й тільки тоді, коли функція $f := \langle r - r(p), \nu \rangle$ (що, очевидно, є гладкою) має в p точку (строгого) екстремума (також див. мал. нижче). Відповідно до результатів попереднього підрозділу, це еквівалентне тому, що для будь-якого $v \in T_pM$

$$0 = v(f) = \langle v(r) - 0, \nu \rangle = \langle d_p r(v), \nu \rangle$$

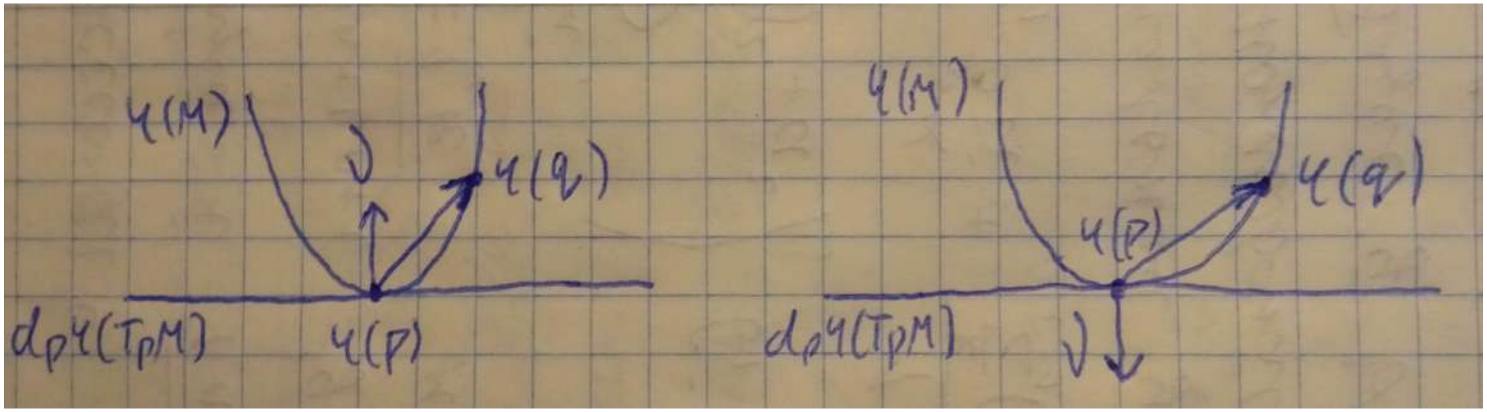
(це завжди вірно, бо ν нормальний), а вираз

$$\mathrm{Hess}_p\, f(v,v) = v(X(f)) = v(\langle dr(X), \nu \rangle) =$$

$$= \langle \overline{\nabla}_X X, \nu \rangle (p) = \langle B_p(v,v), \nu \rangle = g_p(A_\nu v, v)$$

зберігає знак (відповідно, строго зберігає знак при $v \neq 0$), де, як і раніше, X – це поле, що продовжує v. Це і є потрібна умова знаковизначеності. ◀

<u>Rem.</u> Зокрема, строга локальна опуклість означає, що точка p еліптична. Геометричний сенс знаку A_ν умовно проілюстровано на малюнках:



Тобто: $A_\nu \geqslant 0 \Leftrightarrow 0$ – локальний мінімум f у $p \Leftrightarrow f \geqslant 0$ на околі $V \ni p \Leftrightarrow \nu$ напрямлений ''усередину опуклості'', тобто $r(M) \cap U$ лежить у напівпросторі, що задається вектором ν.

$A_\nu \leqslant 0 \Leftrightarrow 0$ – локальний максимум f у $p \Leftrightarrow f \leqslant 0$ на околі $V \ni p \Leftrightarrow \nu$ напрямлений ''назовні опуклості'', тобто $r(M) \cap U$ лежить у напівпросторі, що задається вектором $-\nu$.

І аналогічно для випадків строгої локальної опуклості у точці.

Глобальна опуклість

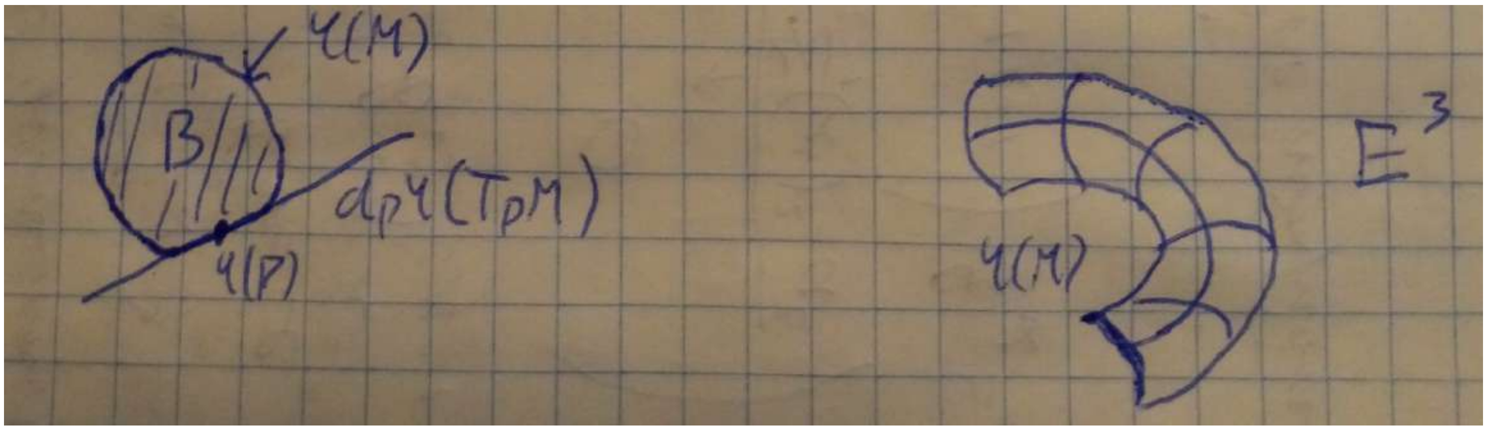
def. Гіперповерхня (M, r) називається (глобально) опуклою, якщо $r(M) = \partial B$, де $B \subset E^{n+1}$ – опукла підмножина: для будь-яких $x, y \in B$ відрізок $[x, y]$ з кінцями в цих точках міститься у B.

Pr. Якщо гіперповерхня (M, r) опукла, то для будь-якої $p \in M$ (M, r) локально опукла в p.

► Отже, $r(M) = \partial B = \partial \overline{B}$, де B опукла, а отже й $\overline{B}$ опукла. Тоді для будь-якої $p \in M$ існує опорна гіперплощина $\overline{B}$ у $r(p)$ (це випливає з теореми Хана-Банаха для скінченновимірного випадку). Зокрема, це опорна гіперплощина $r(M) \subset \overline{B}$. Тобто $0 = f(p)$ – глобальний екстремум гладкої функції $f := \langle r - r(p), \nu \rangle$, де ν – вектор нормалі опорної гіперплощини. Звідси, $0 = v(f) = \langle d_p r(v), \nu \rangle$ для будь-якого $v \in T_pM$ як у доведенні попереднього <u>Pr.</u>, тобто опорна гіперплощина збігається з дотичною, а це й означає опуклість у p. ◀

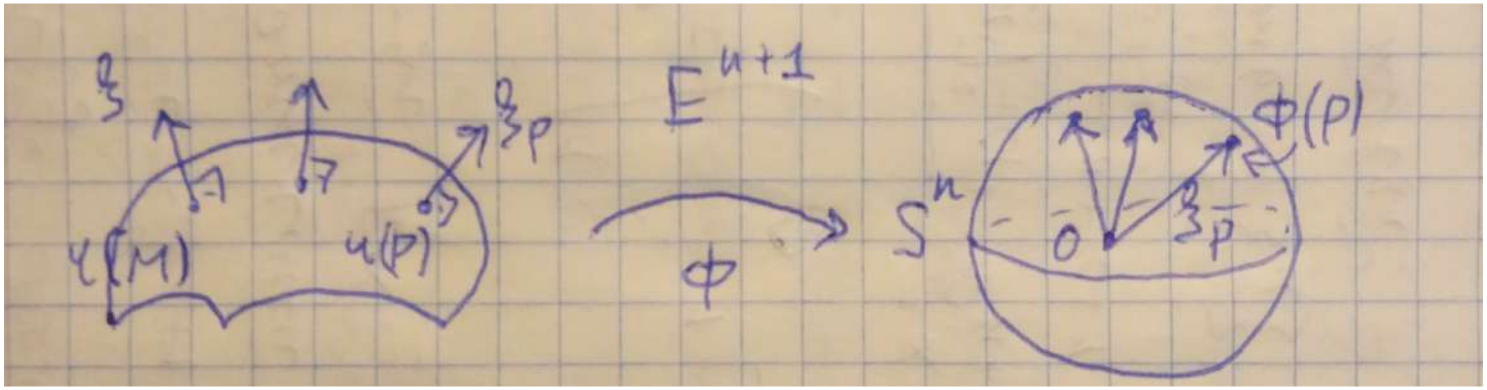
<u>Rem.</u> Локальна опуклість не обов'язково буде строгою (див. перший з малюнків знизу). З локальної опуклості в будь-якій точці (навіть строгої), взагалі кажучи, не випливає опуклість, потрібні додаткові умови. На другому з малюнків наведено приклад

строго локально опуклої в кожній точці неопуклої поверхні в E^3, що утворена перенесенням дуги кола уздовж спіралі (або просто кола):



<u>Rem.</u> Далі будемо розглядати тільки гіперповерхні, у яких існує неперервне одиничне нормальне поле (можна показати, що тоді існує і гладке). В E^{n+1} ця умова рівносильна орієнтовності. Далі фіксуємо таке поле ξ.

def. Нехай гіперповерхня (M, r) орієнтовна, $\xi\colon M \to E^{n+1}$ – її одиничне (тобто $|\xi| = 1$) нормальне поле. Переносячи початки векторів ξ_p, $p \in M$, у 0, визначимо $\Phi\colon M \to S^n\colon \Phi(p) := \xi_p \in S^n$. Φ зветься гауссовим відображенням (M, r).



Rem. Тут $\xi_p \in S^n$, бо $|\xi| = 1$. Іншими словами, за побудовою $\xi = \rho \circ \Phi$, де $\rho\colon S^n \to E^{n+1}$ – стандартне вкладення сфери. Теорема Гаусса про площу сферичного образа у багатовимірному випадку узагальнюється наступним чином:

Th. (Гаусса про об'єм гауссового образа) Для орієнтованої гіперповерхні (M, r) і кубовної (тобто з компактним замиканням і границею міри 0 за Жорданом) $D \subset M$

$$\int\limits_D \Phi^* dV_h = \int\limits_D |K| dV_g,$$

де $\Phi^* dV_h$ – дія кодиференціала гауссового відображення Φ наріманову форму об'єму dV_h стандартної метрики (першої ф.ф.) h сфери S^n, dV_g – ріманова форма об'єму першої ф.ф. g гіперповерхні, K – її кривина Гаусса – Кронекера.

▶ Впр. ◀

Rem. Якщо $\Phi\colon D \to \Phi(D)$ – дифеоморфізм, то

$$\int\limits_D \Phi^* dV_h = \int\limits_{\Phi(D)} dV_h = Vol(\Phi(D)),$$

тобто зліва у формулюванні Th. стоїть саме об’єм гауссового образу множини D у сфері (Впр.).

Lem. Φ – локальний дифеоморфізм у $p \in M$ тоді й тільки тоді, коли A_{ξ_p} невироджений.

▶ Отже, $\xi = \rho \circ \Phi$, де $\rho\colon S^n \to E^{n+1}$ – вкладення. Оскільки ρ має максимальний ранг n у всіх точках, Φ – локальний дифеоморфізм у p тоді й тільки тоді, коли ξ має максимальний ранг n у p (як відображення в $\mathbb{R}^{n+1}$). Це еквівалентне тому, що $d_p\xi(v) \neq 0$ для будь-якого $0 \neq v \in T_pM$. Нехай у локальних координатах $v = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ і $\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}$. Тоді

$$0 \neq d_p\xi(v) = v^i \frac{\partial \xi^a}{\partial u^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^a} = v(\xi) =$$

$$= [\text{див. попередній розділ}] = \overline{\nabla}_v \xi =$$

$$= [\text{розкладення Вейнгартена}] = -d_p r(A_{\xi_p} v).$$

Оскільки r – занурення, $d_p r$ – лінійна ін'єкція, тому це еквівалентне умові $A_{\xi_p} v \neq 0$ для будь-якого $v \neq 0$, тобто невиродженості A_{ξ_p}. ◀

Th. (Адамар) Нехай (M, r) – орієнтовна компактна зв'язна гіперповерхня в E^{n+1}, де $n \geqslant 2$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. (M, r) строго локально опукла в кожній точці.

2. Гауссове відображення $\Phi\colon M \to S^n$ – дифеоморфізм.

3. Кривина Гаусса – Кронекера $K(p) \neq 0$ для будь-якої $p \in M$.

Якщо виконана будь-яка з цих умов, то гіперповерхня опукла.

Rem. Як ми знаємо з попереднього підрозділу, умова 1. еквівалентна тому, що для будь-яких $p \in M$ і $0 \neq \nu \in N_pM$ оператор A_ν строго знаковизначений, тобто визначений додатно чи від'ємно. Більш того, для неперервного одиничного нормального поля ξ відображення $p \mapsto \operatorname{sign} A_{\xi_p}$ неперервне (чому?). Зі зв'язності тоді випливає, що знак зберігається на усьому M: $A_{\xi_p} > 0$ для будь-якого p або $A_{\xi_p} < 0$ для будь-якого p. Аналогічно, в 3. зі зв'язності витікає, що $K > 0$ на M або $K < 0$ на M. При парновимірному M зі знаковизначеності усіх A_ν тоді випливає, що $K > 0$. Зокрема, при $n = 2$ три перші умови еквівалентні тому, що гауссова кривина поверхні додатна.

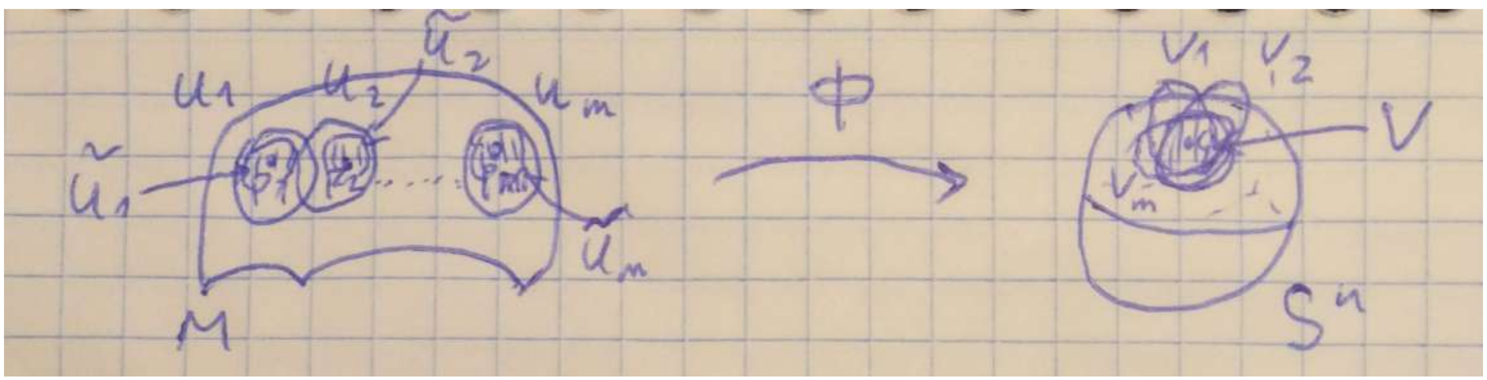
▶ 1. $\Rightarrow$ 2. Отже, нехай ξ – одиничне нормальне поле. В силу міркувань з Rem., A_ξ зберігає знак. Нехай для визначеності $A_{\xi_p} < 0$ для будь-якої $p \in M$. В силу Lem., Φ – локальний дифеоморфізм у кожній $p \in M$, тобто існують відкриті $U \ni p$ (у M) і $V \ni \Phi(p)$

(у S^n) такі, що $\Phi\colon U \to V$ – дифеоморфізм. Зокрема, $\Phi(p)$ – внутрішня точка $\Phi(M)$. Тобто $\Phi(M)$ відкрита в S^n. З іншого боку, оскільки M – компакт, $\Phi(M)$ – компакт, тому $\Phi(M)$ замкнена. Отже, $\Phi(M)$ – непорожня відкритозамкнена підмножина зв'язної S^n, тому $\Phi(M) = S^n$, тобто Φ – сюр'єкція.

Нехай тепер $q \in S^n$. Покажемо, що її прообраз $\Phi^{-1}(q)$ скінченний. Дійсно, припустимо, що $\Phi^{-1}(q)$ – нескінченна множина. Оскільки M – компакт, у $\Phi^{-1}(q)$ тоді існує гранична точка $p_0 \in \Phi^{-1}(q)$ (вона належить $\Phi^{-1}(q)$, оскільки ця множина замкнена). Тобто $(U\backslash\{p_0\}) \cap \Phi^{-1}(q) \neq \varnothing$ для будь-якої відкритої $U \ni p_0$. Більш того, $U\backslash\{p_0\}$ містить нескінченну кількість точок з $\Phi^{-1}(q)$ (наприклад, використаємо локальні координати і розглянемо в якості околів прообрази евклідових куль, радіуси яких прямують до нуля). Тоді

Φ на U – не бієкція. Але з локальної дифеоморфності Φ в p_0 випливає, що існує її окіл U такий, що $\Phi\colon U \to \Phi(U)$ – дифеоморфізм, протиріччя.

Отже, для будь-якої $q \in S^n$ маємо прообраз $\Phi^{-1}(q) = \{p_1, ..., p_m\}$. І для кожного $i = \overline{1, m}$ існують відкриті $U_i \ni p_i$, $V_i \ni q$ такі, що $\Phi\colon U_i \to V_i$ – дифеоморфізм. Покладемо $V := \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_i$, і $\widetilde{U_i} := \Phi^{-1}(V) \cap U_i$ для кожного $i = \overline{1, m}$.



Тоді $\Phi^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^{m} \widetilde{U_i}$ – диз'юнктне об'єднання відкритих множин, і для кожного i $\Phi\colon \widetilde{U_i} \to V$ – гомеоморфізм. Отже, $\Phi\colon M \to S^n$ – (сюр'єктивне) накриття. Оскільки S^n однозв'язна (бо $n \geqslant 2$), Φ – бієкція (більш того, гомеоморфізм). Звідси і з локальної дифеоморфності в кожній точці випливає, що Φ – дифеоморфізм.

2. $\Rightarrow$ 3. Якщо Φ – дифеоморфізм, то з Lem. для будь-якої $p \in M$ маємо, що A_{ξ_p} невироджений, а тоді $K(p) = \det A_{\xi_p} \neq 0$.

3. $\Rightarrow$ 1. Знову ж, оскільки $\det A_{\xi_p} = K(p) \neq 0$ для кожної $p \in M$, A_{ξ_p} невироджений. В силу одного з Pr.

вище, існує p така, що A_{ξ_p} знаковизначений (ξ_p колінеарний ν з цього Pr., оскільки $\dim N_pM = 1$). Тоді в силу зв'язності знаковизначеність зберігається на усьому M (Впр. – використати, наприклад, локальні координати та критерій Сільвестра).

Опуклість. Отже, нехай тепер виконані умови 1.-3.

Знову ж для визначеності можемо вважати, що $A_{\xi_p} < 0$ для будь-якої $p \in M$ (з 1. і Rem.). Тоді з результатів попереднього підрозділу випливає, що для кожної $p \in M$ (M, r) строго локально опукла в p, і $f := \langle r - r(p), \xi_p \rangle$ має в p строгий локальний максимум 0. Нехай q – якась точка локального максимума цієї функції. Тоді для будь-якого $v \in T_qM$

$$0 = v(f) = \langle v(r) - 0, \xi_p \rangle = \langle d_q r(v), \xi_p \rangle,$$

тобто $d_q r(T_q M) \perp \xi_p$, а тоді $\xi_q = \pm\xi_p$. І далі,

$$0 \geqslant \mathsf{Hess}_q\, f(v,v) = v(X(f)) = \langle(\overline{\nabla}_X X)_q, \xi_p\rangle =$$

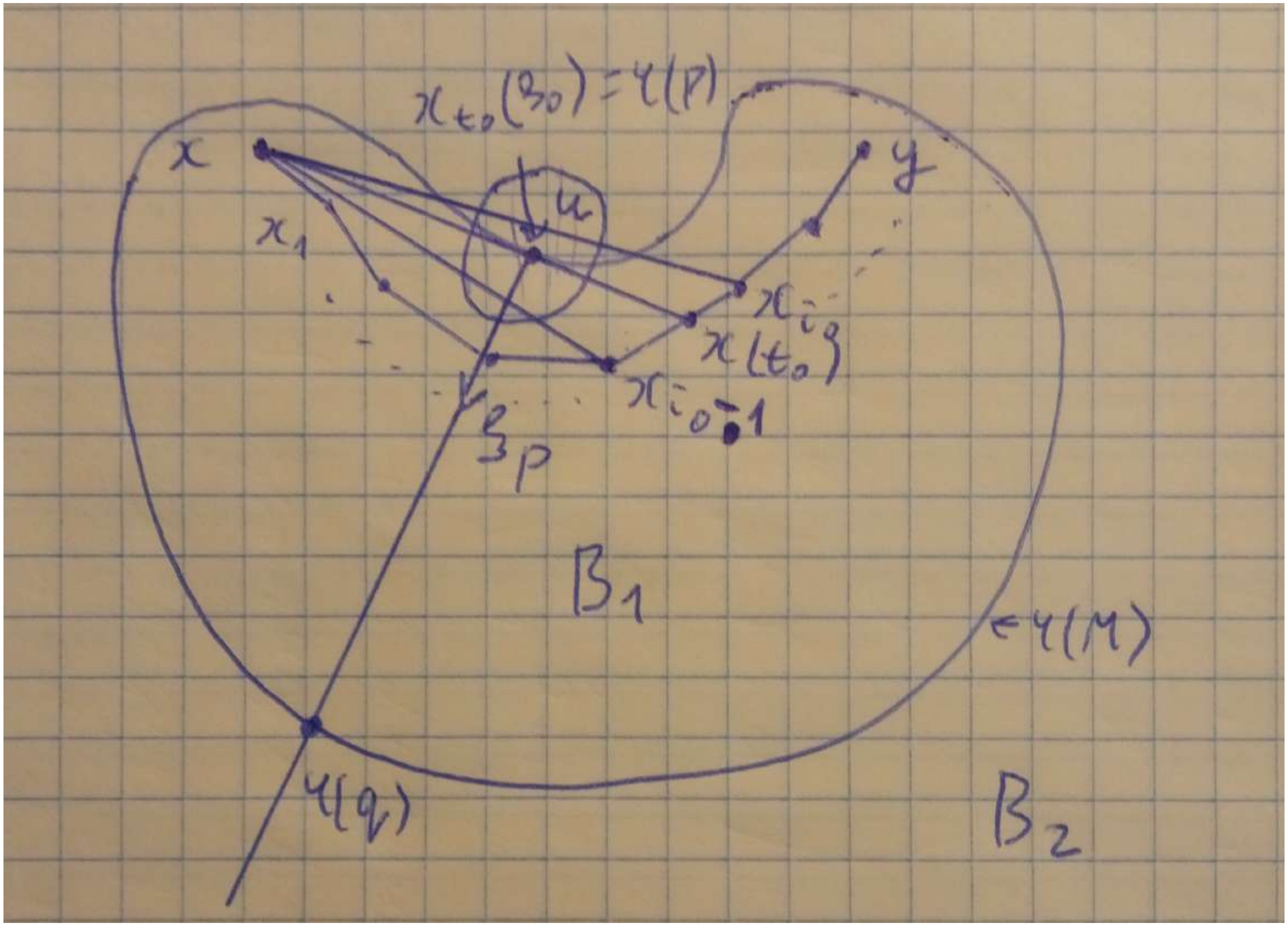
$$= \pm\langle B_q(v,v), \xi_q\rangle = \pm g_q(A_{\xi_q} v, v)$$

для будь-якого $v \in T_q M$ (тут, як і раніше, поле X продовжує v на деякий окіл q). Оскільки $A_{\xi_q} < 0$, тут повинен бути знак $+$. Тобто $\xi_q = \xi_p$, отже $\Phi(q) = \Phi(p)$, і в силу бієктивності Φ (з <u>2.</u>) $q = p$. Таким чином, p – єдина точка максимума, тобто 0 – строгий глобальний максимум f. Зокрема, якщо $r(q) = r(p)$, то $f(q) = 0$, і тому $q = p$, тобто r ін'єктивне.

Оскільки r – ін'єктивне занурення і M – компакт, r – вкладення. З <u>2.</u> випливає, що M гомеоморфний S^n. Використаємо (n-вимірну) теорему Жордана:

Th. (Жордан) Нехай (топологічний) многовид M гомеоморфний S^n, і $r\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ – топологічне вкладення (тобто $r\colon M \to r(M)$ – гомеоморфізм). Тоді $\mathbb{R}^{n+1} \backslash r(M) = B_1 \sqcup B_2$, де B_1 і B_2 – відкриті лінійно зв'язні множини, $r(M) = \partial B_1 = \partial B_2$, і B_1 – обмежена множина (вона зветься внутрішністю $r(M)$), а B_2 – ні (зовнішність $r(M)$).

Доведемо, що у нашому випадку B_1 опукла (за означенням, це й буде опуклість (M, r)). Припустимо, що це не так, тобто існують $x, y \in B_1$ такі, що $[x, y] \not\subset B_1$. В силу лінійної зв'язності B_1, існує набір точок $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = y$ такий, що $[x_{i-1}, x_i] \subset B_1$ для кожного $i = \overline{1, m}$ (чому?). Тоді існує i_0 таке, що $[x, x_{i_0-1}] \subset B_1$, але $[x, x_{i_0}] \not\subset B_1$.


x
y
x_1
$x_{t_0}(s_0) = \psi(p)$
u
x_{i_0}
$x(t_0)$
$x_{i_0 - 1}$
ξ_p
B_1
$\leftarrow \psi(M)$
$\psi(q)$
B_2

Позначимо $x(t) := (1-t)x_{i_0-1} + tx_{i_0}$. Тоді між 0 і 1 існує $t_0 := \inf\{t \mid [x, x(t)] \not\subset B_1\}$. Аналогічно, позначимо $x_{t_0}(s) := (1-s)x + sx(t_0)$, тоді між 0 і 1 існує $s_0 := \inf\{s \mid x_{t_0}(s) \notin B_1\}$. За побудовою, $x_{t_0}(s_0)$ – точка $\partial B_1 = r(M)$, тобто $x_{t_0}(s_0) = r(p)$ для деякої $p \in M$.

За побудовою, існує окіл $U \ni r(p)$ такий, що усі точки $r(M) \cap U$ лежать в одному замкненому напівпросторі відносно опорної $d_p r(T_p M)$ (в силу локальної опуклості), і перетин U з доповнюючим відкритим напівпростором складається з точок B_1. Більш того, оскільки $A_{\xi_p} < 0$, ξ_p напрямлений саме в цей напівпростір (див. попередній підрозділ), тобто $r(p) +$

$\lambda\xi_p \in B_1$ для достатньо малих $\lambda > 0$. З іншого боку, B_1 (і $r(M)$ в силу компактності) обмежена, тому $r(p) + \lambda\xi_p \in B_2$ для достатньо великих λ. Тоді у цьому відкритому промені міститься точка межі $\partial B_1 = \partial B_2 = r(M)$, тобто існує $\lambda_0 > 0$ таке, що $r(p)+\lambda_0\xi_p = r(q)$ для деякої $q \in M$. Тоді $f(q) = \lambda_0 > 0$ (де, як і раніше, $f = \langle r - r(p), \xi_p\rangle$). Але вище ми показали, що 0 є глобальним максимумом f при $A_{\xi_p} < 0$, тобто $f \leqslant 0$, протиріччя. ◀

Rem. Знаковизначеність оператора Вейнгартена еквівалентна такій же знаковизначеності другої ф.ф. в силу зв'язку між ними.

Впр. Показати, що аналогічне твердження вірне й при $n = 1$ (для жорданової кривої, кривина якої зберігає знак).

Впр. Показати, що при $n = 2$ опуклість компактної зв'язної орієнтовної поверхні в E^3 буде випливати з умови, що слабша за 3.: $K \geqslant 0$ на M та існує така $p \in M$, що $K(p) > 0$.