Задача 1.1. Розглянемо круговий конус F в $I\!R^3$:

$$\begin{cases} x^1 = r\,u^2 \cos u^1 \\ x^2 = r\,u^2 \sin u^1, \\ \quad x^3 = h\,u^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < u^1 < 2\pi \\ 0 < u^2 < \infty \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса F в точці $P\,(\frac{\pi}{2},1)$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор конуса F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} ru^2 \cos u^1 \\ ru^2 \sin u^1 \\ hu^2 \end{pmatrix}$

Підставивши $u^1 = \frac{\pi}{2}, u^2 = 1$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

Далі, обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -ru^2 \sin u^1 \\ ru^2 \cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} r \cos u^1 \\ r \sin u^1 \\ h \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх значення в точці $P\,(\frac{\pi}{2},1)$:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(\frac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(\frac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

Це вектори, які утворюють базис в дотичній площині $T_P F$. Знайдемо їх векторний добуток – це буде вектор нормалі дотичної площини:

$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$0 \cdot (x^1 - 0) + rh \cdot (x^2 - r) - r^2 \cdot (x^3 - h) = 0,$$

тобто,

$$h\, x^2 - r\, x^3 = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ h \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

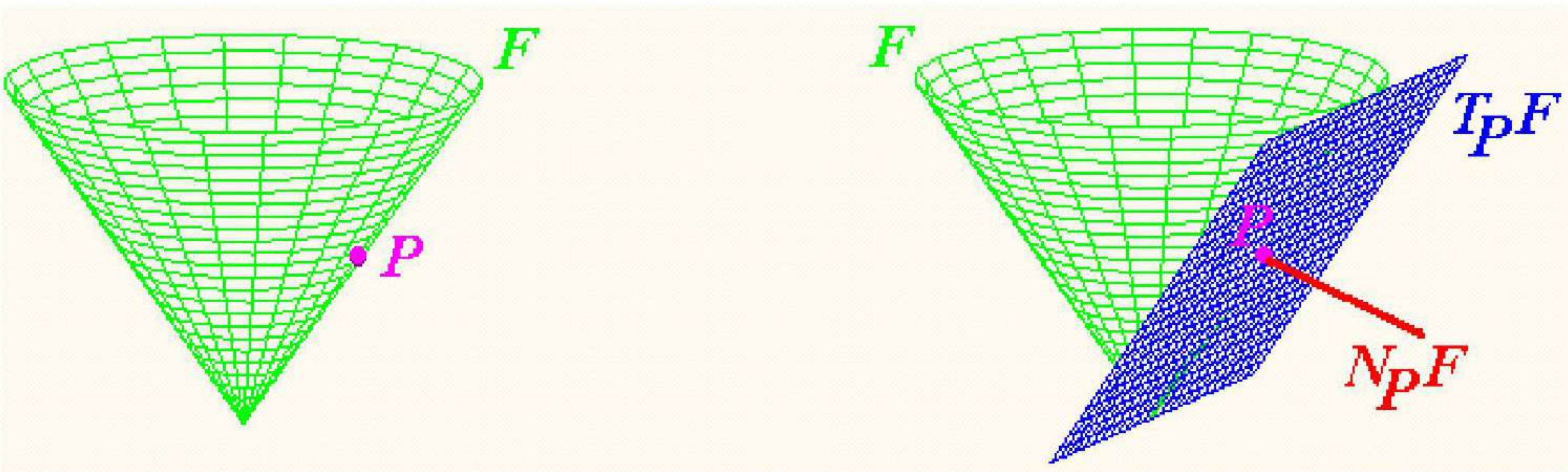
$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ rh \\ -r^2 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $\dfrac{x^1 - 0}{0} = \dfrac{x^2 - r}{rh} = \dfrac{x^3 - h}{-r^2}$.

Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $h\,x^2 - r\,x^3 = 0$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$: $\dfrac{x^1 - 0}{0} = \dfrac{x^2 - r}{h} = \dfrac{x^3 - h}{-r}$



Задача 1.2. Розглянемо круговий гіперболоїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ x^2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1, \\ x^3 = h\, u^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 < u^1 < 2\pi \\ -\infty < u^2 < \infty \end{array}$$

Перевірте регулярність поверхні F. Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої гіперболоїда F в точці $P\,(\pi,-2)$.

** Доведіть, що коли точка Q рухається по довільній фіксованій твірній гіперболоїда F, дотична площина $T_Q F$ ковзає по цій твірній, обертаючись навколо неї. На який повний кут повернеться дотична площина, коли точка Q пробіжить усю твірну пряму?

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор гіперболоїда F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ \sin u^1 + u^2 \cos u^1 \\ h\, u^2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} -\sin u^1 - u^2 \cos u^1 \\ \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\sin u^1 \\ \cos u^1 \\ h \end{pmatrix}$$

Знайдемо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} h(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ h(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ -u^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_Q F$ в довільній точці $Q(u_0^1, u_0^2)$:

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)(x^1 - (\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)) +$$

$$+ h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)(x^2 - (\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)) - u_0^2 (x^3 - h\, u_0^2) = 0$$

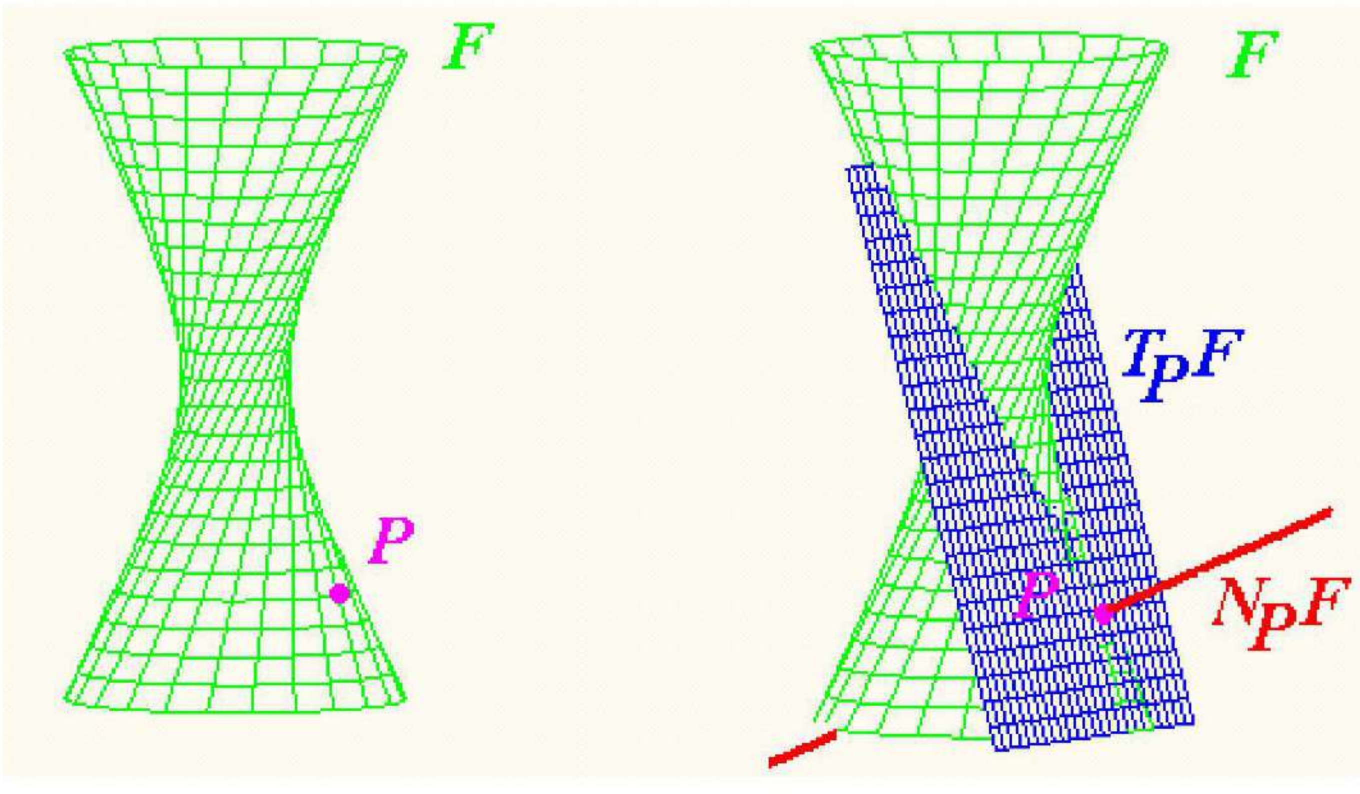
тобто,

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)x^1 + h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)x^2 - u_0^2 x^3 - h = 0$$

Зокрема, в точці P $(\pi,-2)$ маємо: $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2h \end{pmatrix}$, $\vec{N}_P = \begin{pmatrix} -h \\ 2h \\ 2 \end{pmatrix}$

Рівняння дотичної площини T_PF: $-hx^1 + 2hx^2 + 2x^3 - h = 0$

Рівняння нормальної прямої N_PF: $\dfrac{x^1+1}{-h} = \dfrac{x^2-2}{2h} = \dfrac{x^3+2h}{2}$



* Проаналізуємо поведінку дотичної площини

$$h(\cos u_0^1 - u_0^2 \sin u_0^1)x^1 + h(\sin u_0^1 + u_0^2 \cos u_0^1)x^2 - u_0^2 x^3 - h = 0$$

і вектора нормалі

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} h(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ h(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ -u^2 \end{pmatrix}$$

при $u^1 = c = const$, $u^2 = t$, тобто, коли точка рухається по прямолінійній твірній гіперболоїда.

Маємо рівняння дотичної площини:

$$h(\cos c - t \sin c)x^1 + h(\sin c + t \cos c)x^2 - tx^3 - h = 0$$

Підставимо в нього координати довільної точки на твірній:

$$x^1 = \cos c - w \sin c, x^2 = \sin c + w \cos c, x^3 = h\, w, \quad -\infty < w < \infty$$

Отримаємо:

$$h(\cos c - t\sin c)(\cos c - w\sin c) + h(\sin c + t\cos c)(\sin c + w\cos c) - thw - h = 0$$

$$(\cos c - t\sin c)(\cos c - w\sin c) + (\sin c + t\cos c)(\sin c + w\cos c) - tw - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Таким чином, якщо в довільній точці фіксованої прямолінійної твірної гіперболоїда F розглянути дотичну площину, то ця площина міститиме усю прямолінійну твірну.

Далі проаналізуємо поведінку вектора нормалі

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} h(\cos c - t\sin c) \\ h(\sin c + t\cos c) \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\cos c \\ h\sin c \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\sin c \\ \cos c \\ -1 \end{pmatrix},$$

коли t пробігає від $-\infty$ до $+\infty$, тобто, коли точка дотику рухається по фіксованій прямолінійній твірній.

Застосуємо поворот на кут $-c$ навколо координатної осі x^3,

$$\vec{N}^*(t) = \begin{pmatrix} \cos c & \sin c & 0 \\ -\sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

і пронормуємо:

$$\vec{n}^*(t) = \frac{\vec{N}^*(t)}{|\vec{N}^*(t)|} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + 2t^2}} \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{h^2 + 2t^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Коли t пробігає від $-\infty$ до $+\infty$, кінець вектора $\vec{n}^*(t)$ пробігає півколо одиничного радіусу з центром в початку координат O, яке розташоване у вертикальній площині $x^1+x^3=0$.

Це означає, що коли точка дотику рухається по фіксованій прямолінійній твірній гіперболоїда F, то дотична площина поверхні ковзає і обертається навколо твірної, при цьому повний кут обороту дорівнює π.

Задача 1.3. Розглянемо катеноїд F в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = \cosh u^1 \cos u^2 \\ x^2 = \cosh u^1 \sin u^2, \\ \quad x^3 = u^1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -\infty < u^1 < \infty \\ 0 < u^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої катеноїда F в точці $P\,(0, \dfrac{\pi}{3})$.

Розв'язання. Запишемо радіус-вектор катеноїда F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \cos u^2 \\ \cosh u^1 \sin u^2 \\ u^1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} \sinh u^1 \cos u^1 \\ \sinh u^1 \sin u^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -\cosh u^1 \sin u^2 \\ \cosh u^1 \cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = \cosh u^1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos u^2 \\ -\sin u^2 \\ \sinh u^1 \end{pmatrix}$$

Підставивши $u^1 = 0, u^2 = \frac{\pi}{3}$, знайдемо радіус-вектор точки P:

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і вектор нормалі

$$\vec{N}_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо рівняння дотичної площини $T_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і має нормаллю вектор

$$\vec{N}_P = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $(x^1 - \frac{1}{2}) + \sqrt{3}(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 0(x^3 - 0) = 0,$

тобто,

$$x^1 + \sqrt{3}x^2 - 2 = 0.$$

Запишемо рівняння нормальної прямої $N_P F$, що проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

і має напрямним вектором вектор

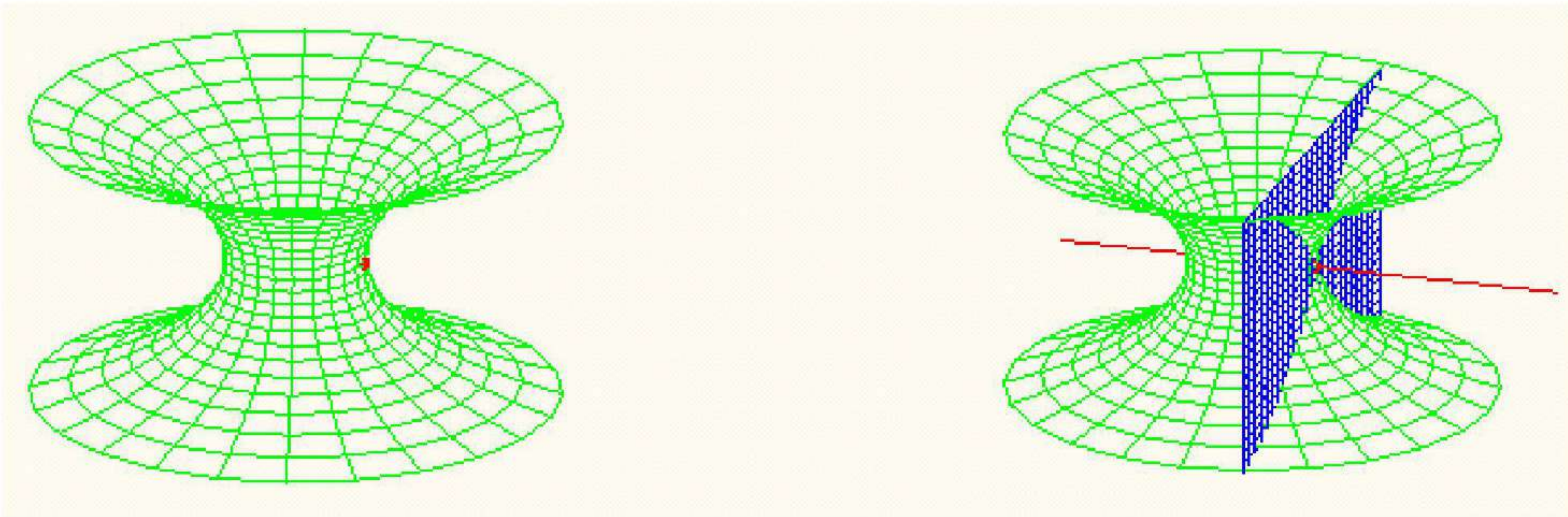
$$\vec{N}_P = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо: $\dfrac{x^1 - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3 - 0}{0}$.

Відповідь:

Рівняння дотичної площини $T_P F$: $x^1 + \sqrt{3}x^2 - 2 = 0$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$: $\dfrac{x^1 - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3 - 0}{0}$



*[*]**Задача 2**. Доведіть, що для регулярної циліндричної поверхні F в $\mathbb{R}^3$ дотичні площини в усіх точках фіксованої твірної співпадають. Інакше кажучи, якщо точка P рухається по фіксованій твірній на циліндричні поверхні F, то її дотична площина T_PF не змінюється (ковзає сама по собі).

Доведіть, що те саме твердження вірне для будь-якої конічної поверхні і будь-якої торсової поверхні (розглядаються регулярні частини цих поверхонь).

Розвязання.

1) Радіус-вектор довільної циліндричної поверхні:

$$\vec{x} = \vec{\rho}(s) + t\vec{e}$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau}(s)\ , \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{e}$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau}(s), \vec{e}]$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0,t_0)$:

$$<\vec{x}-(\vec{\rho}(s_0)+t_0\vec{e}),[\vec{\tau}(s_0),\vec{e}]>=0$$

тобто,

$$<\vec{x}-\vec{\rho}(s_0),[\vec{\tau}(s_0),\vec{e}]>=0 .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на циліндричній поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{e}$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній циліндричної поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

2) Радіус-вектор довільної конічної поверхні:

$$\vec{x} = t\vec{\rho}(s)$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = t\vec{\tau}(s)\ , \ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\rho}(s)$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [t\vec{\tau}(s), \vec{\rho}(s)] = t[\vec{\tau}(s), \vec{\rho}(s)]$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0,t_0)$:

$$< \vec{x} - t\vec{\rho}(s_0), [\vec{\tau}(s_0), \vec{\rho}(s_0)] >= 0$$

тобто,

$$< \vec{x}, [\vec{\tau}(s_0), \vec{\rho}(s_0)] >= 0\ .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на конічній поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{\rho}(s_0)$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній конічної поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

3) Радіус-вектор довільної торсові поверхні:

$$\vec{x} = \vec{\rho}(s) + t\vec{\tau}(s)$$

Перші похідні:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = \vec{\tau}(s) + tk\vec{v}(s)\ ,\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{\tau}(s)$$

Векторний добуток:

$$\vec{N} = [\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}] = [\vec{\tau}(s) + tk\vec{v}(s), \vec{\tau}(s)] = tk[\vec{v}(s), \vec{\tau}(s)] = -tk\vec{\beta}(s)$$

Рівняння дотичної площини в довільній точці $P(s_0,t_0)$:

$$< \vec{x} - \vec{\rho}(s_0) + t\vec{\tau}(s_0), \vec{\beta}(s_0) >= 0$$

тобто,

$$< \vec{x} - \vec{\rho}(s_0), \vec{\beta}(s_0) >= 0\ .$$

В цьому рівнянні відсутній параметр t_0. Це означає, що в усіх точках фіксованої прямолінійної твірної $s=s_0$ на торсовій поверхні її дотична площина буде однією й тією ж.

Крім того, напрямний вектор $\vec{\tau}(s)$ прямолінійної твірної є одним з базисних векторів дотичної площини, а сама твірна проходить через ту ж точку (точку дотику), що і дотична площина. Значить, прямолінійна твірна лежить в дотичній площині.

Таким чином, коли точка рухається по прямолінійній твірній торсової поверхні, дотична площина поверхні в цій точці ковзить вздовж вказаної твірної.

***Задача 3.** Доведіть, що для будь-якої регулярної поверхні обертання нормальна пряма в довільній точці поверхні перетинає вісь обертання.

Розв'язання.

Запишемо радіус-вектор довільної поверхні обертання F:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos u^2 \\ r(u^1)\sin u^2 \\ h(u^1) \end{pmatrix}$$

Обчислимо перші похідні радіус-вектора:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} r'\cos u^2 \\ r'\sin u^2 \\ h' \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -r(u^1)\sin u^2 \\ r(u^1)\cos u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\vec{N} = r \cdot \begin{pmatrix} -h' \cos u^2 \\ -h' \sin u^2 \\ r' \end{pmatrix}$$

Рівняння дотичної площини поверхні F в довільній точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$-h'(u_0^1) \cos u_0^2 \cdot (x^1 - r(u_0^1) \cos u_0^2) - h'(u_0^1) \sin u_0^2 \cdot (x^2 - r(u_0^1) \sin u_0^2) +$$

$$+ r'(u_0^1) \cdot (x^3 - h(u_0^1)) = 0$$

тобто,

$$-h'(u_0^1) \cos u_0^2 \cdot x^1 - h'(u_0^1) \sin u_0^2 \cdot x^2 + r'(u_0^1) \cdot x^3 + h'(u_0^1) r(u_0^1) - r'(u_0^1) h(u_0^1) = 0$$

Рівняння нормальної прямої поверхні F в довільній точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$\frac{x^1 - r(u_0^1) \cos u_0^2}{-h'(u_0^1) \cos u_0^2} = \frac{x^2 - r(u_0^1) \sin u_0^2}{-h'(u_0^1) \sin u_0^2} = \frac{x^3 - h(u_0^1)}{r'(u_0^1)}$$

Точки перетину нормальної прямої поверхні F в точці P з координатною віссю x^3 – віссю обертання поверхні F – визначаються з системи

$$\begin{cases} \dfrac{x^1 - r(u_0^1)\cos u_0^2}{-h'(u_0^1)\cos u_0^2} = \dfrac{x^2 - r(u_0^1)\sin u_0^2}{-h'(u_0^1)\sin u_0^2} = \dfrac{x^3 - h(u_0^1)}{r'(u_0^1)} \\ x^1 = x^2 = 0 \end{cases},$$

тобто,

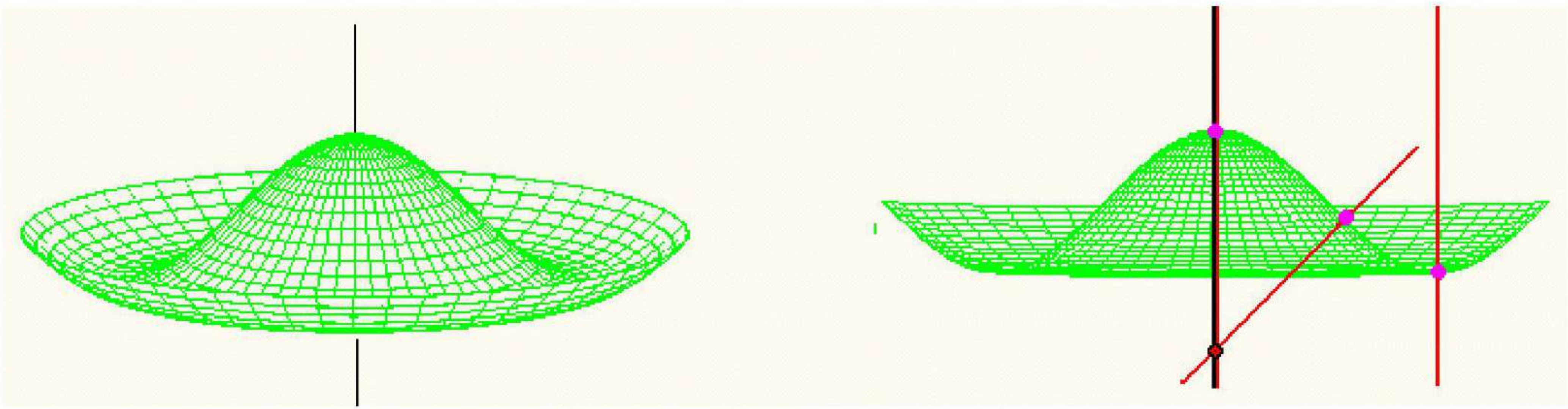
$$\begin{cases} h'(u_0^1)x^3 = h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) \\ x^1 = x^2 = 0 \end{cases}$$

Якщо $h'(u_0^1) \neq 0$, то система має єдиний розв’язок.

Якщо ж $h'(u_0^1) = 0$, то система або не має розв’язків (коли $h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) \neq 0$), або навпаки – перетворюється в тотожність (коли $h'(u_0^1)h(u_0^1) + r(u_0^1)r'(u_0^1) = 0$).

Умова $h'(u_0^1) \neq 0$ або $h'(u_0^1) = 0$ означає що нормальна пряма поверхні F в точці P не є вертикальною або є вертикальною відповідно. А вертикальність прямої означає паралельність з віссю обертання.

Таким чином, маємо: або нормальна пряма поверхні обертання F в точці P не є паралельною осі обертання, і тоді вона обов'язково перетинає вісь обертання в якійсь точці, або вона є паралельною чи співпадає з віссю обертання.



Задача 4. Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$:

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні F в точці $P(1,0,0)$.

*Запишіть рівняння дотичної площини поверхні F, що проходить через точку $A(0,0,-1)$.

*Запишіть рівняння нормальної прямої поверхні F, що проходить через точку $B(0,0,1)$.

Розв'язання. Запишемо функцію $\Phi(x^1, x^2, x^3) = x^3 - x^1 x^2$ і обчислимо її градієнт:

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right) = (-x^2, -x^1, 1)$$

Функція $\Phi(x^1, x^2, x^3) = x^3 - x^1 x^2$ є неперервно диференційованою, а її градієнт $\nabla\Phi$ не обертається в нуль. Тому неявно задана поверхня F є регулярною.

Вектор

$$\vec{N}_Q = \nabla\Phi_Q = (-x_Q^2, -x_Q^1, 1)$$

є нормаллю поверхні F в її довільній точці $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$.

Рівняння дотичної площини T_QF:

$$-x_Q^2 \cdot (x^1 - x_Q^1) - x_Q^1 \cdot (x^2 - x_Q^2) + 1 \cdot (x^3 - x_Q^3) = 0,$$

тобто,

$$x^3 = x_Q^2 \cdot (x^1 - x_Q^1) + x_Q^1 \cdot (x^2 - x_Q^2) + x_Q^3.$$

Рівняння нормальної прямої N_QF:

$$\frac{x^1 - x_Q^1}{-x_Q^2} = \frac{x^2 - x_Q^2}{-x_Q^1} = \frac{x^3 - x_Q^3}{1} .$$

Координати точки $P(1,0,0)$ задовольняють рівняння поверхні

$$x^3 - x^1 x^2 = 0.$$

Рівняння дотичної площини T_PF: $x^3 - x^2 = 0$.

Рівняння нормальної прямої N_QF: $\dfrac{x^1 - 1}{0} = \dfrac{x^2}{-1} = \dfrac{x^3}{1}$.

Запишемо рівняння дотичної площини поверхні F, що проходить через точку $A(0,0,-1)$. Сама точка $A(0,0,-1)$ не належить поверхні, оскільки її координати не задовольняють рівняння поверхні $x^3 - x^1 x^2 = 0$.

Будемо шукати точку $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$ так, щоб вона лежала на поверхні, а дотична площина $T_Q F$ проходила через точку $A(0,0,-1)$.

Маємо наступну систему:

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ -x_Q^2 \cdot (0 - x_Q^1) - x_Q^1 \cdot (0 - x_Q^2) + 1 \cdot (-1 - x_Q^3) = 0 \end{cases},$$

тобто,

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ 2x_Q^1 x_Q^2 - 1 - x_Q^3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язком буде будь-яка точка $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$, яка належить перетину заданої поверхні F з горизонтальною площиною $x^3 = 1$.

Будемо шукати точку $Q(x_Q^1, x_Q^2, x_Q^3)$ так, щоб вона лежала на поверхні, а нормальна пряма $N_Q F$ проходила через точку $B(0,0,1)$.

Маємо наступну систему:

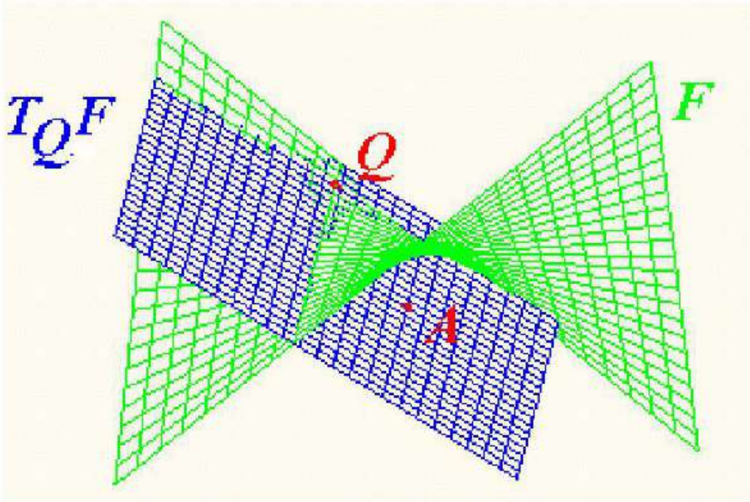
$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ \dfrac{0 - x_Q^1}{-x_Q^2} = \dfrac{0 - x_Q^2}{-x_Q^1} = \dfrac{1 - x_Q^3}{1}, \end{cases}$$

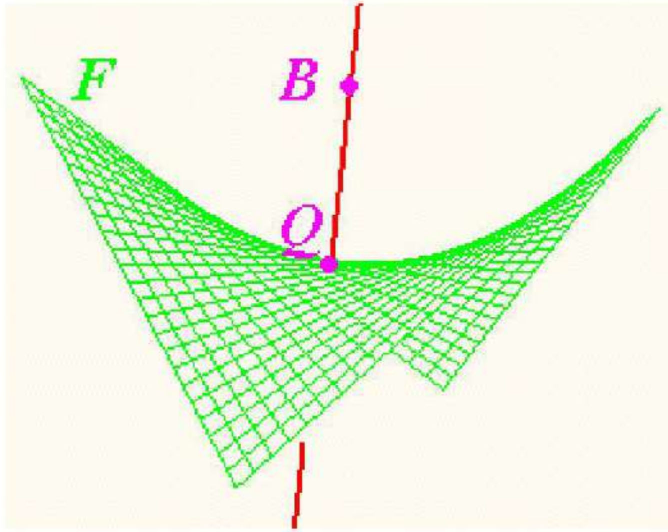
тобто,

$$\begin{cases} x_Q^3 - x_Q^1 x_Q^2 = 0 \\ (x_Q^1)^2 = (x_Q^2)^2,\ (1 - x_Q^3) x_Q^2 = x_Q^1,\ (1 - x_Q^3) x_Q^1 = x_Q^2 \end{cases}$$

Розв'язком буде точка $Q(0,0,0)$.

Рівняння нормальної прямої в цій точці: $\dfrac{x^1}{0} = \dfrac{x^2}{0} = \dfrac{x^3}{1}$


$T_Q F$
F
Q
A


F
B
Q

***Задача 5.** Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо в $\mathbb{R}^3$ точку $A(a^1, a^2, a^3)$, що не лежить на поверхні F.

Доведіть (або спростуйте), що якщо точка $P(p^1, p^2, p^3)$ на поверхні F є найближчою або найдальшою серед усіх точок поверхні F по відношенню до точки A, то тоді пряма AP є нормальною прямою поверхні F в точці P.

Розв'язання. Розглянемо функцію відстані від точки $A(a^1, a^2, a^3)$ до точок поверхні F:

$$d = \sqrt{(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2}, \;\; \Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Щоб знайти екстремуми функції $d(x^1, x^2, x^3)$ за умови $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$, розглянемо відповідну функцію Лагранжа:

$$L = d(x^1, x^2, x^3) + \lambda\, \Phi(x^1, x^2, x^3)$$

і запишемо умови екстремальності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^1} = \dfrac{\partial L}{\partial x^2} = \dfrac{\partial L}{\partial x^3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} 2(x^1 - a^1) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \quad 2(x^2 - a^2) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad 2(x^3 - a^3) + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

тобто,

$$\begin{cases} (x^1 - a^1, x^2 - a^2, x^3 - a^3) = -\dfrac{\lambda}{2} \cdot \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3}\right), \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

Звідси випливає, що в екстремальній точці P пряма AP, що проходить через точку P і направлена вздовж вектора $(x^1 - a^1, x^2 - a^2, x^3 - a^3)$, співпаде з нормальною прямою $N_P F$, що проходить через точку P і направленою вздовж вектора $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^3}\right)$.

Задача 3.2. Знайдемо дотичну площину та нормаль поверхні, параметризація якої має вигляд

$$x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv,$$

у точці M, що відповідає значенням параметрів $u = 2$, $v = 1$ (тобто $M(3, 1, 2)$). Отже, поверхня задана вектор-функцією

$$r(u, v) = (u + v,\ u - v,\ uv).$$

Відомо, що базис дотичної площини у довільній точці регулярної поверхні утворюють вектори

$$r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (1,\ 1,\ v)$$

і

$$r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = (1,\ -1,\ u).$$

У точці M це

$$r_u = (1, 1, 1), \quad r_v = (1, -1, 2).$$

Тепер знайдемо вектор нормалі поверхні у M за допомогою векторного добутку r_u і r_v:

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -1, -2).$$

З того, що $[r_u, r_v] \neq 0$, випливає, що r_u і r_v неколінеарні, тобто дійсно утворюють базис деякої площини. Ця властивість якраз і зветься за означенням регулярністю поверхні у M. Також можна знайти одиничний нормальний вектор

$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2)$$

(це, звичайно, можна зробити лише у регулярній точці). За побудовою, нормальний вектор поверхні є нормальним до її дотичної площини у відповідній точці, тому рівняння цієї площини має вигляд

$$[r_u, r_v]^1(x - x_0) + [r_u, r_v]^2(y - y_0) + [r_u, r_v]^3(z - z_0) = 0$$

або

$$n^1(x - x_0) + n^2(y - y_0) + n^3(z - z_0) = 0$$

або просто

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки M. В нашому випадку це буде

$$3(x-3)+(-1)(y-1)+(-2)(z-2)=0,$$

$$3x-y-2z-4=0.$$

У свою чергу, нормаль (нормальна пряма) до поверхні у M проходить через цю точку у напрямку вектора нормалі, тому її рівняння мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{[r_u, r_v]^1}=\frac{y-y_0}{[r_u, r_v]^2}=\frac{z-z_0}{[r_u, r_v]^3}$$

або

$$\frac{x-x_0}{n^1}=\frac{y-y_0}{n^2}=\frac{z-z_0}{n^3}.$$

Отже, у нас це

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}.$$

Розглянемо тепер іншу параметризацію цієї поверхні. Зауважимо, що точка (x, y, z) їй належить тоді й тільки тоді, коли

$$z=\frac{1}{4}(x^2-y^2)$$

(перевірте це), тобто це явно задана поверхня (гіперболічний параболоїд). Згадаємо, що для явно заданої поверхні $z=f(x, y)$ ми використовуємо параметризацію

$$r(x, y)=(x,\ y,\ f(x, y)).$$

Для неї базис дотичних просторів складають вектори

$$r_x=(1,\ 0,\ f_x)$$

і

$$r_y=(0,\ 1,\ f_y).$$

Зауважимо, що вони завжди неколінеарні, тобто будь-яка явно задана поверхня є регулярною. Знайдемо нормальний вектор у загальному вигляді:

$$[r_x, r_y]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=(-f_x, -f_y, 1),$$

$$n=\frac{[r_x, r_y]}{|[r_x, r_y]|}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,\ -f_y,\ 1).$$

У нас $f(x,y)=\frac{1}{4}(x^2-y^2)$, отже

$$[r_x, r_y] = \left(-\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 1\right).$$

Остільки $x=3$, $y=1$ в точці M, у ній

$$[r_x, r_y] = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Цей вектор колінеарний вектору $(3,-1,-2)$, що ми отримали раніше, тому дійсно маємо ті ж дотичну площину та нормаль. І взагалі, дотична площина і нормаль у точці поверхні не залежать від вибору регулярної параметризації в околі цієї точки.

Задача 3.4. Розглянемо прямий гелікоїд

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = a\,v,$$

де константа $a>0$. Його параметризація

$$r(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ a\,v).$$

визначена на $\mathbb{R}^2$. Діємо як у попередній задачі (тільки у загальній точці поверхні замість конкретної):

$$r_u = (\cos v,\ \sin v,\ 0),$$

$$r_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ a),$$

$$[r_u, r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = (a\sin v,\ -a\cos v,\ u),$$

$$|[r_u, r_v]| = \sqrt{(a\sin v)^2 + (-a\cos v)^2 + u^2} = \sqrt{a^2+u^2}.$$

$$n = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a\sin v,\ -a\cos v,\ u).$$

Зауважимо, що $a^2+u^2>0$ для будь-якого u, тому ця поверхня регулярна. Отже, дотичні площини мають рівняння

$$a\sin v(x - a\cos v) - a\cos v(y - a\sin v) + u(z - a\,v) = 0,$$

$$a\sin v\,x - a\cos v\,y + u\,z - a\,uv = 0,$$

а нормалі – рівняння

$$\frac{x - a\cos v}{a\sin v} = \frac{y - a\sin v}{-a\cos v} = \frac{z - a\,v}{u}.$$

Нагадаємо, що координатні лінії поверхні, що параметризована вектор-функцією r – це криві, уздовж яких зберігається одна з локальних координат. Тобто координатна лінія

$u = u_0$ – це крива $v \mapsto r(u_0, v)$, а $v = v_0$ – крива $u \mapsto r(u, v_0)$. Зокрема, r_v і r_u є дотичними векторами до цих координатних ліній відповідно. Для нашої поверхні у першому з цих випадків, коли координата $u = u_0$ постійна, а v змінюється, відповідна лінія буде гвинтовою, а нормаль з напрямним вектором $(a\sin v,\ -a\cos v,\ u_0)$ обертатиметься навколо осі Oz. Уздовж координатної лінії $v = v_0$, що є прямою, паралельною площині Oxy, (прямолінійної твірної гелікоїда) нормаль буде обертатися у нормальній площині цієї твірної, зберігаючи свою ортогональну проекцію на Oxy з напрямним вектором $(\sin v_0,\ -\cos v_0,\ 0)$.

Задача 3.5. Нехай $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функція двох змінних, $a, b \in \mathbb{R}$. У цій задачі треба переконатися у тому, що усі дотичні площини до поверхні

$$f(x - az, y - bz) = 0$$

паралельні деякому фіксованому напрямку. Як бачимо, поверхня тут є неявно заданою, тобто її рівняння має вигляд

$$F(x, y, z) = 0,$$

де $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ – гладка функція (в нашому випадку гладкість F, очевидно, еквівалентна гладкості f). Як відомо, за умови регулярності F (тобто $(F_x, F_y, F_z) \neq 0$ у всіх точках, у яких $F = 0$) неявно задана поверхня є регулярною, і в кожній її точці (x_0, y_0, z_0) градієнт

$$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)) \neq 0$$

є нормальним вектором, тобто дотична площина поверхні в цій точці має рівняння

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) = 0,$$

а нормаль –

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

(аналогічно до неявно заданої кривої у площині).

У нашому випадку

$$F(x, y, z) = f(x - az, y - bz),$$

тому

$$F_x = f_u,\ F_y = f_v,\ F_z = -a\,f_u - b\,f_v,$$

де через u і v позначаємо аргументи f. Зокрема, для регулярності цієї поверхні достатньо виконання умови $(f_u, f_v) \neq 0$ у тих точках, де $f = 0$. Залишилося помітити, що вектор нормалі поверхні $(f_u, f_v, -a\,f_u - b\,f_v)$ завжди ортогональний до постійного вектора $(a, b, 1) \neq 0$, що і задає напрямок, якому паралельні усі дотичні площини поверхні.

Задача 3.8. Розглянемо поверхню дотичних регулярної кривої ρ з задачі 2.14. Будемо вважати параметр s кривої натуральним. Тоді поверхня має параметризацію

$$r(s, v) = \rho(s) + v\,\rho'(s) = \rho(s) + v\,\tau(s).$$

Використовуючи формули Френе, отримуємо:

$$r_s = \tau + vk\,\nu,$$

$$r_v = \tau,$$

$$[r_s, r_v] = \begin{vmatrix} \tau & \nu & \beta \\ 1 & vk & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -vk\,\beta.$$

Зокрема, регулярність тут порушується при $v = 0$ (це точки вихідної кривої ρ, що може утворювати "ребро" на поверхні дотичних) і там, де $k(s) = 0$ (якщо кривина нульова на деякому проміжку, то на ньому крива є прямою, і поверхня дотичних також вироджується у цю пряму). У інших точках $r(s, v)$ вектор нормалі, таким чином, коректно визначений і колінеарний $\beta(s)$, тому дотична площина поверхні, що проходить через точку $r(s, v) = \rho(s) + v\,\tau(s)$ ортогонально до цього вектора має рівняння (у векторній формі)

$$\langle r - \rho(s) - v\,\tau(s), \beta(s)\rangle = 0,$$

де $r = (x, y, z)$ позначає довільну точку цієї площини. Рівняння нормальної прямої при цьому можно записати у параметричній векторній формі:

$$r = \rho(s) + v\,\tau(s) + t\,\beta(s),$$

де $t \in \mathbb{R}$ – параметр нормалі.

Оскільки $\tau(s)$ ортогональний до $\beta(s)$, рівняння дотичної площини можна спростити:

$$\langle r - \rho(s), \beta(s)\rangle = 0.$$

Це означає, що ця площина є щільнодотичною площиною кривої ρ у точці $\rho(s)$. Зокрема, дотична площина одна й та сама при фіксованому s для усіх v, тобто в усіх точках координатної лінії $s = s_0$ – дотичної до ρ, що є прямолінійною твірною нашої поверхні.

Зауважимо також, що сама твірна при цьому лежить у цій площині. І взагалі, пряма, що лежить на поверхні, лежить у дотичних площинах цієї поверхні у всіх точках прямої. Дійсно, дотична площина у точці містить дотичні до всіх кривих, що лежать у поверхні і проходять через цю точку, а дотичною до прямої є вона сама.

Задача 3.6. Трубчата поверхня радіуса R навколо регулярної кривої ρ має параметризацію
$$r(s, \varphi) = \rho(s) + R\cos\varphi\,\nu(s) + R\sin\varphi\,\beta(s),$$
де радіус $R > 0$, а $\{\tau, \nu, \beta\}$ – репер Френе кривої ρ. Параметр s на ній будемо вважати натуральним. Тоді з формул Френе випливає, що

$$r_s = \rho' + R\cos\varphi\,\nu' + R\sin\varphi\,\beta' = \tau + R\cos\varphi(-k\,\tau + \varkappa\,\beta) + R\sin\varphi(-\varkappa\,\nu),$$

$$r_\varphi = -R\sin\varphi\,\nu + R\cos\varphi\,\beta,$$

де, як завжди, k і $\varkappa$ – це кривина і скрут ρ відповідно (ці ж стандартні позначення з теорії кривих будемо використовувати і в подальших задачах). Оскільки репер Френе є ортонормованим додатно орієнтованим базисом, вектор нормалі до цієї поверхні можна знайти за формулою

$$[r_s, r_\varphi] = \begin{vmatrix} \tau & \nu & \beta \\ 1 - Rk\cos\varphi & -R\varkappa\sin\varphi & R\varkappa\cos\varphi \\ 0 & -R\sin\varphi & R\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 - Rk\cos\varphi)R\cos\varphi\,\nu - (1 - Rk\cos\varphi)R\sin\varphi\,\beta.$$

Бачимо, що тут регулярність порушується в точках, де $Rk\cos\varphi = 1$, а в інших одиничний нормальний вектор з точністю до знака дорівнює $\cos\varphi\,\nu + \sin\varphi\,\beta$. Для довільної кривої ρ він не буде ортогональним ніякому фіксованому напрямку. У якості контрприклада можна взяти пласке коло
$$\rho = (\cos s,\, \sin s,\, 0),$$