Ex. 1. $S^n \cong O(n+1)/O(n) \cong SO(n+1)/SO(n)$ и $\mathbb{R}P^n \cong SO(n+1)/O(n) \cong$
$\cong O(n+1)/O(1)\times O(n)$. Для всех этих пр-в $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1)$, $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{so}(n)$:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{array}{c|cc} & n & 1 \\ \hline n & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \;\middle|\; x \in \mathfrak{so}(n) \right\}$$ (тут $n \geq 2$). Выберем на

$\mathfrak{so}(n+1)$ форму $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(x\cdot y) = -\frac{1}{2(n-1)} K(x,y)$

Т.к. K инвариантна и отриц. определена, это инвариантное скал. произв, превращающее S^n и $\mathbb{R}P^n$ в нормальные однор. пр-ва. Его ортонорм. базис состоит из матриц e_{ij}, $1 \leq i < j \leq n+1$: $e_{ij} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ (остальные эл-ты — 0).

В ч-ти базис $p = h^{\perp}$ образуют $e_i = e_{i,n+1} = \begin{array}{c|c} & i \\ i & \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ldots -1 \ldots 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$, $i = \overline{1,n}$.

Т.к. $\forall\, i \neq j$ $[e_i, e_j] = \begin{array}{c|c} & j \\ i & \begin{pmatrix} & -1 & \end{pmatrix} \end{array} - \begin{array}{c|c} & i \\ j & \begin{pmatrix} -1 & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{cases} -e_{ij}, & i < j \\ e_{ji}, & i > j \end{cases} \in h$, по формуле из пред. Пр. $K(e_i, e_j) = \frac{1}{4} |\underbrace{[e_i, e_j]^p}_{0}|^2 + |\underbrace{[e_i, e_j]^h}_{\pm e_{ij}}|^2 = 1.$

Тогда и все секц. кривизны в $\forall$ точке равны 1, т.е. мы получили на S^n и $\mathbb{R}P^n$ их обычные метрики.

2. По аналогии с $\mathbb{R}P^n$, комплексное проективное пр-во $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (мн-во комплексных прямых,

прох. через 0 в $\mathbb{C}^{n+1}$) или S^{2n+1}/S^1 (ед. сфера $\mathbb{C}^{n+1}$, факторизованная по пересечениям с прямыми). На нём транзитивно действуют $U(n+1)$ и $SU(n+1)$ (сохраняют сферу, т.к. сохраняют эрмитово скал. произв. $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} z^j \overline{w^j}$),
сохраняют класс экв-сти в сфере, умножая на $e^{i\varphi}$. Упр. Действие транзитивно.
и для $q = (0:\dots:0:1)$ $(= [(0,\dots,0,1)])$ соотв. стабилизаторы
$(\{(0,\dots,0,e^{i\varphi}),\ \varphi\in[0,2\pi)\})$

$$U(n+1)_q = \left\{ \begin{array}{c|cc} & n & 1 \\ \hline n & A & 0 \\ 1 & 0 & e^{i\varphi} \end{array} \;\Big|\; A \in U(n),\ \varphi\in[0,2\pi) \right\} \cong U(n)\times U(1)$$

(т.е. $\mathbb{CP}^n \cong U(n+1)/U(n)\times U(1) \cong SU(n+1)/U(n)$.)

$$SU(n+1)_q = \left\{ \begin{array}{c|cc} & n & 1 \\ \hline n & A & 0 \\ 1 & 0 & \overline{\det A} \end{array} \;\Big|\; A\in U(n) \right\} \cong U(n)$$

(тут эл-т справа внизу выбран так, чтобы определитель всей м-цы равнялся 1; для $A\in U(n)$ $|\det A| = 1$, поэтому $\det A\,\overline{\det A} = 1$). Соотв. подалгебры Ли:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & \alpha i \end{array}\right) \;\Big|\; x\in \mathfrak{u}(n),\ \alpha\in\mathbb{R} \right\} \simeq \mathfrak{u}(n)\oplus\mathfrak{u}(1) \text{ в } \mathfrak{u}(n+1), \text{ и}$$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{Tr}\,x \end{array}\right) \,\middle|\, x \in \mathfrak{u}(n) \right\} \simeq \mathfrak{u}(n) \quad \text{в} \quad \mathfrak{su}(n+1).$$

Для обоих случаев введём скал. произв. $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, xy$.

Как и на $\mathfrak{so}(n+1)$, оно симметрично, билинейно (над $\mathbb{R}$), инвариантно ($\mathrm{Tr}([x,y]z) = \mathrm{Tr}(x[y,z])$ выводится из св-в Tr ан-но док-ву инвариантности формы Киллинга) и положительно определено: скажем, в случае $\mathfrak{u}(n+1)$ его ортонорм. базис состоит из
$$e_{jk} = \begin{array}{c} \\ j \\ k \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} j & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \end{array}, \quad f_{jk} = \begin{array}{c} \\ j \\ k \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} j & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} \end{array}$$
(остальные нули), $1 \le j < k \le n+1$, и
$$h_j = \begin{array}{c} \\ j \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \sqrt{2}\,i & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Упр. 1. Как построить ортонорм. базис для $\mathfrak{su}(n+1)$?

2. Как $\langle \cdot, \cdot \rangle$ связано с формой Киллинга $\mathfrak{u}(n+1)$?

В обоих случаях
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\perp} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & 0 & & \begin{matrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix} \\ \hline -\bar{x}^1 & \ldots & -\bar{x}^n & 0 \end{array}\right) \,\middle|\, (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{C}^n \right\}$$

Пусть ортонорм. паре $\xi, \eta \in T_q \mathbb{C}P^n$ соответствуют м-цы $x, y \in P$, заданные наборами $(x^1, \ldots, x^n), (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{C}^n$ соотв. Тогда

$$xy = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix} \\ \hline -\overline{x^1} \ \ldots \ -\overline{x^n} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{matrix} \\ \hline -\overline{y^1} \ \ldots \ -\overline{y^n} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -x^1\overline{y^1} & \ldots & -x^1\overline{y^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -x^n\overline{y^1} & \ldots & -x^n\overline{y^n} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & -\sum\limits_{j=1}^n \overline{x^j} y^j \end{array}\right),$$

поэтому $0 = \langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} xy = \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^n \left(x^j \overline{y^j} + \overline{x^j} y^j \right)$, и ан-но

$1 = |x|^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} x^2 = \sum\limits_{j=1}^n x^j \overline{x^j} = \sum\limits_{j=1}^n |x^j|^2$, и $1 = |y|^2 = \sum\limits_{j=1}^n |y^j|^2$.

Условие $\sum\limits_{j=1}^n x^j \overline{y^j} = -\sum\limits_{j=1}^n \overline{x^j} y^j = -\sum\limits_{j=1}^n \overline{x^j \overline{y^j}}$ означает, что это чисто мнимое число. Если $x^j = \alpha^j + \beta^j i$, $y^j = \gamma^j + \delta^j i$, $j = \overline{1, n}$, то

$\sum\limits_{j=1}^n x^j \overline{y^j} = \operatorname{Im}\left(\sum\limits_{j=1}^n x^j \overline{y^j} \right) = \sum\limits_{j=1}^n \left(-\alpha^j \delta^j + \beta^j \gamma^j \right) i$. В ч-ти,

$\left| \sum\limits_{j=1}^n x^j y^j \right|^2 = \left| \sum\limits_{j=1}^n \left(\alpha^j \delta^j - \beta^j \gamma^j \right) \right|^2 \leq \left[\begin{matrix} \text{нер-во} \\ \text{К.-Б.-Ш.} \end{matrix} \right] \leq \left(\frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^n \left({\alpha^j}^2 + {\delta^j}^2 + {\beta^j}^2 + {\gamma^j}^2 \right) \right)^2 =$

$= \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(|x^j|^2+|y^j|^2\right)\right)^2 = 1$ Найдем скобку Ли:

$$[x,y] = xy - yx = \left(\begin{array}{ccc|c} -x^1\overline{y^1} & \dots & -x^1\overline{y^n} & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ -x^n\overline{y^1} & \dots & -x^n\overline{y^n} & \\ \hline & 0 & & -\sum_{j=1}^{n}\overline{x^j}y^j \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|c} -y^1\overline{x^1} & \dots & -y^1\overline{x^n} & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ -y^n\overline{x^1} & \dots & -y^n\overline{x^n} & \\ \hline & 0 & & -\sum_{j=1}^{n}\overline{y^j}x^j \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \left(\overline{x^k}y^j - x^j\overline{y^k}\right)_{j,k=1}^{n} & 0 \\ \hline 0 & \sum_{j=1}^{n}\left(x^j\overline{y^j} - \overline{x^j}y^j\right) \end{array}\right) \in \mathfrak{h} \quad (\text{и} \in su(n+1) \text{ в обоих сл.})$$

Т.е. $[x,y]^p = 0$, и

$$|[x,y]^{\mathfrak{h}}|^2 = |[x,y]|^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[x,y]^2 = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\overline{x^k}y^j - x^j\overline{y^k}\right)\left(\overline{x^j}y^k - x^k\overline{y^j}\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{j,k=1}^{n}\left(x^j\overline{y^j}-\overline{x^j}y^j\right)\left(x^k\overline{y^k}-\overline{x^k}y^k\right)}_{\text{это просто квадрат правого нижнего эл-та}} = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\Big(\overline{x^j}\,\overline{x^k}y^jy^k -$$

$$- x^j\overline{x^j}y^k\overline{y^k} - x^k\overline{x^k}y^j\overline{y^j} + x^jx^k\overline{y^j}\,\overline{y^k} + x^jx^k\overline{y^j}\,\overline{y^k} - \overline{x^j}x^ky^j\overline{y^k} -$$

$$- x^j\overline{x^k}\,\overline{y^j}y^k + \overline{x^j}\,\overline{x^k}y^jy^k\Big) = \left(\sum_{j=1}^{n}x^j\overline{x^j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y^k\overline{y^k}\right) - \sum_{j,k=1}^{n}$$

$$\left(x^jx^k\overline{y^j}\,\overline{y^k} + \overline{x^j}x^ky^j\overline{y^k} + x^j\overline{x^k}\,\overline{y^j}y^k + \overline{x^j}\,\overline{x^k}y^jy^k\right) + \frac{3}{2}\sum_{j,k=1}^{n}$$

$$\left(\overline{x^j}\, x^k\, y^j\, \overline{y^k} + x^j\, \overline{x^k}\, \overline{y^j}\, y^k\right) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{k} \left(x^j \overline{y^j} + \overline{x^j}\, y^j\right)\right)^2 +$$

$$+ 3\left(\sum_{j=1}^{n} x^j \overline{y^j}\right)\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{x^k}\, y^k\right)}_{=\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} x^k \overline{y^k}\right)}} = 1 + 3\left|\sum_{j=1}^{n} x^j \overline{y^j}\right|^2$$

В силу рассуждений выше, это число принимает значения между 1 и 4. Итак, $K(\xi, \eta) = [$ортонорм. базиса, пр-во нормальное$] = \frac{1}{4}\left|[x,y]^p\right|^2 + \left|[x,y]^k\right|^2 = \left|[x,y]\right|^2 \in [1,4]$.

Часто домножают метрику на константу, чтобы получить $K \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

__Упр.__ Описать кватернионное проективное пр-во $\mathbb{H}P^n$ (как вещественное гладкое многообразие) и показать, что оно представляется в виде $Sp(n+1)/Sp(1)\times Sp(n)$, где $Sp(n)$ — аналог $O(n)$ и $U(n)$ для кватернионов (симплектическая группа). Чему равны его кривизны (и нормально ли это пр-во)?

3. $Gr_m(n) \cong O(n) / O(m)\times O(n-m)$ – грассманиан m-мерных вект. подпр-в в $\mathbb{R}^n$ (заметим, что при $m=1, n-1$ это $O(n) / O(1)\times O(n-1) = \mathbb{R}P^{n-1}$). Для $q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{m+1} = \ldots = x^n = 0\}$

$$O(n)_q = \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \end{array} \;\middle|\; A \in O(m), B \in O(n-m) \right\} \cong O(m) \times O(n-m),$$

поэтому

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & y \end{array}\right) \end{array} \;\middle|\; x \in \mathfrak{so}(m), y \in \mathfrak{so}(n-m) \right\} \cong \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{so}(n-m).$$

Введём на $O(n)$ ту же билив. ф-цу, что и в 1., скал. произв. $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} xy$ на $\mathfrak{so}(n)$ $(n \geq 3)$. Таким образом, на $Gr_m(n)$ появляется риманова структура нормального однор. пр-ва. При этом

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^\perp = \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline -x^T & 0 \end{array}\right) \end{array} \;\middle|\; x \in \operatorname{Mat}(m, n-m, \mathbb{R}) \right\}$$ имеет ортонорм.

базис $\{e_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq j \leq n}}$ в обозначениях 1.

Поставим в соотв. лин. независимой паре $\xi, \eta \in T_q Gr_m(n)$

м-цы $\left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline -x^T & 0 \end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{c|c} 0 & y \\ \hline -y^T & 0 \end{array}\right)$ из $\mathfrak{p}$. Их скобка Ли:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline -x^T & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & y \\ \hline -y^T & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & y \\ \hline -y^T & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline -x^T & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -xy^T & 0 \\ \hline 0 & -x^Ty \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} -yx^T & 0 \\ \hline 0 & -y^Tx \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} yx^T - xy^T & 0 \\ \hline 0 & y^Tx - x^Ty \end{array}\right) \in \mathfrak{h}$$ (Упр. Проверить, что на диагонали — м-цы из $so(m)$ и $so(n-m)$ соотв.). Скалярный квадрат этой м-цы равен

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\left(\begin{array}{c|c} yx^T - xy^T & 0 \\ \hline 0 & y^Tx - x^Ty \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} yx^T - xy^T & 0 \\ \hline 0 & y^Tx - x^Ty \end{array}\right)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\begin{array}{c|c} (yx^T - xy^T)^2 & 0 \\ \hline 0 & (y^Tx - x^Ty)^2 \end{array}\right) = -\frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}(yx^T - xy^T)^2 + \operatorname{Tr}(y^Tx - x^Ty)^2\right).$$

Для кососимм. м-цы ξ $\operatorname{Tr}\xi^2 = \sum_{i,j} \xi_{ij}\xi_{ji} = -\sum_{i,j}\xi_{ij}^2 = -|\xi|^2$. Наконец,

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline -x^T & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & y \\ \hline -y^T & 0 \end{array}\right)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\begin{array}{c|c} -xy^T & 0 \\ \hline 0 & -x^Ty \end{array}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(xy^T + x^Ty)$$

и ан-но $|\xi|^2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(xx^T + x^Tx) = |x|^2$ (т.е. $\sum_{i,j} x_{ij}^2$), и

$|\eta|^2 = |y|^2$. Если обозначать $\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(xy^T + x^Ty) = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}$ просто через $\langle x, y\rangle$, получим (в силу нормальности) следующую ф-лу для секц. кривизны:

$$K(\xi,\eta) = \frac{\frac{1}{2}|yx^T - xy^T|^2 + \frac{1}{2}|y^Tx - x^Ty|^2}{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

__Упр.__ При $2 \leq m \leq n-2$ $K(\xi,\eta) \in [0,2]$ (см. статьи Y.-C. Wong).

__Упр.__ Описать комплексный и кватернионный аналоги грассманиана: $U(n)/U(m)\times U(n-m)$ и $Sp(n)/Sp(m)\times Sp(n-m)$ соотв. Чему равны их ф-лы для кривизны?

__Ч.__ Можно ограничиться ориентированными m-мерными подпр-ми в $\mathbb{R}^n$. Их мн-во $G_m^+(n)$ описывается как $SO(n)/SO(m)\times SO(n-m)$ (т.к. должны сохраняться ориентации), и кривизны совпадают с кривизнами

$\widetilde{Gr}_m(n)$ (т.к. в алгебрах Ли имеем ту же структуру).

В ч-ти, $Gr_1^+(n) \cong Gr_{n-1}^+(n) \cong SO(n)/SO(1)\times SO(n-1) \cong S^{n-1}$.

__5.__ E^n – тоже риманово однор. пр-во, т.к. на нём транзитивно действует $\mathbb{R}^n$ паралл. переносами. Т.к. действие свободное, получаем стр. $E^n = \mathbb{R}^n/\{0\} = \mathbb{R}^n$ – это гр. Ли с биинв. м-кой, плоская. Но можно рассмотреть и полную группу изометрий $Iso(n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ и группу изом. сохр. ориентацию $Iso^+(n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in SO(n), b \in \mathbb{R}^n\}$. Для этих групп подгр. изотропии изоморфны $O(n)$, $SO(n)$ соотв., и $E^n \cong Iso(n)/O(n) \cong Iso^+(n)/SO(n)$.

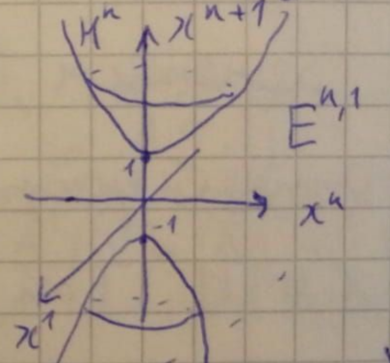
$\boxed{\left\{\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}}$

__Упр.__ Описать $Iso(n)$, $Iso^+(n)$ как матр. группы, найти их алгебры Ли и убедиться, что E^n в таком описании плоское.

пр-во Минковского

6. Рассмотрим $E^{n,1}$ — $\mathbb{R}^{n+1}$ с псевдоевклидовой м-кой $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i - x^{n+1}y^{n+1}$. Его группа лин. изометрий изоморфна $O(n,1) = \{A \in Mat(n+1,\mathbb{R}) \mid A I_{n,1} A^T = A^T I_{n,1} A = I_{n,1}\}$, где $I_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

(это их м-цы). В ч-ти, $O(n,1)$ сохраняет двуполостный гиперболоид $\{x \mid \langle x,x\rangle = -1\}$. Её связная комп. единицы $O(n,1)^\circ$ $(=: SO(n,1)$, также обозначается $O(n,1)^{\uparrow}_{+}$, т.к. сохраняет пространственную и временную ориентации, подробности см. в Кострикин, Манин, Лин. алгебра и геометрия) сохраняет верхнюю полу $H^n := \{x \mid \langle x,x\rangle = -1,\ x^{n+1} > 0\}$.



((⇔) компонент лин. св-ти)

Утв. Это действительно одна из двух св. компонент гиперболоида.

Действительно, $\forall x \in H^n$, $A \in SO(n,1)$ $\exists$ непр. путь $\gamma \in C([0,1], O(n,1))$: $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = A$. Тогда $t \mapsto \gamma(t)x$ —

Непр. путь в гиперболоиде, соединяющий x и Ax, т.е. Ax лежит в той же комп. лин. св-ти H^n.

Кроме того, $SO(n,1)$ действует на H^n транзитивно: скажем, для $x_0 = (0,\dots,0,1) \in H^n$ и $\forall\, x = (x^1,\dots,x^{n+1}) \in H^n$ $\exists\, A \in SO(n,1)$: $Ax_0 = x$, т.е. A имеет вид $\begin{pmatrix} & x^1 \\ & \vdots \\ \dots & x^{n+1} \end{pmatrix}$ (Упр.).

Заметим, что метрика $E^{n,1}$ индуцирует на H^n положительно определённую I фунд. форму: $\forall$ лок. коорд. $(u^1,\dots,u^n)$ в окр-ти $x \in H^n$ (на $U \subset H^n$) из $\langle x, x\rangle = -1$ следует $\langle x_i, x\rangle = 0$, $i = \overline{1,n}$ (где x_i — образ $\frac{\partial}{\partial u^i}$ под действием дифференциала вложения), т.е. $T_x H^n = x^\perp$. Т.к. $\langle x, x\rangle = -1$, $\forall\, 0 \neq \xi \in T_x H^n$ тогда $\langle \xi, \xi\rangle > 0$ (Упр.). Можно непосредственно проверить в каких-нибудь лок. координатах (скажем, для явного задания $x^{n+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 + 1}$), что это м-ка постоянной секц. кривизны -1, т.е.

H^n – гиперболическое пр-во (очевидно, оно диффеоморфно $\mathbb{R}^n$) (Упр.)
(метрика Минковского)

Описанная конструкция называется моделью гиперболической геометрии на гиперболоиде и аналогична построению метрики полож. пост. секц. кривизны на $S^n \subset E^{n+1}$.
Мы проверим постоянство кривизны, используя однор. структуру.

Итак, H^n – однор. пр-во группы Ли $SO(n,1)$. Для $x_0 = (0,\dots,0,1)$ стабилизатор состоит из м-ц вида $A = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, и
$A\, I_{n,1} A^T = I_{n,1}$ даёт $\hat{A} \in O(n)$, $a = 0$ $\left(\begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}^T & a^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}\hat{A}^T & \hat{A}a^T \\ a\hat{A}^T & aa^T - 1 \end{pmatrix} \right)$.
Т.к. в силу непрерывности $\underbrace{\det}_{\text{и } A \in O(n,1) \Rightarrow \det A = \pm 1 \text{ ан-но } O(n)}$ м-цы из $SO(n,1)$ должны иметь определитель 1 (или т.к. $\hat{A}$ отвечает за сохранение пространственной ориентации), $\hat{A} \in SO(n)$. Итак,
$H = SO(n,1)_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \hat{A} \in SO(n) \right\} \cong SO(n)$ (и, как всегда, этот изоморфизм групп Ли верен и для остальных x).

Получили $H^n \cong SO(n,1)/SO(n)$. (Упр. Можно ли выбрать бо́льшую подгруппу $O(n,1)$, сохраняющую H^n? Какая тогда будет стабилизатор?) Для алгебры Ли $\mathfrak{g} = o(n,1)$ (или $so(n,1)$ по аналогии с $so(n+1)$) из $A\, I_{n,1} A^T = I_{n,1}$ ан-но $O(n+1)$ получаем

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline z & \alpha \end{array}\right) \end{array} \in \mathfrak{g} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline z & \alpha \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} x^T & z^T \\ \hline y^T & \alpha \end{array}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

(тут $x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}^n$ – в-р-столбец, $z \in \mathbb{R}^n$ – в-р-строка, $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\Leftrightarrow 0 = \left(\begin{array}{c|c} x & -y \\ \hline z & -\alpha \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} x^T & z^T \\ \hline -y^T & -\alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} x + x^T & -y + z^T \\ \hline z - y^T & -2\alpha \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in so(n) \\ y = z^T \Leftrightarrow z = y^T \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

(Обратная импликация следует из экспоненциальной конструкции – Упр.). В ч-ти,

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \;\middle|\; x \in so(n) \right\} \simeq so(n).$$

Попробуем ввести на $O(n,1)$ то же ск. произведение, что и на $so(n+1)$. В ч-ти, для скал. квадратов имеем:

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline y^T & 0\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline y^T & 0\end{array}\right)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\begin{array}{c|c} x^2+yy^T & xy \\ \hline y^Tx & y^Ty\end{array}\right) =$$

$$= \left[\text{для } x=(x_{ij})_{i,j=1}^n \text{ и } y=\begin{pmatrix} y^1\\ \vdots \\ y^n\end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}x_{ji} + 2\sum_{i=1}^n (y^i)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^n (y^i)^2 = \frac{1}{2}|x|^2 - |y|^2 \left(= -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} x^2 - |y|^2\right).$$

Т.е. это невырожденная, но не знакоопределённая форма (сигнатуры $\left(\frac{n(n-1)}{2}, n\right)$ на $\frac{(n+1)n}{2}$-мерной $\mathfrak{g}$).

__Упр.__ Эта форма пропорциональна форме Киллинга $\mathfrak{o}(n,1)$ с отрицательным коэффициентом.

(Т.е. $SO(n,1)$ полупроста, но некомпактна). "Исправим" эту форму, положив $\left\langle \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline y^T & 0\end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \hline \tilde{y}^T & 0\end{array}\right)\right\rangle := -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(x\tilde{x}) + \langle y, \tilde{y}\rangle$.

$= y^T\tilde{y}$

(где $\langle y, \tilde{y}\rangle = \sum_{i=1}^n y^i\tilde{y}^i$ – "обычное" скал. произв.). Это уже скал. произведение, но неинвариантное. Тем не менее, оно Ad_H-инвариантно. В силу связности $H \cong SO(n)$

для этого достаточно проверить

$$\left\langle \left[\begin{pmatrix} x & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{y}^T & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x & y \\ y^T & 0 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{y}^T & 0 \end{pmatrix} \right] \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} xz & 0 \\ y^T z & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} zx & zy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x,z] & -zy \\ y^T z & 0 \end{pmatrix} \qquad = -y^T z^T$$

$$= \tilde{y}^T z^T \qquad \begin{pmatrix} z\tilde{x} & z\tilde{y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} z & 0 \\ \tilde{y}^T z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [z,\tilde{x}] & z\tilde{y} \\ -\tilde{y}^T z & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}([x,z]\tilde{x}) \cancel{\quad} - \langle zy, \tilde{y} \rangle \qquad -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(x[z,\tilde{x}]) + \langle y, z\tilde{y} \rangle.$$

Первые слагаемые равны в силу св-в Tr, и $\langle y, z\tilde{y} \rangle \overset{y^T z \tilde{y}}{=}$ $= \langle z^T y, \tilde{y} \rangle = -\langle zy, \tilde{y} \rangle$.

$$(z^T y)^T \tilde{y} = y^T z \tilde{y}$$

Итак, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – Ad_H-инв. скал. произв., оно задаёт левоинв. и H-правоинв. м-ку на $SO(n,1)$ (которая на $H \cong SO(n)$ совпадает с рассмотренной выше). Ортонорм. базис состоит из

$$e_{ij} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

(остальные нули), $1 \le i < j \le n$,

и $e_i = \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1 в i-й строке и i-м столбце), $i = \overline{1,n}$. Очевидно,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\top} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^{T} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Индуцируем м-цу на $H^n \cong SO(n,1)/SO(n)$ (т.е. опуская) этой $\langle \cdot , \cdot \rangle$. В отличие от предыдущих примеров, это пр-во не нормальное. Для $i \neq j$ (пусть для определённости $1 \leq i < j \leq n$):

$$K(e_i, e_j) = |U(e_i, e_j)|^2 - \langle U(e_i, e_i), U(e_j, e_j) \rangle - \frac{3}{4} |[e_i, e_j]^{\mathfrak{p}}|^2 -$$
$$- \frac{1}{2} \langle [[e_i, e_j], e_j], e_i \rangle - \frac{1}{2} \langle [[e_j, e_i], e_i], e_j \rangle .$$

Прежде всего,
$$[e_i, e_j] = \begin{array}{cc} & i \\ i & \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & 1 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & j \\ j & \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & 1 & \end{pmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & j \\ j & \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & 1 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & i \\ i & \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & 1 & \end{pmatrix} \end{array} =$$
$$= \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & i \\ j & \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = e_{ij} \in \mathfrak{h}$$
(опять на остальных местах нули).

В ч-ти, $\forall\, k = \overline{1,n}$
$$\langle U(e_i, e_j), e_k \rangle = \frac{1}{2} \Big(\langle \overset{\in \mathfrak{p}}{e_i}, \overset{\in \mathfrak{h}}{[e_k, e_j]} \rangle - \langle \overset{\in \mathfrak{h}}{[e_i, e_k]}, \overset{\in \mathfrak{p}}{e_j} \rangle \Big) = 0$$
(это верно $\forall\, i, j = \overline{1,n}$). Т.е. $U = 0$, и пр-во естественно редуктивное. В ч-ти, два первых слагаемых в ф-ле для $K(e_i, e_j)$ равны 0, третье тоже, т.к.

$[e_i, e_{\bar j}] \in h$. Наконец,

$$[[e_i, e_{\bar j}], e_{\bar j}] = [e_{i\bar j}, e_{\bar j}] = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} i & \bar j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ \bar j \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & \bar j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \bar j \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & \bar j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \bar j \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & \begin{matrix} i & \bar j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ \bar j \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{cc} & \\ \begin{matrix} i \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & \begin{matrix} i & \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} & \\ -1 & \end{pmatrix} \end{array} = e_i \quad \text{(остальные нули)}.$$

Ан-но, $[[e_{\bar j}, e_i], e_i] = [-e_{i\bar j}, e_i] = e_{\bar j}$. Итак,

$K(e_i, e_{\bar j}) = 0 - 0 - 0 - \frac{1}{2}\langle e_i, e_i\rangle - \frac{1}{2}\langle e_{\bar j}, e_{\bar j}\rangle = -1$.

Тогда и по любому напр. в $\forall$ точке $K = -1$, и H^n — действительно гиперболическое пр-во.

7. (Пример Берже (или сферы Берже)). Рассмотрим $G = S^3 \times \mathbb{R}$, S^3 — с кватернионной структурой или $SO(2)$. Тогда у g есть базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ с ненулевыми скобками

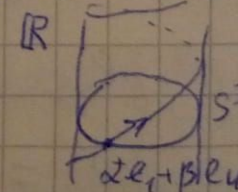
$[e_1, e_2] = 2e_3$, $[e_2, e_3] = 2e_1$, $[e_3, e_1] = 2e_2$. Определим скал. произв. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на g, положив этот базис ортонормированный. В ч-ти, это скал. произв. инвариантно и порождает на G биинв. м-ку (при этом на S^3 получается м-ка с секц. кривизнами

$$\bar{K}(e_i, e_j) = \frac{1}{4}\left|[e_i, e_j]\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\pm 2 e_k\right|^2 = 1, \text{ где } \{i,j,k\} = \{1,2,3\},$$

т.е. это риманова сумма обычной сферы S^3 и прямой E^1).

точнее, прямое произв. римановых многообразий, а сумма - метрик.

Для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\beta \neq 0$ положим $h := (\alpha e_1 + \beta e_4)\mathbb{R}$ — одномерная подалгебра Ли. Тогда $p = h^\perp$ натянуто на e, e_2, e_3, где $e = \beta e_1 - \alpha e_4$ (в ч-ти, при $\alpha = 0$ это просто сумма $g = so(3) \oplus \mathbb{R}$). Пусть H — одномерная связная подгруппа G с алгеброй Ли h. Она диффеоморфна $\mathbb{R}$ (это аналог винтовой линии на 4-мерном цилиндре $S^3 \times \mathbb{R}$).



Кроме того H замкнута (Упр.), поэтому определено однор. пр-во G/H (заметим, что H некомпактна $\Rightarrow$ действие G не эффективно), $\dim G/H = 4-1 = 3$, и, т.к. $\forall$ $x \in S^3$ $d_{(x,0)}\pi : T_x S^3 \to T_{\pi(x)} G/H$ – лин. изоморфизм (т.к. $T_x S^3 = \mathrm{span}\{e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$ трансверсально вертикальному $\alpha e_1(x) + \beta e_4(0)$), $\pi : S^3 \times \{0\} \to G/H$ – лок. диффеоморфизм, т.к. это биекция (Упр.), это диффеоморфизм: $G/H \cong S^3$.

Опустим на G/H м-ку с G. Пусть $X = \mu^1 e + \mu^2 e_2 + \mu^3 e_3$, $Y = \nu^1 e + \nu^2 e_2 + \nu^3 e_3 \in \mathfrak{p}$ (векторы и соотв. поля). Тогда $[X,Y] = 2\underbrace{(\mu^2\nu^3 - \mu^3\nu^2)}_{=:\lambda^1} e_1 + 2\beta\underbrace{(\mu^3\nu^1 - \mu^1\nu^3)}_{=:\lambda^2} e_2 + 2\beta\underbrace{(\mu^1\nu^2 - \mu^2\nu^1)}_{\lambda^3:=} e_3 = 2\lambda^1 e_1 + 2\beta\lambda^2 e_2 + 2\beta\lambda^3 e_3$. Спроектируем:

$[X,Y]^{\mathfrak{p}} = \langle [X,Y], e \rangle e + \langle [X,Y], e_2 \rangle e_2 + \langle [X,Y], e_3 \rangle e_3 =$

$= 2\beta\,(\lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3)$.

$[X,Y]^k = \langle [X,Y], \alpha e_1 + \beta e_4 \rangle (\alpha e_1 + \beta e_4) = 2\alpha \lambda^1 (\alpha e_1 + \beta e_4)$

Нормирующий множитель:

$|X|^2 |Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2 = \left((\mu^1)^2 + (\mu^2)^2 + (\mu^3)^2\right)\left((\nu^1)^2 + (\nu^2)^2 + (\nu^3)^2\right) - (\mu^1\nu^1 + \mu^2\nu^2 + \mu^3\nu^3)^2 = (\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2$.

Т.к. м-ка на G биинвариантна, G/H нормальное. Тогда его кривизна в соотв. направлении:

$$K(X,Y) = \frac{1}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}\left(\frac{1}{4}\left|[X,Y]^p\right|^2 + \left|[X,Y]^k\right|^2\right) = \frac{\beta^2\left((\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2\right) + 4\alpha^2(\lambda^1)^2}{(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2} = [\alpha^2 + \beta^2 = 1] = \frac{(1+3\alpha^2)(\lambda^1)^2 + \beta^2\left((\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2\right)}{(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2}.$$

Т.к., выбирая X и Y, можем получить $\forall\, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \in \mathbb{R}$, получаем "защемлённую" кривизну: $\beta^2 \leq K(X,Y) \leq 1 + 3\alpha^2 = 4 - 3\beta^2$.

Из св-в римановой субмерсии и биинв. м-ки (или из одного из R_4 выше), $\gamma(t) = \pi(\exp(te))$ $\in P$ — геодезическая.

тут это проекция, дальше — число

Заметим, что $\exp(2\pi\beta e) = \exp(2\pi\beta^2 e_1 - 2\pi\alpha\beta e_4) =$
$= [\alpha^2+\beta^2=1] = \exp(-2\pi\alpha(\alpha e_1+\beta e_4) + 2\pi e_1) = [[-2\pi\alpha(\alpha e_1+\beta e_4],$
$2\pi e_1] = 0] = \exp(-2\pi\alpha(\alpha e_1+\beta e_4)) \exp(2\pi e_1) = [\exp(2\pi e_1)$ — единичный, т.к. инт. траектория e_1 — большая окр-ть на S^3 длины 2π (мы знаем, что у нас S^3 радиуса 1, т.к. секц. кривизны равны 1] $= \exp(-2\pi\alpha(\alpha e_1+\beta e_4)) \in H$. Т.е. $\gamma(2\pi\beta) =$
$= eH = \gamma(0)$, и γ замкнута. Т.к. t — натуральный ($|e|=1$), это

тут это единица, а не вектор

означает, что длина замкнутой геодезической γ не больше $2\pi\beta$.

Известно, что для чётномерного риманова M, если его секц. кривизна K удовл. условию $0 < K_1 \leq K \leq K_2$

$(K_1, K_2 \in \mathbb{R})$, то длина $\forall$ замкнутой геодезической $\geq \dfrac{2\pi}{\sqrt{K_2}}$.

У нас же $2\pi\beta < \dfrac{2\pi}{\sqrt{4-3\beta^2}}$ при $0 < \beta^2 < \dfrac{1}{3}$, и $\beta^2 \leq K \leq 4-3\beta^2$,

что даёт контрпример в размерности 3. Для нечётномерного

случая это утверждение выполняется при более сильном условии

$\frac{1}{4}K_2 \leq K \leq K_2$ (у нас $\beta^2 < \frac{1}{9}(4-3\beta^2)$ при $\beta^2 < \frac{1}{3}$).