1090. Через твірну $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}$ гіперб. параболоїда $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$ і точку $(1,1,1)$ проведено площину. Знайти другу пряму її перетину з параболоїдом.

Рівняння площини через пряму і точку:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1-0 & 1-0 & 1-0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3x+4y-z=0.$$
$$3x-4y+z=0.$$

Вона дотична до пар. у (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{xx_0}{16}-\frac{yy_0}{9}-z-z_0=0$$
$$3x-4y+z=0$$

$$\frac{x_0}{3\cdot 16}=\frac{y_0}{4\cdot 9}=-1, \quad z_0=0.$$

$x_0=-48,\ y_0=-36$. Точка $(-48,-36,0)$ дійсно належить поверхні.

Рівняння прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)=2z \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)=2z \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=\mu \end{cases}$$

Підставимо $(-48,-36,0)$:

$$\begin{cases} -24\mu=0 \\ 0=\mu \end{cases}$$

$$\mu=0$$

$$\begin{cases} 0=2z \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ -24=\lambda \end{cases}$$

$$\lambda=-24$$

$$\begin{cases} -6x+8y=2z \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=-24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-4y+z=0 \\ 3x+4y+288=0. \end{cases}$$

Напрямні:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (4,3,0)$$

$$\frac{x+48}{4}=\frac{y+36}{3}=\frac{z}{0}$$

Збігається з даною $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-4,3,24)$$

$$\frac{x+48}{-4}=\frac{y+36}{3}=\frac{z}{24}.$$

Інша.

807(5) $\quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Власні знач.: $\quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ -6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 - 36 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 13) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 13$

Власні вектори:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 \sim (3, 2) \Rightarrow a_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

$$\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_2 \sim (-2, 3) \Rightarrow a_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3\tilde{x} - 2\tilde{y} \\ 2\tilde{x} + 3\tilde{y} \end{pmatrix}.$$ Підставимо:

$$\frac{4}{13}(3\tilde{x} - 2\tilde{y})^2 - \frac{12}{13}(3\tilde{x} - 2\tilde{y})(2\tilde{x} + 3\tilde{y}) + \frac{9}{13}(2\tilde{x} + 3\tilde{y})^2 - \frac{2}{\sqrt{13}}(3\tilde{x} - 2\tilde{y}) + \frac{3}{\sqrt{13}}(2\tilde{x} + 3\tilde{y}) - 2 = 0.$$

$$\left(\frac{36}{13} - \frac{72}{13} + \frac{36}{13}\right)\tilde{x}^2 + \underbrace{\left(-\frac{48}{13} - \frac{108}{13} + \frac{48}{13} + \frac{108}{13}\right)}_{\tilde{x}\tilde{y}} + \left(\frac{16}{13} + \frac{72}{13} + \frac{81}{13}\right)\tilde{y}^2 + \sqrt{13}\,\tilde{y} - 2 = 0$$

$$13\tilde{y}^2 + \sqrt{13}\,\tilde{y} - 2 = 0$$

$$13\left(\tilde{y} + \frac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$

$$13\left(\tilde{y} + \frac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\tilde{y} + \frac{1}{2\sqrt{13}} = \pm\frac{3}{2\sqrt{13}}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad \tilde{y} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Це пара паралельних прямих. Щоб знайти їхні рівняння у вихідних координатах, використаємо обернене перетворення:

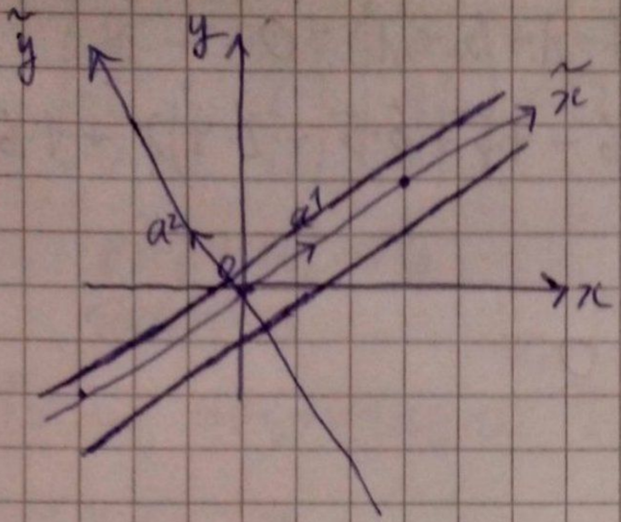
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

транспонована матриця.

Зокрема, $\tilde{y} = -\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y$. Тому рівняння прямих:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y = \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad -2x + 3y - 1 = 0, \quad 2x - 3y + 1 = 0;$$

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \quad -2x + 3y + 2 = 0, \quad 2x - 3y - 2 = 0.$$



1046(б)

Загальний вигляд рівн. поверхн. II порядку:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Матриця квадратичної частини:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

У нас:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Знайдемо характеристичний поліном $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(7-\lambda)\big((6-\lambda)(5-\lambda) - 4\big) - (-2)\underbrace{\big(-2(5-\lambda)\big)}_{-0} + 0 = 0.$$

$(7-\lambda)(6-\lambda)(5-\lambda)-4(7-\lambda+5-\lambda)=0$

$-\lambda^3+(7+6+5)\lambda^2+(-7\cdot 6-7\cdot 5-6\cdot 5+2\cdot 4)\lambda+7\cdot 6\cdot 5-$

$-4\cdot 12=0$

$\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0.$

$162=2\cdot 81=2\cdot 3^4.$

Дільники $\lambda=\pm 1$ і $\lambda=\pm 2$ не є коренями, але

$\lambda=3$ – є: $27-162+297-162=0.$

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162 & \lambda-3 \\
\lambda^3-3\lambda^2 & \lambda^2-15\lambda+54 \\
\hline
-15\lambda^2+99\lambda-162 & \\
-15\lambda^2+45\lambda & \\
\hline
54\lambda-162 & \\
54\lambda-162 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Корені $\lambda^2-15\lambda+54$:

$\lambda=\frac{1}{2}\left(15\pm\sqrt{225-216}\right)=\frac{1}{2}(15\pm 3)$

Отже, власні значення:

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=9.$

Власні вектори – базисні для канон. с.к.:

$(A-\lambda_i E)a_i=0,\ i=1,2,3.$

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda_i & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda_i & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ a_i^3 \end{pmatrix}=0$$

$\lambda_1=3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = 0$$

Далі позначаємо $a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 4\lambda - 2\mu = 0 \\ -2\lambda + 3\mu - 2\nu = 0 \\ -2\mu + 2\nu = 0 \end{cases}$$

$\mu = \nu$: $\begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ -2\lambda + 3\mu - 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = 2\lambda.$

При $\lambda = 1$ маємо $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нормуємо: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 6$, для $a_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu = 0 \\ -2\lambda - 2\nu = 0 \\ -2\mu - \nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 2\mu \\ \nu = -2\mu \end{matrix}$$

При $\mu = 1$ маємо $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Нормуємо: $a_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Зауважимо, що $a_1 \perp a_2$, як і повинно бути.

$\lambda_3 = 9$, для $a_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0.$

Можна розв'язувати цю систему, але краще знайти $a_3 = [a_1, a_2]$. Це гарантуватиме додатну орієнтованість $\{a_1, a_2, a_3\}$:

$$a_3 = [a_1, a_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(-6, 6, -3) = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$$

Він дійсно задає систему.

Т.ч., перетворення координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

$$x = \frac{1}{3}(\tilde{x} + 2\tilde{y} - 2\tilde{z})$$
$$y = \frac{1}{3}(2\tilde{x} + \tilde{y} + 2\tilde{z})$$
$$z = \frac{1}{3}(2\tilde{x} - 2\tilde{y} - \tilde{z})$$

Після підстановки:

$$\underset{\lambda_1}{3}\tilde{x}^2 + \underset{\lambda_2}{6}\tilde{y}^2 + \underset{\lambda_3}{9}\tilde{z}^2 - 6\cdot\frac{1}{3}(\tilde{x} + 2\tilde{y} - 2\tilde{z}) - 24\cdot\frac{1}{3}(2\tilde{x} + \tilde{y} + 2\tilde{z}) + 18\cdot\frac{1}{3}(2\tilde{x} - 2\tilde{y} - \tilde{z}) + 30 = 0.$$

$$3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2 - 6\tilde{x} - 24\tilde{y} - 18\tilde{z} + 30 = 0.$$

$$3(\tilde{x} - 1)^2 - 3 + 6(\tilde{y} - 2)^2 - 24 + 9(\tilde{z} - 1)^2 - 9 + 30 = 0$$

Канонічні:
$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} - 1 \\ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} - 2 \\ \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} - 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{\tilde{x}} + 1 \\ \tilde{y} &= \tilde{\tilde{y}} + 2 \\ \tilde{z} &= \tilde{\tilde{z}} + 1 \end{aligned}$$

$$3\tilde{\tilde{x}}^2 + 6\tilde{\tilde{y}}^2 + 9\tilde{\tilde{z}}^2 - 6 = 0$$

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{2} + \tilde{\tilde{y}}^2 + \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{\frac{2}{3}} = 1.$$ Еліпсоїд.

Перетворення коорд.:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}+1 \\ \tilde{\tilde{y}}+2 \\ \tilde{\tilde{z}}+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+4-2 \\ 2+2+2 \\ 2-4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Отже, канонічна с.к.: початок (центр еліпсоїда) у $(1,2,-1)$, базис $\{a_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $a_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $a_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})\}$

<u>1046(4)</u>

$$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4xz-16x-16y+10z-2=0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Власні значення:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ -5 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\left((4-\lambda)(-8-\lambda)-4\right) - (-5)\left((-5)(-8-\lambda)-4\right) + 2\cdot\left(-10 - 2(4-\lambda)\right) = 0.$$

$$-(4-\lambda)^2(8+\lambda) - 16 + 4\lambda + 200 + 25\lambda - 20 - 20 - 16 + 4\lambda = 0$$

$$-(\lambda^2 - 8\lambda + 16)(\lambda + 8) + 33\lambda + 128 = 0$$

$$-\lambda^3 - \cancel{8\lambda^2} + \cancel{8\lambda^2} + 64\lambda - 16\lambda - \cancel{128} + 33\lambda + \cancel{128} = 0$$

$$\lambda^3 - 81\lambda = 0.$$

$$\lambda(\lambda-9)(\lambda+9)=0.$$

Т.ч., $\lambda_1=9,\ \lambda_2=-9,\ \lambda_3=0.$

Власний вектор $a_1=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}-5 & -5 & 2\\ -5 & -5 & 2\\ 2 & 2 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{array}{l} 2\cdot \\ 5\cdot \end{array}\begin{cases}-5\lambda-5\mu+2\nu=0\\ 2\lambda+2\mu-17\nu=0\end{cases}$$

$$-81\nu=0 \Rightarrow \nu=0 \Rightarrow \lambda=-\mu.$$

Отже, після нормування $a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}.$

$a_2=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}13 & -5 & 2\\ -5 & 13 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=0$$

$$-\begin{cases}13\lambda-5\mu+2\nu=0\\ -5\lambda+13\mu+2\nu=0\\ 2\lambda+2\mu+\nu=0\end{cases}$$

$$18\lambda-18\mu=0 \Rightarrow \lambda=\mu \Rightarrow \nu=-\frac{1}{2}(13\lambda-5\lambda)=4\lambda.$$

Після нормування: $a_2=\frac{1}{\sqrt{1+1+16}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ -\frac{4}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

Для $a_3=\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ -5 & 4 & 2\\ 2 & 2 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=0$$

$$a_3 = [a_1, a_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}(4, 4, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$ Задов. системі.

Перетв. координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} : \begin{cases} x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \frac{2\tilde{z}}{3} \\ y = -\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \frac{2\tilde{z}}{3} \\ z = -\frac{4\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \frac{\tilde{z}}{3} \end{cases}$$

$$\quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

Підставимо:

$$\underset{\lambda_1}{9}\tilde{x}^2 - \underset{\lambda_2}{9}\tilde{y}^2 + \underset{\lambda_3}{0}\cdot\tilde{z}^2 - 16\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \frac{2\tilde{z}}{3}\right) - 16\left(-\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\tilde{z}}{3}\right) + 10\left(-\frac{4\tilde{y}}{3\sqrt{2}} + \frac{\tilde{z}}{3}\right) - 2 = 0$$

$$9\tilde{x}^2 - 9\tilde{y}^2 - 12\sqrt{2}\,\tilde{y} - 18\tilde{z} - 2 = 0$$

$$9\tilde{x}^2 - 9\left(\tilde{y}^2 + \frac{4}{3}\sqrt{2}\,\tilde{y} + \frac{8}{9}\right) + 8 - 18\tilde{z} - 2 = 0$$

$$9\tilde{x}^2 - 9\left(\tilde{y} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 18\left(\tilde{z} - \frac{1}{3}\right)$$

Канонічні коорд.: $\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} \\ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} - \frac{1}{3} \end{cases}$. $\quad \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$, $\tilde{y} = \tilde{\tilde{y}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tilde{z} = \tilde{\tilde{z}} + \frac{1}{3}$.

Канонічне рівняння:

$$\tilde{\tilde{x}}^2 - \tilde{\tilde{y}}^2 = 2\tilde{\tilde{z}}$$ – гіперболічний параболоїд.

Перетворення коорд.:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \tilde{z} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже, канонічна с.к.: початок $O(0, 0, 1)$ (вершина параболоїда), базис $\left\{ a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \right.$ $a_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}} \right),$ $\left. a_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$.