gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Лекція 11. Дотична площина регулярної поверхні

11.1. Дотична площина поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $I\!R^3$, представлену радіус-вектором:

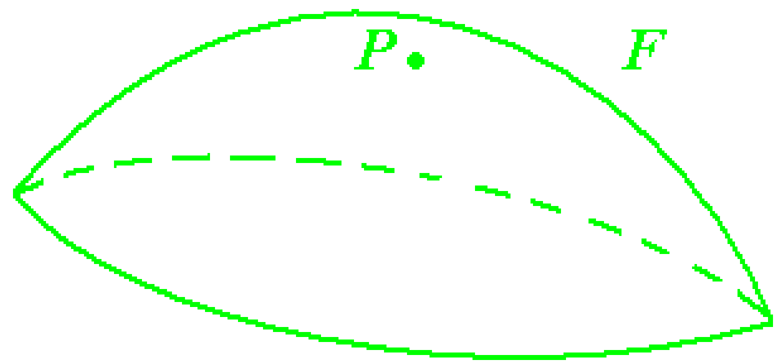
$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \ \ (u^1, u^2) \in D.$$

За умовою регулярності, вектор-функція $\vec{f}(u^1, u^2)$ є неперервно диференційовною, і при цьому $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}$ і $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}$ лінійно незалежні в кожній точці:

$$[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] \neq \vec{0}.$$

Зафіксуємо точку P з внутрішніми координатами (u_0^1, u_0^2) на поверхні F.

З точки зору простору $I\!R^3$ точка P має радіус-вектор $\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$



Розглянемо регулярну криву γ на поверхні F в $I\!R^3$, що проходить через точку P. У внутрішніх координатах на поверхні F крива γ задається у вигляді

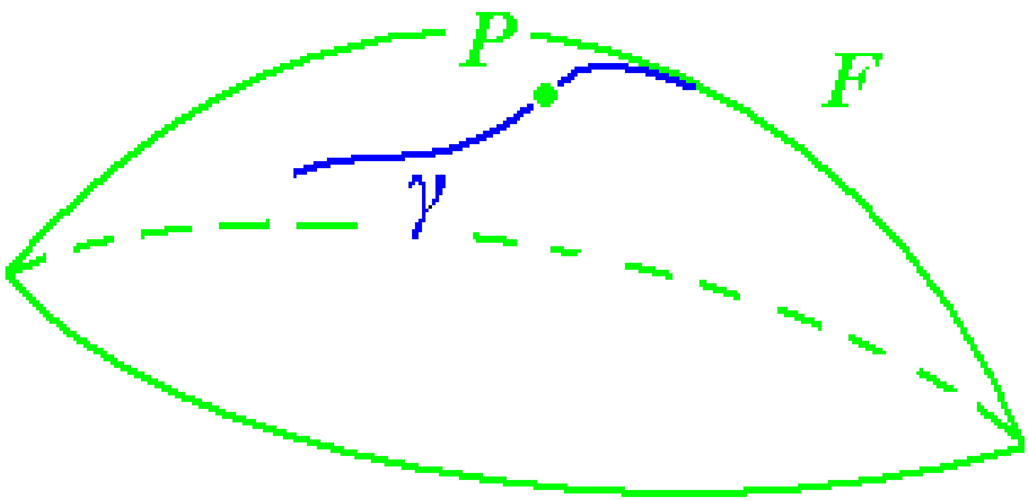
$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \ t \in (a,b),$$

так, що при деякому t_0 маємо

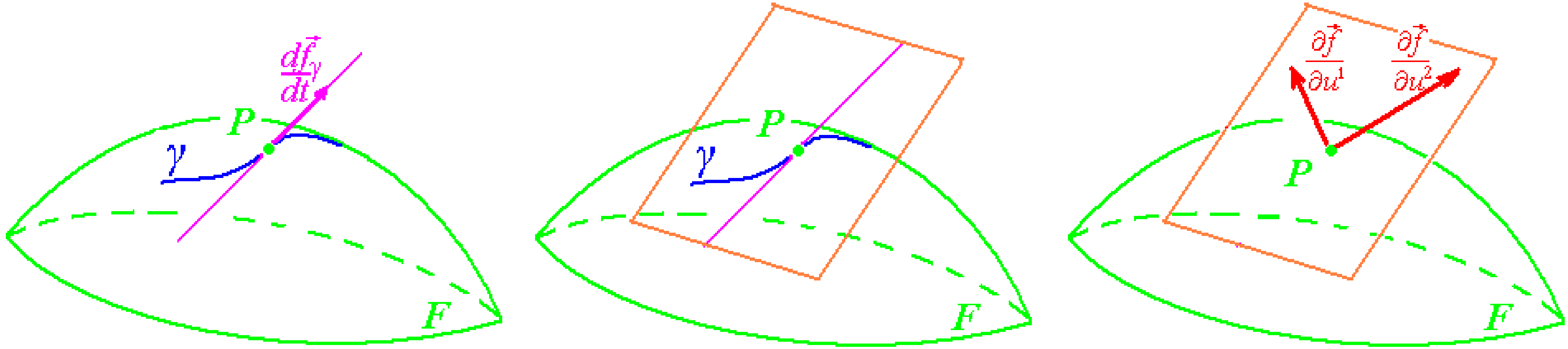
$$\begin{cases} u_0^1 = h^1(t_0) \\ u_0^2 = h^2(t_0) \end{cases}.$$

З точки зору простору $I\!R^3$ крива γ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)) = \vec{f}_\gamma(t)$$



Твердження. *Дотична пряма кривої γ в точці P належить двовимірній площині в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку P і є натягнутою на вектори* $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ *і* $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.



Доведення. Вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$ є лінійно незалежними, оскільки поверхня F є регулярною. Тому вони однозначно визначають деяку площину Π в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку P і є натягнутою на $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Для напрямного вектора кривої γ в точці P маємо:

$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial h^2}{\partial t}(t_0).$$

Отже, $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$ є лінійною комбінацією векторів $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$.

Як наслідок, дотична пряма кривої γ в точці P, яка проходить через точку P в напрямку вектора $\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0)$, належить площині, що проходить через точку P і є натягнутою на вектори $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)$ і $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$, що і вимагалось довести.

Твердження. *Будь-яка пряма, що проходить через точку P в площині, натягнутій на вектори* $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1,u_0^2)$ *і* $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1,u_0^2)$*, є дотичною прямою для деякої регулярної кривої, що проходить через точку P, на поверхні F.*

Доведення. Візьмемо довільну пряму L, що проходить через точку P, в площині Π, натягнутій на вектори $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1,u_0^2)$ і $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1,u_0^2)$. Напрямний орт $\vec{\xi}$ цієї прямої L є лінійною комбінацією базисних векторів площини Π:

$$\vec{\xi}=\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1,u_0^2)\cdot\xi^1+\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1,u_0^2)\cdot\xi^2$$

Розглянемо криву γ на поверхні F, що у внутрішніх локальних координатах задається у вигляді:

$$\begin{cases}u^1=u_0^1+\xi^1(t-t_0)\\u^2=u_0^2+\xi^2(t-t_0)\end{cases}$$

Ця крива проходить через точку P.

Оскільки $\begin{pmatrix} \dfrac{du^1}{dt} \\ \dfrac{du^2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, крива γ є регулярною.

При цьому дотичний вектор цієї кривої в точці P має вигляд

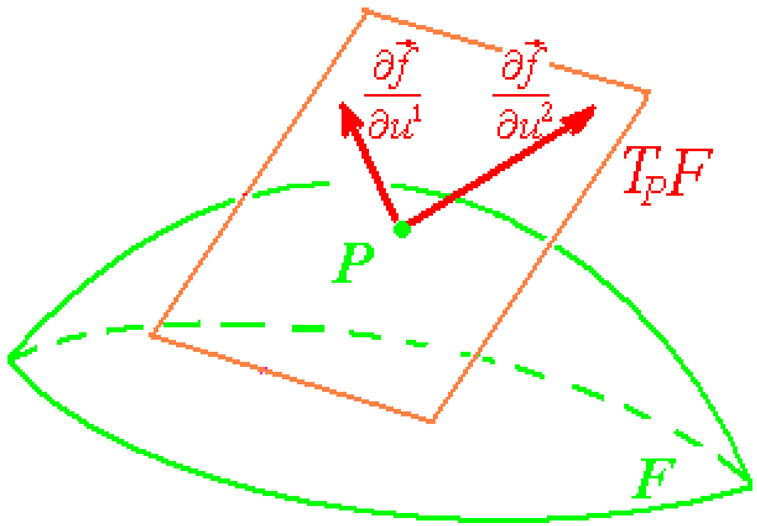
$$\frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial t}(t_0) =$$

$$= \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^1 + \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \cdot \xi^2,$$

тобто, $\dfrac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(t_0) = \vec{\xi}$. Отже, пряма L співпадає з дотичною прямою побудованої кривої γ в точці P, що і вимагалось довести.

Висновок-визначення. Якщо на регулярній параметрично заданій поверхні F зафіксувати точку P і розглядати довільні регулярні криві, які лежать на поверхні F і проходять через точку P, то дотичні прямі таких кривих будуть утворювати двомірну площину.

Ця площина називається *дотичною площиною* поверхні F в точці P і позначається $T_P F$.



За визначенням, дотична площина проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$$

і натягнута на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Перевіримо, що дотична площина визначена коректно – вона не змінюється при регулярних замінах локальних координат на поверхні F.

Коректність визначення дотичної площини

На регулярній параметрично заданій поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

зробимо регулярну заміну координат в околі точки P,

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases},$$

і запишемо радіус-вектор поверхні в новій системі координат:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2).$$

Продиференціювавши, отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} = \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^1}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} = \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^2}$$

тобто,

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^2}\right).$$

Як результат, регулярна зміна координат на поверхні F в околі точки P призводить до зміни базису в дотичній площині $T_P F$. Але сама дотична площина $T_P F$ при цьому залишається незмінною.

Таким чином, дотична площина $T_P F$ поверхні F в точці P визначена коректно, вона не залежить від вибору параметризації.

Висновок. В кожній точці P на регулярній параметрично заданій поверхні F однозначно визначається дотична площина $T_P F$.

Дотична площина – аналітичне задання

Для регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

дотична площина $T_P F$ в точці $P\ (u_0^1, u_0^2)$ задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + \lambda^1 \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + \lambda^2 \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), \qquad -\infty < \lambda^1, \lambda^2 < \infty .$$

В координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x^1 - f^1(u_0^1, u_0^2) & \dfrac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \dfrac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ x^2 - f^2(u_0^1, u_0^2) & \dfrac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \dfrac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ x^3 - f^3(u_0^1, u_0^2) & \dfrac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \dfrac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Дотична площина – наближення першого порядку регулярної поверхні

Для регулярної параметрично заданої поверхні F з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$$

запишемо перші доданки розкладання Тейлора в точці $P(u_0^1, u_0^2)$:

$$\vec{f}(u^1, u^2) = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + (u^1 - u_0^1) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + (u^2 - u_0^2) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) + \\ + \vec{o}(\sqrt{(u^1 - u_0^1)^2 + (u^2 - u_0^2)^2}$$

Якщо обмежитись лише доданками першого порядку, отримаємо радіус-вектор дотичної площини $T_P F$:

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + (u^1 - u_0^1) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) + (u^2 - u_0^2) \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)$$

Висновок. Таким чином, дотична площина $T_P F$ є наближенням першого порядку (лінійною апроксимацією) регулярної параметрично заданої поверхні F в точці P.

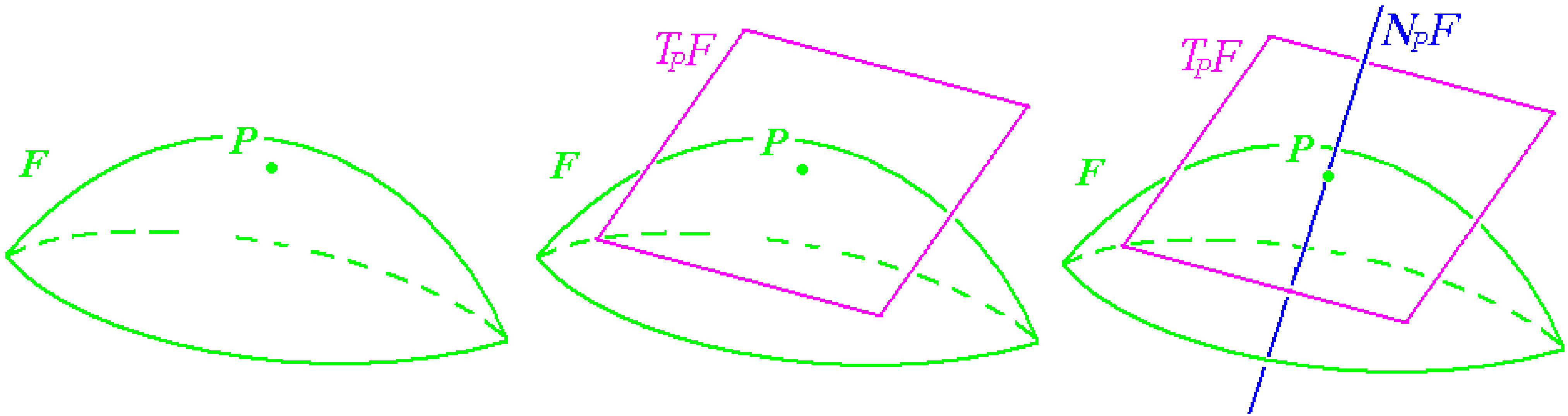
11.2. Нормальна пряма регулярної поверхні

Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \ \ (u^1, u^2) \in D.$$

Зафіксуємо точку P на поверхні F і розглянемо дотичну площину $T_P F$ поверхні F в точці P.

Визначення. Пряма в $\mathbb{R}^3$, що проходить через точку P ортогонально до дотичної площини $T_P F$, називається *нормальною прямою* поверхні F в точці P і позначається $N_P F$.



Оскільки в кожній точці регулярної параметрично заданої поверхні коректно визначено дотичну площину,то, як наслідок, в кожній точці регулярної параметрично заданої поверхні коректно визначено нормальну пряму.

Отже, в кожній точці регулярної параметрично заданої поверхні існує і є єдиною нормальна пряма.

Нормальна пряма – аналітичне задання

Нехай точка P має внутрішні координати (u_0^1, u_0^2) на поверхні F.

За визначенням, дотична площина T_PF проходить через точку P з радіус-вектором

$$\vec{x}_0 = \vec{f}(u_0^1, u_0^2)$$

і натягнута на вектори

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \text{ і } \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2).$$

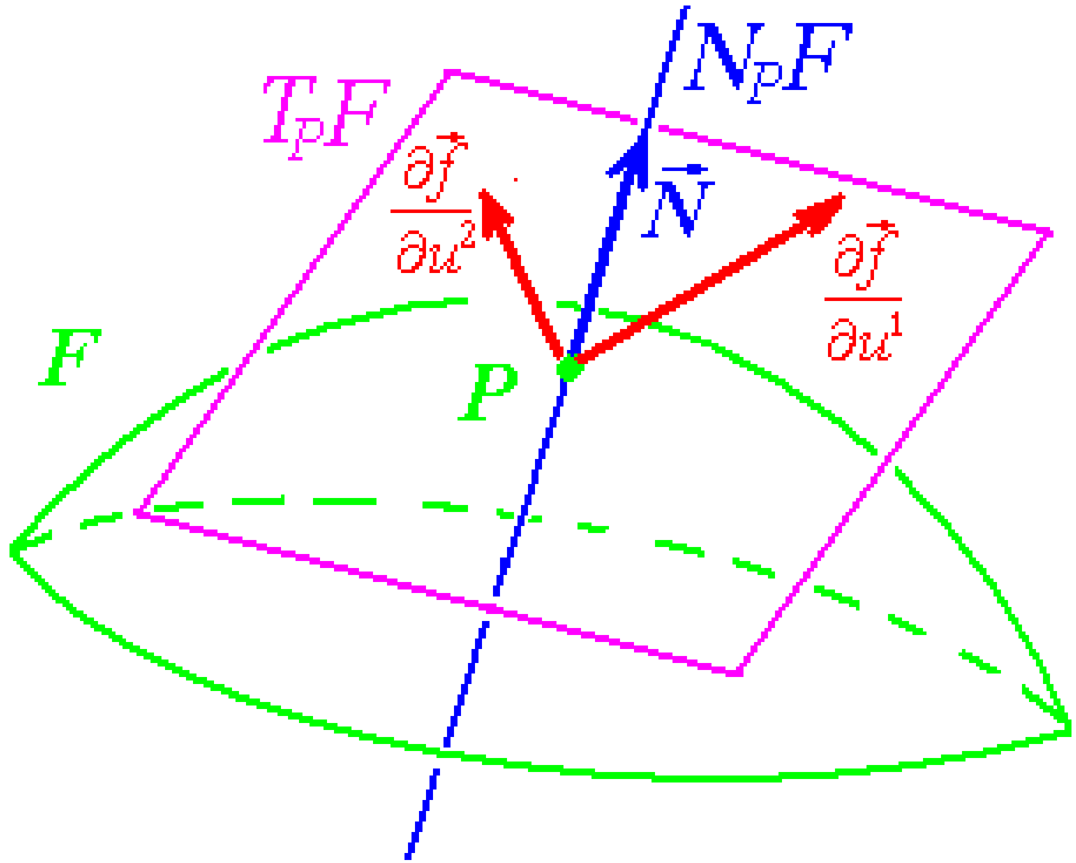
Нормаль дотичної площини T_PF обчислюється за формулою

$$\vec{N}_P = \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \right].$$

За визначенням, вектор

$$\vec{N}_P = [\,\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2)\,,\, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2)\,],$$

що є нормаллю дотичної площини T_PF, є одночасно і напрямним вектором нормальної прямої N_PF.



Тому нормальна пряма задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + t \cdot \vec{N}_P \ , \qquad -\infty < t < \infty \ .$$

тобто,

$$\vec{x} = \vec{f}(u_0^1, u_0^2) + t \cdot \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) \, , \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \right] , \qquad -\infty < t < \infty \ ,$$

або в координатному вигляді

$$\frac{x^1 - f^1(u_0^1, u_0^2)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{vmatrix}} = \frac{x^2 - f^2(u_0^1, u_0^2)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^3}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^3}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{vmatrix}} = \frac{x^3 - f^3(u_0^1, u_0^2)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2) & \frac{\partial f^2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2) \end{vmatrix}}$$

11.3. Дотична площина і нормальна пряма явно заданої поверхні

Розглянемо явно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$x^3 = z(x^1, x^2),$$

що є графіком неперервно диференційованої функції $\varphi(x^1, x^2)$.

Представимо поверхню F як параметрично задану:

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = z(u^1, u^2) \end{cases}.$$

Якщо взяти точку P з координатами $(x_0^1, x_0^2, z(x_0^1, x_0^2))$ на поверхні F, до дотична площина $T_P F$ буде задаватись у вигляді

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & 1 & 0 \\ x^2 - x_0^2 & 0 & 1 \\ x^3 - z(x_0^1, x_0^2) & \dfrac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) & \dfrac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) \end{vmatrix} = 0,$$

тобто, $$x^3 = z(x_0^1, x_0^2) + (x^1 - x_0^1) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2) + (x^2 - x_0^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2) .$$

А нормальна пряма $N_P F$ задається рівнянням

$$\frac{x^1 - x_0^1}{-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^2 - x_0^2}{-\frac{\partial z}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2)} = \frac{x^3 - z(x_0^1, x_0^2)}{1}$$

Зауважимо, що вектор нормалі в точці P має вигляд

$$\vec{N}_P = \left(-\frac{\partial z}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2), -\frac{\partial z}{\partial x^2}(u_0^1, u_0^2), 1\right)$$

11.4. Дотична площина і нормальна пряма неявно заданої поверхні

Розглянемо регулярну неявно задану поверхню F в $\mathbb{R}^3$

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо точку $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ на поверхні F. В досить малому околі точки P поверхня F задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2) \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

так, що

$$\Phi(f^1(u^1,u^2), f^2(u^1,u^2), f^3(u^1,u^2)) \equiv 0$$

Продиференціювавши, отримуємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\frac{\partial f^1}{\partial u^1} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial f^2}{\partial u^1} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\frac{\partial f^3}{\partial u^1} \equiv 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\frac{\partial f^1}{\partial u^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial f^2}{\partial u^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\frac{\partial f^3}{\partial u^2} \equiv 0$$

Інакше кажучи, маємо

$$< (\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}), (\frac{\partial f^1}{\partial u^1}, \frac{\partial f^2}{\partial u^1}, \frac{\partial f^3}{\partial u^1}) >\equiv 0$$

$$< (\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}), (\frac{\partial f^1}{\partial u^2}, \frac{\partial f^2}{\partial u^2}, \frac{\partial f^3}{\partial u^2}) >\equiv 0$$

З огляду на регулярність поверхні F, ненульовий вектор

$$\nabla\Phi = (\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}),$$

обчислений в точці P, є ортогональним до векторів

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1} = (\frac{\partial f^1}{\partial u^1}, \frac{\partial f^2}{\partial u^1}, \frac{\partial f^3}{\partial u^1}) \quad \text{і} \quad \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2} = (\frac{\partial f^1}{\partial u^2}, \frac{\partial f^2}{\partial u^2}, \frac{\partial f^3}{\partial u^2}),$$

обчисленим в точці P.

Оскільки $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}$ є базисними векторами дотичної площини T_PF, то ортогональний їм вектор $\nabla\Phi$ є напрямним вектором нормальної прямої N_PF.

Таким чином, маємо

$$\vec{N}_P = \nabla\Phi(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3), \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3), \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\right)$$

Рівняння дотичної площини $T_P F$:

$$(x^1 - x_0^1)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + (x^2 - x_0^2)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) + (x^3 - x_0^3)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = 0$$

Рівняння нормальної прямої $N_P F$:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)} = \frac{x^2 - x_0^2}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)} = \frac{x^3 - x_0^3}{\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)}$$