Варіант 1

1. Встановити, чи може пляшка Клейна накривати двовимірний тор (побудувати накриття, якщо так, довести, що не може, якщо ні).

2. Довести, що комплексний проєктивний простір $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$ однозв'язний. Тут S^{2n+1} – одинична сфера у просторі $\mathbb{C}^{n+1}$, що ототожнюється з $\mathbb{R}^{2n+2}$, і група S^1 комплексних чисел модуля 1 діє обертаннями: $\lambda \cdot x = \lambda x$.

Варіант 2

1. Нехай (X, Y, p) – накриття з компактним хаусдорфовим Y. Довести, що X компактний тоді й тільки тоді, коли p скінченнолистове (тобто шар над будь-якою точкою скінченний). Для якої з двох імплікацій тут використовується хаусдорфовість?

2. Знайти фундаментальну групу простору $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m$.

Варіант 3

1. Довести, що якщо (X, Y, p) і (X', Y', p') –накриття, то й $(X \times X', Y \times Y', p \times p')$ – накриття.

2. Довести, що не існує ретракції проєктивної площини на проєктивну пряму.

Варіант 4

1. Нехай $p\colon X \to Y$ і $q\colon Y \to Z$ – накриття з лінійно зв'язними базами і просторами. Довести, що якщо q – скінченнолистове (тобто шар над будь-якою точкою скінченний) то і $q \circ p\colon X \to Z$ – накриття.

2. Нехай X – підпростір однозв'язного Y. Довести, що якщо неперервне $f\colon X \to Z$ можна продовжити на Y, то для будь-якої $x \in X$ гомоморфізм $f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Z, f(x))$ тривіальний (тобто відображає будь-який елемент групи в одиницю).

Варіант 5

1. Встановити, чи може проєктивна площина накривати двовимірний тор (побудувати накриття, якщо так, довести, що не може, якщо ні).

2. Нехай X – топологічний простір, $x, y \in X$, $f, g \in C(I, X)$ – шляхи, $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Довести, що ізоморфізми фундаментальних груп $\pi_1(X, x)$ и $\pi_1(X, y)$, що визначені шляхами f і g, збігаються тоді і тільки тоді, коли $[f * \overline{g}]$ належить до центру $\pi_1(X, x)$.

Варіант 6

1. Довести, що будь-яке дволистове (тобто таке, всі шари якого складаються з двох точок) накриття з лінійно зв'язними і локально лінійно зв'язними базою і простором є регулярним.

2. Довести, що не існує ретракції замкненого листа Мебіуса на його межу.

Варіант 7

1. Довести, що якщо (X, Y, p) – накриття, простори X та Y хаусдорфові та задовольняють другій аксіомі зліченності, а X – многовид, то Y є многовидом тієї ж вимірності.

2. Знайти фундаментальну групу об'єднання кола $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ і відрізка $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, -1 < y < 1\}$.