Основи алгебраїчної топології

Петров Є.В.

19 квітня 2024 р.

Зміст

Алгебраїчна (алгебрична) топологія – це розділ топології, що вивчає інваріанти алгебраїчної природи: групи, кільця, векторні простори тощо, які певним чином визначаються даним топологічним простором. Найчастіше вони є інваріантами відносно слабшого за гомеоморфність відношення еквівалентності – гомотопічної еквівалентності. Алгебраїчна топологія як предмет систематичного вивчення виникла у кінці дев'ятнадцятого сторіччя у роботах Анрі Пуанкаре (як і два основні підходи, яким ми приділятимемо увагу – гомотопічний і гомологічний), але й досі займає центральне місце в топології та її застосуваннях. Ми почнемо з деяких важливих для неї загальнотопологічних понять.

1 Гомотопія

У цьому розділі ми побачимо, що топологія встановлює відношення еквівалентності не тільки між просторами, а й між відображеннями. Поняття гомотопії формалізує інтуїтивне уявлення про "деформацію" одного відображення в інше. Нагадаємо, що літерою I традиційно позначається відрізок $[0, 1]$.

Означення 1.1. Нехай $f, g\colon X \to Y$ – неперервні відображення топологічних просторів. *Гомотопією* f і g зветься неперервне відображення $F\colon X \times I \to Y$ таке, що $F(x, 0) = f(x)$ і $F(x, 1) = g(x)$ для будь-якої $x \in X$. Гомотопія F відображень f і g зветься *A-гомотопією*, де $A \subset X$ – деяка підмножина, якщо крім цього $F(x, s) = f(x) = g(x)$ для будь-яких $x \in A$ і $s \in I$. Якщо існує гомотопія (відповідно, A-гомотопія) f і g, то говорять, що f *гомотопне* (*A-гомотопне*) g і пишуть $f \sim g$ ($f \underset{A}{\sim} g$).

Зауваження. A-гомотопію ще називають гомотопією, що *зв'язана на A*. З означення випливає, що для її існування необхідне співпадіння f і g на A: $f|_A = g|_A$. "Звичайна" гомотопія (т. зв. *вільна*) – це $\varnothing$-гомотопія.

Твердження 1.1. *A-гомотопність відображень є відношенням еквівалентності на $\{f \in C(X, Y) \mid f|_A = f_A\}$ (підмножині неперервних відображень з X у Y, що збігаються на A з деяким фіксованим f_A). Зокрема, гомотопність – відношення еквівалентності на $C(X, Y)$.*

Доведення. Перевіримо виконання аксіом еквівалентності для A-гомотопності (звичайно, вони тоді будуть виконуватися й у частковому випадку гомотопності).

- $f \underset{A}{\sim} f$ для будь-якого f з $f|_A = f_A$: неважко перевірити, що $F(x,s) \coloneqq f(x)$ задає потрібну A-гомотопію.

- Якщо $f \underset{A}{\sim} g$ і F – відповідна A-гомотопія, то визначимо $G\colon X \times I \to Y$ умовою $(x,s) \mapsto F(x, 1-s)$. Воно неперервне як композиція неперервних відображень, $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$, $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ для $x \in X$, $G(x,s) = F(x,1-s) = f_A(x) = f(x) = g(x)$ для $x \in A$, $s \in I$, тому G – A-гомотопія g і f. Отже, $g \underset{A}{\sim} f$.

- Нехай $f \underset{A}{\sim} g$, $g \underset{A}{\sim} h$. Зауважимо, що при цьому $h|_A = g|_A = f|_A = f_A$ за означенням A-гомотопності. Нехай F і G – відповідні A-гомотопії. Визначимо $H\colon X \times I \to Y$ умовою

$$H(x,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} F(x,2s), & s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(x, 2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Це відображення коректно визначене, бо при $s = \frac{1}{2}$ маємо $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$ за умовою. Його неперервність випливає з неперервності F і G (аналогічно до неперервності добутку шляхів; див. також [5, с. 63-64]). При цьому $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ для $x \in X$ і $H(x,s) = f_A(x) = f(x) = h(x)$ для $x \in A$, $s \in I$ за властивостями F і G. Отже, H – A-гомотопія, тобто $f \underset{A}{\sim} h$.

■

Зауваження. Гомотопія F задає для кожного $s \in I$ відображення $f_s \coloneqq F(\cdot, s)\colon X \to Y$ (тобто $f_s(x) = F(x,s)$ для $x \in X$), що є неперервним як композиція неперервних $x \mapsto (x,s)$ (перевірте, що таке відображення $X \to X \times I$ дійсно неперервне) і F. Тобто гомотопію можна розуміти як "неперервну сім'ю" відображень $\{f_s\}_{s \in I} \subset C(X,Y)$ або як "шлях" $I \to C(X,Y)\colon s \mapsto f_s$. При цьому за означенням $f_0 = f$ і $f_1 = g$, тобто цей "шлях" з'єднує f і g у $C(X,Y)$.

Виникає природне запитання: чи можна ввести топологію на $C(X,Y)$ так, щоби гомотопії дійсно були шляхами у цьому просторі? Відповідь міститься у наступній вправі (див. також [3, с. 145-148] або [5, с. 145-148, 186-187]).

Вправа 1.1. Нехай X і Y – топологічні простори. Для будь-яких компактної $K \subset X$ і відкритої $U \subset Y$ позначимо

$$W(K,U) \coloneqq \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

1. Показати що $\{W(K,U)\}$ (для усіх пар K і U) є передбазою деякої топології на $C(X,Y)$. Вона зветься *компактно-відкритою.*

2. Показати, що якщо X компактний а Y метричний з метрикою ρ, то компактно-відкрита топологія на $C(X,Y)$ породжується метрикою *рівномірної збіжності*

$$\sigma(f,g) \coloneqq \max_{x\in X}\{\rho(f(x),g(x))\}\,.$$

   Показати, що для $Y=\mathbb{R}$ (з евклідовою метрикою) збіжність послідовності функцій у цій метриці рівносильна рівномірній збіжності (хоча б для випадку $X=I$).

3. Показати, що якщо X локально компактний та хаусдорфовий, то шляхи у $C(X,Y)$ з компактно-відкритою топологією – це в точності відображення вигляду $s\mapsto F(\cdot,s)$, де F – деяка гомотопія.

Зауваження. З аналогічних міркувань випливає, що для кожної $x\in X$ відображення $I\to Y\colon s\mapsto F(x,s)$ неперервне, а отже є шляхом, що з'єднує точки $F(x,0)=f(x)$ і $F(x,1)=g(x)$. Зокрема, $f(x)$ і $g(x)$ повинні тоді лежати в одній компоненті лінійної зв'язності Y (за твердженням 28.2 лекцій з топології).

Наслідок 1.1. *Якщо $f,g\colon X\to Y$ гомотопні, то для будь-якої $x\in X$ її образи $f(x)$ і $g(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності Y.*

Приклад 1.1. Нехай $X=\{x\}$ – одноточковий простір. Будь-які відображення $f,g\colon X\to Y$ у довільний простір Y мають вигляд $f\colon x\mapsto f(x)$, $g\colon x\mapsto g(x)$ (і автоматично є неперервними як постійні). Якщо f і g гомотопні, то $f(x)$ і $g(x)$ можна з'єднати шляхом в Y за попереднім наслідком. Неважко побачити, що в даному випадку вірне і обернене: якщо $h\colon I\to Y$ – шлях, що з'єднує $f(x)$ і $g(x)$, то $F(x,s)\coloneqq h(s)$ задає гомотопію f і g.

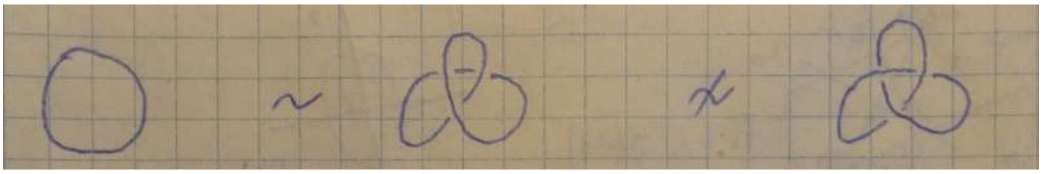
Приклад 1.2. Нехай $Y\subset\mathbb{R}^n$ – опукла підмножина. Тоді для будь-яких топологічного простору X, підмножини $A\subset X$ і відображень $f,g\in C(X,Y)$ таких, що $f|_A=g|_A$, маємо $f\underset{A}{\sim}g$. Дійсно, відображення $F\colon X\times I\to Y$, що визначене умовою $F(x,s)\coloneqq(1-s)\,f(x)+s\,g(x)$ (тобто з'єднує $f(x)$ і $g(x)$ відрізками, пор. з прикладом 23.7 лекцій з топології) є тоді неперервним і задовольняє означенню A-гомотопії f і g.

Вправа 1.2. Показати, що те ж саме вірне для зірчатої $Y\subset\mathbb{R}^n$ і $A=\varnothing$ (тобто для вільних гомотопій).

Приклад 1.3. Нехай тепер $Y \subset S^n$ – відкрита напівсфера n-вимірної сфери для $n \geqslant 1$, тобто її перетин з відкритим напівпростором $\mathbb{R}^{n+1}$ відносно деякої гіперплощини, що проходить через початок координат (центр сфери), а простір X довільний. Аналогічно до минулого прикладу можна показати, що тоді будь-які $f, g \in C(X, Y)$ є A-гомотопними (звичайно, якщо $f|_A = g|_A$). Гомотопія F при цьому будується за допомогою менших дуг великих кіл сфери (випишіть її явно, використовуючи формулу з прикладу 23.8 лекцій з топології).

Зауваження. Інколи розглядають гомотопії між відображеннями, що задовольняють деяким додатковим обмеженням, такі, що усі "проміжні" відображення f_s задовольняють тим же обмеженням. У цьому випадку гомотопію зазвичай називають *ізотопією.*

Приклад 1.4. *Вузлом* називається вкладення кола S^1 у $\mathbb{R}^3$ (тобто будь-яке ін'єктивне неперервне відображення $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ в силу компактності кола і наслідку 20.4 курсу топології). *Ізотопією* вузлів f і g зветься їх гомотопія $F \in C(S^1 \times I, \mathbb{R}^3)$ така, що $f_s = F(\cdot, s)\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ – вузол для кожного $s \in I$. Якщо існує ізотопія вузлів, вони називаються *ізотопними.* Нижче зображені т. зв. *тривіальний вузол*, вузол, що ізотопний тривіальному, і вузол, що їм не ізотопний – *трилисник* (але доведення цієї неізотопності потребує спеціальних інваріантів). Детальніше див., наприклад, у [1, с. 87-97, 119-123], [7, с. 239-271], [8] та [12, с. 12-39].



Розглянемо цікавий приклад застосування гомотопії до задачі продовження відображень (іншими прикладами цього класу топологічних задач є теорема Тітце з курсу топології та вправа 2.3 далі). Нагадаємо, що межею стандартної замкненої кулі є стандартна сфера: $\partial D^n = S^{n-1}$.

Твердження 1.2. *Нехай* Y *– топологічний простір і* $n \geqslant 1$. *Неперервне відображення* $f\colon S^{n-1} \to Y$ *продовжується до неперервного* $\overline{f}\colon D^n \to Y$ *(тобто* $\overline{f}|_{S^{n-1}} = f$*) тоді й тільки тоді, коли воно гомотопне постійному відображенню.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай $f \in C(S^{n-1}, Y)$ продовжується до $\overline{f} \in C(D^n, Y)$. Виберемо $x_0 \in S^{n-1}$ і покладемо $F(x, s) := \overline{f}((1-s)\,x + s\,x_0)$.

Таке $F\colon S^{n-1}\times I \to Y$ коректно визначене в силу опуклості D^n, неперервне як композиція неперервних, $F(\cdot,0) = \overline{f}|_{S^{n-1}} = f$ і $F(\cdot,1) = \overline{f}(x_0) = f(x_0)$ – постійне відображення. Тобто F і буде потрібною гомотопією.

$\Leftarrow$ Тепер нехай існує гомотопія F відображення f і постійного відображення S^{n-1} у точку $y_0 \in Y$. Побудуємо $\overline{f}\colon D^n \to Y$ наступним чином:

$$\overline{f}(x) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} y_0, & |x| \in [0, \frac{1}{2}]; \\ F\left(\frac{x}{|x|}, 2-2|x|\right), & |x| \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що $\overline{f}$ коректно визначене і неперервне, оскільки при $|x| = \frac{1}{2}$ маємо $F\left(\frac{x}{|x|}, 1\right) = y_0$. При цьому для $|x| = 1$ (тобто $x \in S^{n-1}$) за побудовою $\overline{f}(x) = F(x,0) = f(x)$. Таким чином, $\overline{f}|_{S^{n-1}} = f$.

■

2 Гомотопічна еквівалентність. Ретракти. Стяжність

Відношення еквівалентності між топологічними просторами не обмежуються гомеоморфністю. Розглянемо більш загальне відношення, що є основним саме для алгебраїчної топології.

Означення 2.1. Нехай X і Y – топологічні простори. Неперервні відображення $f\colon X \to Y$ і $g\colon Y \to X$ звуться *гомотопічно оберненими* одне до одного, якщо $g \circ f \sim id_X$ і $f \circ g \sim id_Y$. Якщо такі f і g існують, то X і Y називають *гомотопічно еквівалентними* й пишуть $X \sim Y$.

Лема 2.1. *Нехай $f_0, f_1\colon X \to Y$, $g_0, g_1\colon Y \to Z$ – неперервні відображення топологічних просторів, $A \subset X$, $B \subset Y$ – такі підмножини, що $f_0(A) = f_1(A) \subset B$, і $f_0 \underset{A}{\sim} f_1$, $g_0 \underset{B}{\sim} g_1$. Тоді $g_0 \circ f_0 \underset{A}{\sim} g_1 \circ f_1$.*

Доведення. З умови випливає, що $f_0|_A = f_1|_A$ і $g_0|_B = g_1|_B$, тому $(g_0 \circ f_0)|_A = (g_1 \circ f_1)|_A$. Якщо F – A-гомотопія f_0 і f_1, а G – B-гомотопія g_0 і g_1, то $H(x,s) \coloneqq G(F(x,s),s)$ визначає A-гомотопію $g_0 \circ f_0$ і $g_1 \circ f_1$. Дійсно, це неперервне відображення $X \times I \to Z$ як композиція неперервних, $H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x))$ та аналогічно для $s = 1$, і $H(x,s) = G(F(x,s),s) = G(f_0(x),s) = g_0(f_0(x)) = g_1(f_1(x))$ для $x \in A$ та довільного $s \in I$, бо $f_0(x) \in B$.

■

Твердження 2.1. *Гомотопічна еквівалентність є відношенням еквівалентності топологічних просторів.*

Доведення. Перевіримо аксіоми еквівалентності.

- $X \sim X$ для будь-якого простору X: достатньо взяти $f = g = id_X$.
- Умови $X \sim Y$ і $Y \sim X$ еквівалентні за означенням (воно симетричне відносно X і Y).
- Покажемо тепер транзитивність. Нехай $X \sim Y$ і $Y \sim Z$, тобто існують $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$, $h \in C(Y,Z)$ і $k \in C(Z,Y)$ такі, що $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, $h \circ k \sim id_Z$ і $k \circ h \sim id_Y$. Тоді $h \circ f \in C(X,Z)$ і $g \circ k \in C(Z,X)$ гомотопічно обернені:

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ id_Y \circ k = h \circ k \sim id_Z,$$

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ (k \circ h) \circ f \sim g \circ id_Y \circ f = g \circ f \sim id_X,$$

де перші гомотопності в кожному рядку випливають з умови та попередньої леми для випадку вільних гомотопій (застосованої двічі, до кожної з композицій). Таким чином, $X \sim Z$.

■

Приклад 2.1. Якщо $f\colon X \to Y$ – гомеоморфізм, то f і f^{-1} неперервні та гомотопічно обернені (бо вони просто обернені). Отже, гомеоморфні простори гомотопічно еквівалентні.

Приклад 2.2. Простір $\mathbb{R}^n$ гомотопічно еквівалентний одноточковому простору $\{y\}$. Дійсно, вибір відображень тут невеликий: нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \{y\}$ переводить всі точки $\mathbb{R}^n$ в y, а $g\colon \{y\} \to \mathbb{R}^n$ переводить y в якусь $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Обидва ці відображення постійні, а отже неперервні. Тоді $f \circ g = id_{\{y\}}$ і $(g \circ f)(x) = x_0$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$. З прикладу 1.2 випливає, що постійне відображення $g \circ f$ опуклої $\mathbb{R}^n$ в себе гомотопне $id_{\mathbb{R}^n}$ (а $F(x,s) = (1-s)\,x_0 + s\,x$ задає потрібну гомотопію). Отже, f і g гомотопічно обернені. Також зауважимо, що в силу транзитивності тоді $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^m$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Далі цей приклад узагальнимо у прикладі 2.4.

Вправа 2.1. Показати, що з $X \sim Y$ і $Z \sim W$ випливає $X \times Z \sim Y \times W$. Так, в силу попереднього прикладу, циліндр гомотопічно еквівалентний колу: $S^1 \times \mathbb{R} \sim S^1 \times \{y\} \cong S^1$.

Зауваження. Ці приклади демонструють, зокрема, що гомотопічна еквівалентність є слабшим за гомеоморфність відношенням еквівалентності: класи гомотопічної еквівалентності, взагалі кажучи, ширші. Вона не зберігає компактність і навіть потужність множини (але зберігає зв'язність та лінійну зв'язність, див. наступну вправу). Далі ми наведемо ще декілька прикладів гомотопічних еквівалентностей, що пов'язані з поняттям ретракції.

Вправа 2.2. Показати, що якщо $X \sim Y$ і простір X зв'язний (відповідно, лінійно зв'язний), то й простір Y (лінійно) зв'язний. Більш того, X та Y мають однакові кількості компонент зв'язності та лінійної зв'язності відповідно. Чи вірні аналогічні твердження для властивостей локальних зв'язності та лінійної зв'язності?

Означення 2.2. *Ретракцією* топологічного простору X на його підмножину $A \subset X$ зветься будь-яке неперервне відображення $f\colon X \to A$ таке, що $f|_A = id_A$, тобто $f(x) = x$ для будь-якої $x \in A$. Множину A у цьому випадку звуть *ретрактом* X.

Приклад 2.3. Будь-яка одноточкова підмножина $\{x\} \subset X$ будь-якого простору є його ретрактом: відповідною ретракцією є постійне відображення у x.

Вправа 2.3. Показати, що $A \subset X$ є ретрактом простору X тоді й тільки тоді, коли будь-яке неперервне відображення $g\colon A \to Y$ можна продовжити неперервним $\overline{g}\colon X \to Y$.

Означення 2.3. Ретракція простору X на $A \subset X$ зветься *деформаційною* (відповідно, *строгою деформаційною*), якщо вона гомотопна (A-гомотопна) тотожному відображенню id_X. У цьому випадку A називають *(строгим) деформаційним ретрактом.*

Зауваження. Тут, коли йдеться про гомотопність ретракції $f\colon X \to A$ і тотожного $id_X\colon X \to X$, фактично мається на увазі не f, а його композиція з включенням $i\colon A \to X$.

Твердження 2.2. *Якщо $A \subset X$ – деформаційний ретракт топологічного простору X, то $X \sim A$.*

Доведення. Дійсно, нехай $f\colon X \to A$ – деформаційна ретракція, а $i\colon A \to X$ – відображення включення. Тоді $f \circ i = id_A$ та $i \circ f \sim id_X$ за умовою (див. попереднє зауваження). Отже, ці відображення гомотопічно обернені, тому $X \sim A$.

∎

Приклад 2.4. Всі ретракти будь-якої опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$, зокрема, всі одноточкові підмножини $\{x\} \subset X$, є строгими деформаційними. Дійсно, якщо A – ретракт X, то відповідна ретракція f та id_X

збігаються на A (обидва дорівнюють id_A), а тому A-гомотопні за прикладом 1.2. Аналогічно, всі ретракти будь-якої зірчатої $X \subset \mathbb{R}^n$ є деформаційними в силу вправи 1.2. Тоді з попереднього твердження випливає, що, зокрема, $X \sim \{x\}$ для будь-якої зірчатої (зокрема опуклої) $X \subset \mathbb{R}^n$ і кожної $x \in X$.

Приклад 2.5. Аналогічно до попереднього прикладу, всі ретракти будь-якої відкритої напівсфери S^n для $n \geqslant 1$ є строгими деформаційними в силу прикладу 1.3. Зокрема, така напівсфера гомотопічно еквівалентна кожній свої точці.

Приклад 2.6. Сфера S^{n-1} є строгим деформаційним ретрактом простору $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (тут $n \geqslant 1$). Дійсно, $f(x) \coloneqq \frac{x}{|x|}$, очевидно, визначає ретракцію. При цьому $F(x,s) \coloneqq (1-s)\,\frac{x}{|x|} + s\,x$ задає неперервне відображення $F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (бо відрізок $\left[\frac{x}{|x|}, x\right]$ не проходить через 0), $F(\cdot,0) = f$, $F(\cdot,1) = id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ і $F(x,s) = x$ для будь-яких $x \in S^{n-1}$, $s \in I$. Отже, F є S^{n-1}-гомотопією, тому ретракція f – строга деформаційна. Зокрема, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ за попереднім твердженням. Інший спосіб це побачити – використати вправу 2.1: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, як пам'ятаємо, гомеоморфний $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ (ми використовували цей факт у прикладі 23.11 з курсу топології), що, у свою чергу, гомотопічно еквівалентний $S^{n-1} \times \{y\} \cong S^{n-1}$.

Означення 2.4. Топологічний простір X зветься *стяжним*, якщо він гомотопічно еквівалентний одноточковому простору: $X \sim \{y\}$.

Твердження 2.3. *Топологічний простір X стяжний тоді й тільки тоді, коли існує $x_0 \in X$ така, що $\{x_0\}$ – деформаційний ретракт X.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Нехай X стяжний, тобто існують гомотопічно обернені $f\colon X \to \{y\}$ і $g\colon \{y\} \to X$. Це постійні відображення (пор. з прикладом 2.2), зокрема, g переводить y у якусь $x_0 \in X$. Тоді $g \circ f\colon x \mapsto x_0$ – ретракція X на $\{x_0\}$, і $g \circ f \sim id_X$ за умовою, тобто ця ретракція деформаційна.

$\underline{\Leftarrow}$ Достатність тут випливає з твердження 2.2.

∎

Зауваження. Насправді в якості x_0 можна використати будь-яку точку X (перевірте; це випливає з наступного твердження і того, що будь-які два постійні відображення у лінійно зв'язний простір гомотопні за прикладом 1.1). З прикладів 2.4 і 2.5 випливає, що зірчаті (зокрема опуклі) підмножини $\mathbb{R}^n$ і відкриті напівсфери S^n (при $n \geqslant 1$) стяжні. Іншим прикладом стяжного простору є скінченне зв'язне дерево, яке можна побудувати, послідовно склеюючи відрізки кінцями. Наступне твердження легко виводиться з вправи 2.2, але ми доведемо його безпосередньо.

Твердження 2.4. *Будь-який стяжний топологічний простір є лінійно зв'язним.*

Доведення. Нехай X стяжний. З попереднього твердження випливає, що ретракція f на деяку $\{x_0\} \subset X$ гомотопна id_X. В силу наслідку 1.1, тоді для будь-якої $x \in X$ точки $x_0 = f(x)$ і $x = id_X(x)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X. Це й означає, що цей простір лінійно зв'язний.

■

3 Гомотопії шляхів

Наступна вправа демонструє, що поняття гомотопності шляхів у топологічному просторі є не дуже змістовним без додаткових обмежень. Це мотивує наступне за цією вправою означення.

Вправа 3.1. Показати, що шляхи $f, g\colon I \to X$ у топологічному просторі X гомотопні (вільно, тобто у сенсі означення 1.1 при $A = \varnothing$) тоді й тільки тоді, коли $f(I)$ та $g(I)$ лежать в одній компоненті лінійної зв'язності X.

Означення 3.1. Шляхи f і g у топологічному просторі X із загальними початком та кінцем ($f(0) = g(0)$ і $f(1) = g(1)$) будемо називати *гомотопними*, якщо вони $\{0, 1\}$-гомотопні. Класи еквівалентності шляхів відносно цього відношення еквівалентності (тобто $\{0, 1\}$-гомотопності) звуться їх *гомотопічними класами.*

Зауваження. Тобто f і g гомотопні, якщо існує $\{0, 1\}$-гомотопія (або гомотопія з закріпленими кінцями) – відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$, $F(0, s) = f(0) = g(0)$ і $F(1, s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t, s \in I$. Нагадаємо, що $\{0, 1\}$-гомотопність є відношенням еквівалентності в силу твердження 1.1. У подальшому гомотопність шляхів будемо завжди розуміти саме в сенсі цього нового означення, при цьому писатимемо просто $f \sim g$, а описану вище $\{0, 1\}$-гомотопію F будемо називати гомотопією шляхів f і g. Гомотопічний клас шляху f позначатимемо через $[f]$ (тобто $[f] = [g]$ означає, що $f \sim g$).

Приклад 3.1. З прикладу 1.2 випливає, що у опуклій підмножині $X \subset \mathbb{R}^n$ будь-які два шляхи із загальними початком та кінцем гомотопні (це вірно й для зірчатої X, і взагалі для будь-якого стяжного простору, як покажемо далі у твердженні 6.1.

Приклад 3.2. Аналогічно, будь-які два шляхи із загальними початком та кінцем у відкритій напівсфері S^n для $n \geqslant 1$ гомотопні за прикладом 1.3 (звичайно, така напівсфера теж стяжна).

Лема 3.1. *Нехай $f_0, f_1, g_0, g_1\colon I \to X$ – шляхи у просторі X, причому $f_0(0) = f_1(0) = x$, $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0) = y$, $g_0(1) = g_1(1) = z$. Якщо $f_0 \sim f_1$ і $g_0 \sim g_1$, то $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Доведення. Нехай F, G – гомотопії f_0 і f_1, g_0 і g_1 відповідно. Визначимо відображення $H\colon I \times I \to X$ умовою

$$H(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} F(2t,s), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(2t-1,s), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1}{2}$ маємо $F(1,s) = y = G(0,s)$ для будь-якого $s \in I$ за умовою. При цьому $H(\cdot,0) = f_0 * g_0$, $H(\cdot,1) = f_1 * g_1$, $H(0,\cdot) = F(0,\cdot) = x$ і $H(1,\cdot) = G(1,\cdot) = z$. Отже, H – гомотопія шляхів $f_0 * g_0$ і $f_1 * g_1$.

■

Зауваження. Нагадаємо, що, взагалі кажучи, $(f * g) * h \neq f * (g * h)$, тобто добуток шляхів не є асоціативним (перевірте це; у яких випадках така асоціативність все ж має місце?). Але він є таким "у гомотопічному сенсі", як демонструє наступна лема.

Лема 3.2. *Нехай $f, g, h\colon I \to X$ – шляхи у просторі X такі, що $f(1) = g(0) = y$, $g(1) = h(0) = z$. Тоді $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.*

Доведення. За означенням добутку шляхів маємо

$$((f * g) * h)(t) = \left[\begin{array}{ll} f(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}]; \\ g(4t-1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ h(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Аналогічно,

$$(f * (g * h))(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ g(4t-2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ h(4t-3), & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{array} \right.$$

Визначимо відображення $F\colon I\times I\to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & t\in[0,\frac{s+1}{4}]; \\ g(4t-s-1), & t\in[\frac{s+1}{4},\frac{s+2}{4}]; \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & t\in[\frac{s+2}{4},1]. \end{array}\right.$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t=\frac{s+1}{4}$ і $t=\frac{s+2}{4}$ маємо $f(1)=y=g(0)$ і $g(1)=z=h(0)$ відповідно. Крім того, $F(\cdot,0)=(f*g)*h$, $F(\cdot,1)=f*(g*h)$, $F(0,\cdot)=f(0)$, $F(1,\cdot)=h(1)$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зауваження. Зокрема, звідси випливає, що для гомотопічних класів шляхів можна писати $[f*g*h]$, не розставляючи дужки (замість $[(f*g)*h]=[f*(g*h)]$). За індукцією отримуємо, що це так і для довільної скінченної кількості шляхів.

Лема 3.3. *Нехай $f\colon I\to X$ – шлях у просторі X з початком $f(0)=x$ та кінцем $f(1)=y$. Тоді $e_x*f\sim f\sim f*e_y$.*

Доведення. Нагадаємо, що постійний шлях e_x – це просто постійне відображення I в точку x. Доведемо другу гомотопність, перша доводиться аналогічно (зробіть це). За означенням добутку шляхів:

$$(f*e_y)(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}]; \\ y, & t\in[\frac{1}{2},1]. \end{array}\right.$$

Визначимо відображення $F\colon I\times I\to X$ умовою

$$F(t,s) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} f\left(\frac{2t}{1+s}\right), & t\in[0,\frac{s+1}{2}]; \\ y, & t\in[\frac{s+1}{2},1]. \end{array}\right.$$

Воно коректно визначене і неперервне, бо при $t=\frac{s+1}{2}$ маємо $f(1)=y$, і $F(\cdot,0)=f*e_y$, $F(\cdot,1)=f$, $F(0,\cdot)=f(0)=x$, $F(1,\cdot)=y$. Таким чином, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Лема 3.4. *Нехай $f\colon I\to X$ – шлях у просторі X з початком $f(0)=x$ та кінцем $f(1)=y$. Тоді $f*\overline{f}\sim e_x$ і $\overline{f}*f\sim e_y$.*

Доведення. Згадаймо, що обернений шлях $\overline{f}$ визначений умовою $\overline{f}(t)=f(1-t)$. Зауважимо, що друга гомотопність випливає з першої (просто поміняємо f та $\overline{f}$ місцями і помітимо, що $\overline{\overline{f}} = f$), отже достатньо довести першу. За означенням добутку:

$$(f * \overline{f})(t) = \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

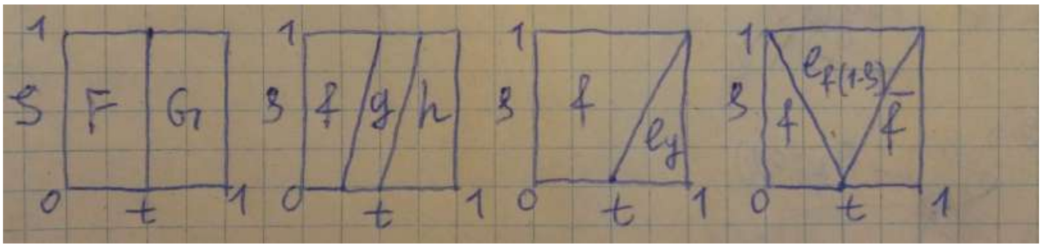
Визначимо відображення $F\colon I \times I \to X$ умовою

$$F(t,s) := \left[\begin{array}{ll} f(2t), & t \in [0, \frac{1-s}{2}]; \\ f(1-s), & t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}]; \\ f(2-2t), & t \in [\frac{1+s}{2}, 1]. \end{array} \right.$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t = \frac{1-s}{2}$ і $t = \frac{1+s}{2}$ маємо одне й те саме значення $f(1-s)$. При цьому $F(\cdot, 0) = f * \overline{f}$, $F(\cdot, 1) = e_x$, $F(0, \cdot) = F(1, \cdot) = f(0) = x$. Отже, F – потрібна гомотопія шляхів.

■

Зауваження. Деяке уявлення про логіку побудови гомотопій в цих лемах дають наступні діаграми, де область визначення $I \times I$ розділена на частини, кожна з яких помічена символом відображення, що "відповідає" за гомотопію на цій підмножині:



4 Фундаментальна група

Необхідні відомості з теорії груп можна знайти у доповненні, зокрема, означення групи, гомоморфізма та ізоморфізма груп (означення А.1, А.2 та А.3 відповідно). У цьому та інших розділах, що присвячені фундаментальній групі, будуть використовуватися мультиплікативні позначення, тобто групова операція виглядатиме як множення. Нагадаємо також, що $G \simeq H$ означає ізоморфність груп G і H.

Означення 4.1. Нехай X – топологічний простір. *Петлею* (або *замкненим шляхом*) у точці $x \in X$ зветься шлях $f\colon I \to X$ з початком та кінцем у x: $f(0) = f(1) = x$.

Теорема 4.1 (Конструкція фундаментальної групи)**.** *Гомотопічні класи петель у точці x топологічного простору X з операцією $[f][g] \coloneqq [f * g]$ утворюють групу.*

Доведення. Перш за все, зауважимо, що для петель f і g у x добуток $f * g$ визначений і теж є петлею у x, тому можна говорити про його клас $[f*g]$. Переконаємося тепер у коректності введеної операції. Дійсно, якщо $[f_0] = [f_1]$ і $[g_0] = [g_1]$, то $[f_0 * g_0] = [f_1 * g_1]$ за лемою 3.1. Асоціативність операції випливає з леми 3.2:

$$([f][g])[h] = [f * g][h] = [(f * g) * h] = [f * (g * h)] = [f][g * h] = [f]([g][h])$$

для будь-яких гомотопічних класів петель $[f]$, $[g]$ і $[h]$. З леми 3.3 маємо, що $[f][e_x] = [e_x][f] = [f]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[e_x]$ є нейтральним елементом (одиницею групи). Нарешті, з леми 3.4 випливає, що $[f][\overline{f}] = [\overline{f}][f] = [e_x]$ для будь-якого $[f]$, тобто $[\overline{f}]$ є елементом, що обернений до $[f]$: $[f]^{-1} = [\overline{f}]$. Разом це й означає, що гомотопічні класи $[f]$ з даною операцією утворюють групу.

■

Означення 4.2. Група, що описана в теоремі 4.1, зветься *фундаментальною групою* простору X у точці x. Її позначають через $\pi_1(X, x)$:

$$\pi_1(X, x) = \{[f] \mid f \in C(I, X) \colon f(0) = f(1) = x\}.$$

Зауваження. Фундаментальну групу ще називають *першою гомотопічною групою.* Сенс цієї назви, а також індексу 1 у її позначенні, стане зрозумілим пізніше (див. розділ 14).

Вправа 4.1. Нехай f – петля в x. Оскільки $f(0) = f(1) = x$, це відображення факторизується у неперервне $\widehat{f} \coloneqq f/_{\sim} \colon I/_{\{0,1\}} \to X$, де $I/_{\{0,1\}}$ можна ототожнити з S^1 (згадаймо приклад 16.5 лекцій з топології). І навпаки, для будь-якого неперервного $\widehat{f} \colon S^1 \to X$, що переводить точку $1 = e^0 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ у x, відображення $f \colon I \to X \colon t \mapsto \widehat{f}(e^{2\pi i t})$ є петлею в x. Тут ототожнюємо S^1 з множиною комплексних чисел модуля 1, як ми вже робили раніше у курсі топології. Показати, що тоді $\{1\}$-гомотопним відображенням кола відповідають гомотопні шляхи, тобто множина гомотопічних класів таких відображень (відносно $\{1\}$-гомотопії) таким чином ототожнюється з $\pi_1(X, x)$, більш того, це ототожнення можна перетворити на ізоморфізм груп. Для цього, звичайно, доведеться визначити добуток класів відображень $S^1 \to X$ (див. задачу 32.3 у [5]). Таким чином, отримуємо альтернативний опис фундаментальної групи.

Приклад 4.1. Фундаментальна група одноточкового простору, очевидно, тривіальна: $\pi_1(\{x\}, x) = \{[e_x]\}$.

Приклад 4.2. Для опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ і будь-якої $x \in X$ кожна петля f у x гомотопна постійній в силу прикладу 3.1: $[f] = [e_x]$. Тому фундаментальна група також тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$.

Твердження 4.1. *Нехай точки x і y топологічного простору X з'єднані шляхом $h\colon I \to X$. Тоді відображення фундаментальних груп*

$$\alpha\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)\colon [f] \mapsto [\overline{h} * f * h]$$

коректно визначене та є ізоморфізмом груп.

Доведення. Зауважимо, що для будь-якого класу $[f] \in \pi_1(X, x)$ шлях f починається і закінчується в x, тому визначений добуток $(\overline{h}*f)*h$, що починається і закінчується в y, а отже його клас $[\overline{h} * f * h]$ належить до $\pi_1(X, y)$. Перевіримо коректність визначення α: якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то з леми 3.1 (застосованої двічі) випливає, що $(\overline{h} * f_0) * h \sim (\overline{h} * f_1) * h$, тобто $[\overline{h} * f_0 * h] = [\overline{h} * f_1 * h]$.

Покажемо тепер, що α – гомоморфізм груп. Для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\alpha([f][g]) = \alpha([f * g]) = [\overline{h} * f * g * h] = [\overline{h} * f * e_x * g * h] =$$

$$= [\overline{h} * f * h * \overline{h} * g * h] = [\overline{h} * f * h][\overline{h} * g * h] = \alpha([f])\,\alpha([g]),$$

де третя рівність випливає з лем 3.1 і 3.3, а четверта – з лем 3.1 і 3.4 (і, звичайно, ми постійно використовуємо лему 3.2, записуючи гомотопічні класи добутків без розставляння дужок).

Розглянемо відображення

$$\beta\colon \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)\colon [f] \mapsto [h * f * \overline{h}].$$

Це теж коректно визначений гомоморфізм груп, що перевіряється аналогічно до α. Покажемо, що α і β взаємно обернені. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$ маємо

$$\beta(\alpha([f])) = [h * \overline{h} * f * h * \overline{h}] = [e_x * f * e_x] = [f],$$

де теж використали усі перелічені вище леми (як саме?). Таким чином, $\beta \circ \alpha = id_{\pi_1(X,x)}$. Аналогічно встановлюємо, що $\alpha \circ \beta = id_{\pi_1(X,y)}$. Це означає, що α і β дійсно взаємно обернені, тому вони є бієкціями, а отже ізоморфізмами груп.

■

Наслідок 4.1. *Якщо топологічний простір X лінійно зв'язний, то фундаментальні групи у будь-яких двох точках X ізоморфні: $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y)$ для будь-яких $x,y \in X$.*

Зауваження. Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору не залежить від точки з точністю до ізоморфізма. Тому часто для такого простору X позначають через $\pi_1(X)$ єдиний клас еквівалентності (ізоморфності) його фундаментальних груп, і говорять про нього просто як про *фундаментальну групу* X. Наприклад, кажуть, що фундаментальна група опуклої підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ тривіальна (в силу прикладу 4.2): $\pi_1(X) = \{e\}$. Зауважимо також, що α з твердження 4.1, взагалі кажучи, залежить від h.

Вправа 4.2. Показати, що α не змінюється при заміні h в межах гомотопічного класу (тобто на $\widetilde{h} \sim h$). Показати також, що α взагалі не залежить від h тоді й тільки тоді, коли група $\pi_1(X,x)$ абелева (тобто $[f][g] = [g][f]$ для будь-яких $[f],[g] \in \pi_1(X,x)$).

Існує цікавий клас топологічних просторів, для яких фундаментальні групи завжди абелеві.

Приклад 4.3. *Топологічною групою* зветься множина G зі структурами групи та топологічного простору, що узгоджені у наступному сенсі: *відображення добутку* $\mu\colon G \times G \to G\colon (a,b) \mapsto ab$ та *відображення взяття оберненого елемента* $\iota\colon G \to G\colon a \mapsto a^{-1}$ є неперервними (де $G \times G$ розглядається з топологією прямого добутку). Прикладами топологічних груп є простір $\mathbb{R}^n$ з операцією додавання векторів, коло $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ з операцією комплексного добутку, тори $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ зі структурами прямого добутку груп (див. означення А.4) і топологічних просторів, матричні групи $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ та $\mathrm{O}(1,1)$ з топологіями, що описані у прикладі 28.2, вправах 28.1 і 28.2 курсу топології, а також матрична група $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ з прикладу 18.1 того ж курсу, топологія на якій вводиться аналогічним чином (як саме?). Перевірте, що вони всі дійсно є топологічними групами.

Вправа 4.3. Показати, що для будь-якої топологічної групи G і для кожного її елемента $a \in G$ фундаментальна група $\pi_1(G,a)$ абелева. Тут можна використати критерій абелевості, що наведений у вправі 4.2, або діяти наступним чином. Помітимо, що для будь-яких петель $f,g\colon I \to G$ у точці $e \in G$ (одиниці цієї групи) їхній "груповий добуток", тобто відображення $f \odot g\colon I \to G\colon t \mapsto f(t)g(t)$, теж буде петлею у e в силу неперервності групової операції G (чому?). Таким чином, на множині $\Omega(G,e)$ таких петель виникає бінарна операція

$$\odot\colon \Omega(G,e)\times\Omega(G,e)\to\Omega(G,e)\colon (f,g)\mapsto f\odot g.$$

Показати, що ця операція перетворює $\Omega(G,e)$ на групу і що вона коректно "факторизується" у операцію

$$\odot\colon \pi_1(G,e)\times\pi_1(G,e)\to\pi_1(G,e)\colon ([f],[g])\mapsto [f\odot g].$$

Показати, що ця операція збігається з груповою операцією $\pi_1(G,e)$, тобто $[f]\odot[g]=[f][g]$ для будь-яких $[f],[g]\in\pi_1(G,e)$, і є комутативною, що й демонструє абелевість $\pi_1(G,e)$. Для цього можна розглянути шлях $(f*e_e)\odot(e_e*g)$ для довільних $f,g\in\Omega(G,e)$. Нарешті, показати, що усі фундаментальні групи топологічної групи ізоморфні навіть якщо вона не є лінійно зв'язною. Для цього можуть знадобитися техніка і результати наступного розділу та відображення *лівого зсуву* на довільний елемент $a\in G$, що діє множенням на цей елемент зліва: $L_a\colon G\to G\colon b\mapsto ab$. Воно, зокрема, є гомеоморфізмом G на себе (чому?). Див. також розділи 32.7x та 33.5x у [5].

5 Індуковані гомоморфізми та гомотопічна інваріантність фундаментальної групи

Перевіримо тепер, що фундаментальна група – дійсно інваріант: гомотопічний (значення цього терміна пояснюється у зауваженні після наслідку 5.1), а отже й топологічний. Для цього знадобиться поняття індукованого гомоморфізма, що важливе й саме по собі.

Твердження 5.1 (Конструкція індукованого гомоморфізма). *Нехай X і Y – топологічні простори, $\varphi\colon X\to Y$ – неперервне відображення, точка $x\in X$. Тоді відображення*

$$\varphi_*\colon \pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,\varphi(x))\colon [f]\mapsto[\varphi\circ f]$$

коректно визначене і має наступні властивості:

<u>*1.*</u> *φ_* – гомоморфізм груп.*

<u>*2.*</u> *$(\psi\circ\varphi)_*=\psi_*\circ\varphi_*$ для будь-яких неперервних $\varphi\colon X\to Y$ і $\psi\colon Y\to Z$.*

<u>*3.*</u> *$(id_X)_*=id_{\pi_1(X,x)}$.*

4. *Якщо відображення $\varphi, \psi \colon X \to Y$ гомотопні, F – їхня гомотопія і $\alpha \colon \pi_1(Y, \varphi(x)) \to \pi_1(Y, \psi(x))$ – ізоморфізм, що побудований з використанням шляху $t \mapsto F(x,t)$ як у твердженні 4.1, то $\psi_* = \alpha \circ \varphi_*$.*

Доведення. Якщо $f \colon I \to X$ – петля в x, то з $f(0) = f(1) = x$ випливає $(\varphi \circ f)(0) = (\varphi \circ f)(1) = \varphi(x)$. Тому відображення $\varphi \circ f \colon I \to Y$, що неперервне як композиція неперервних, є петлею в $\varphi(x)$. Крім того, якщо $[f_0] = [f_1]$, тобто $f_0 \sim f_1$, то $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$ за лемою 2.1 (для гомотопії шляхів f_0 і f_1 та тривіальної гомотопії), тому $[\varphi \circ f_0] = [\varphi \circ f_1]$. Отже, φ_* визначене коректно. Перевіримо заявлені властивості.

1. Для будь-яких гомотопічних класів петель $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$ маємо з означень

$$\varphi_*([f][g]) = \varphi_*([f * g]) = [\varphi \circ (f * g)] =$$

$$= [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g] = \varphi_*([f])\, \varphi_*([g]),$$

тобто φ_* – дійсно гомоморфізм.

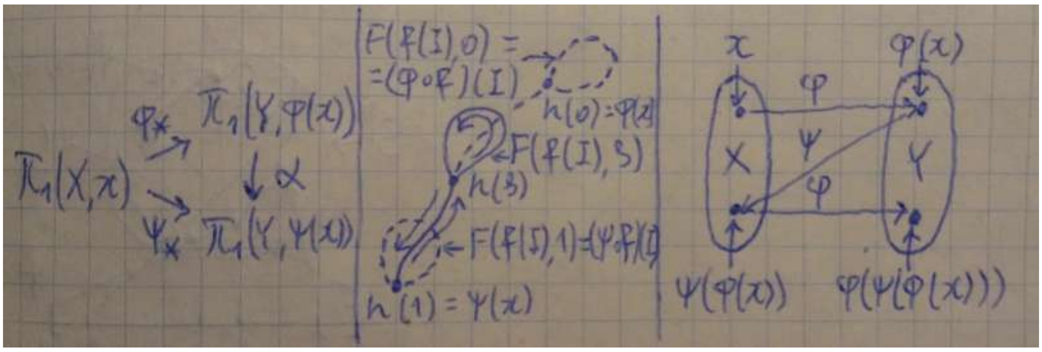
2. Для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$:

$$\psi_*(\varphi_*([f])) = \psi_*([\varphi \circ f]) = [\psi \circ \varphi \circ f] = (\psi \circ \varphi)_*([f])$$

за означеннями.

3. Це так, бо $(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f]$ для будь-якого $[f] \in \pi_1(X, x)$.

4. Іншими словами, нам потрібно показати комутативність діаграми з груп і їхніх гомоморфізмів, що зображена на ілюстрації знизу зліва (тобто рівність усіх можливих комбінацій стрілочок):



Отже, нехай F – гомотопія φ і ψ: $F(\cdot,0)=\varphi$, $F(\cdot,1)=\psi$. Позначимо шлях з умови через $h\colon I\to Y\colon t\mapsto F(x,t)$. Він з'єднує $F(x,0)=\varphi(x)$ і $F(x,1)=\psi(x)$. Тоді, згідно з побудовою у твердженні 4.1, для довільного $[f]\in\pi_1(X,x)$ будемо мати $\alpha(\varphi_*([f]))=[\overline{h}*(\varphi\circ f)*h]$. Нам треба довести, що цей гомотопічний клас дорівнює $\psi_*([f])=[\psi\circ f]$, тобто побудувати гомотопію петель $(\overline{h}*(\varphi\circ f))*h$ і $\psi\circ f$ у $\psi(x)$. За означеннями оберненого шляху і добутку шляхів, для кожного $t\in I$ маємо

$$((\overline{h}*(\varphi\circ f))*h)(t)=\left[\begin{array}{ll} F(x,1-4t), & t\in[0,\frac{1}{4}];\\ \varphi(f(4t-1)), & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}];\\ F(x,2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1].\end{array}\right.$$

Визначимо відображення $H\colon I\times I\to X$ умовою

$$H(t,s):=\left[\begin{array}{ll} F(x,1-4t), & t\in[0,\frac{1-s}{4}];\\ F(f\left(\frac{4t+s-1}{3s+1}\right),s), & t\in[\frac{1-s}{4},\frac{1+s}{2}];\\ F(x,2t-1), & t\in[\frac{1+s}{2},1].\end{array}\right.$$

Це відображення коректно визначене і неперервне, бо при $t=\frac{1-s}{4}$ маємо вірну рівність $F(x,s)=F(f(0),s)$, а при $t=\frac{1+s}{2}$ – $F(x,s)=F(f(1),s)$. При цьому $H(0,s)=H(1,s)=F(x,1)=\psi(x)$ для будь-якого $s\in I$, отже H дійсно є потрібною нам гомотопією петель $H(\cdot,0)=(\overline{h}*(\varphi\circ f))*h$ і $H(\cdot,1)=\psi\circ f$. Ідея її побудови полягає у наступному: для кожного s ми проходимо уздовж h від точки $\psi(x)=h(1)$ до $h(s)=F(x,s)$, далі уздовж петлі $t\mapsto F(f(t),s)$ у точці $F(x,s)$ і назад у $\psi(x)$ уздовж h (див. малюнок вище у центрі).

$\blacksquare$

Означення 5.1. Відображення φ_* з попереднього твердження будемо називати гомоморфізмом фундаментальних груп, що *індукований* відображенням φ (у точці x).

Зауваження. Звичайно, φ_* залежить не тільки від φ, а й від точки x, але її зазвичай не вказують явно у позначенні, що може привести до певних незручностей.

Твердження 5.2. *Нехай $\varphi\colon X\to Y$ і $\psi\colon Y\to X$ – гомотопічно обернені відображення топологічних просторів. Тоді*

- $\varphi_*\colon\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,\varphi(x))$ *– ізоморфізм груп для будь-якої $x\in X$;*
- $\psi_*\colon\pi_1(Y,y)\to\pi_1(X,\psi(y))$ *– ізоморфізм груп для будь-якої $y\in Y$.*

Доведення. Те, що це гомоморфізми, вже доведено у пункті 1. попереднього твердження. Залишилося довести їх бієктивність. Фіксуємо якусь довільну $x \in X$, і далі розглядаємо такі індуковані гомоморфізми (див. також ілюстрацію вище справа):

$$\begin{aligned}
\varphi_*\colon &\quad \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,\varphi(x)),\\
\psi_*\colon &\quad \pi_1(Y,\varphi(x)) \to \pi_1(X,\psi(\varphi(x))),\\
\varphi'_*\colon &\quad \pi_1(X,\psi(\varphi(x))) \to \pi_1(Y,\varphi(\psi(\varphi(x)))),
\end{aligned}$$

де штрих нам знадобився саме для компенсації відсутності базової точки у позначенні. З умови гомотопічної оберненості $\psi \circ \varphi \sim id_X$ маємо

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = \alpha \circ (id_X)_* = \alpha \circ id_{\pi_1(X,x)} = \alpha,$$

де перші три рівності випливають з пунктів 2., 4. і 3. попереднього твердження відповідно, а α – деякий ізоморфізм $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,\psi(\varphi(x)))$. Зокрема, звідси випливає, що гомоморфізм ψ_* сюр'єктивний. Дійсно, для будь-якого $[f] \in \pi_1(X,\psi(\varphi(x)))$

$$[f] = \alpha(\alpha^{-1}([f])) = \psi_*(\varphi_*(\alpha^{-1}([f]))) \in \psi_*(\pi_1(Y,\varphi(x))).$$

Аналогічним чином з $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ отримуємо, що $\varphi'_* \circ \psi_* = \beta$ для деякого ізоморфізма $\beta\colon \pi_1(Y,\varphi(x)) \to \pi_1(Y,\varphi(\psi(\varphi(x))))$ (перевірте це). У свою чергу, з цього випливає ін'єктивність ψ_*. Дійсно, нехай $\psi_*([f]) = \psi_*([g])$ для деяких $[f],[g] \in \pi_1(Y,\varphi(x))$. Тоді

$$\beta([f]) = \varphi'_*(\psi_*([f])) = \varphi'_*(\psi_*([g])) = \beta([g]),$$

й тому $[f] = [g]$. Отже ψ_* – бієкція, а тоді й $\varphi_* = (\psi_*)^{-1} \circ \alpha$ теж. Аналогічно доведемо друге твердження, починаючи з $y \in Y$ (або просто використаємо симетричність гомотопічної еквівалентності).

■

Наслідок 5.1. *Якщо лінійно зв'язні топологічні простори X і Y гомотопічно еквівалентні, то $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(Y,y)$ для будь-яких точок $x \in X$ і $y \in Y$.*

Доведення. Випливає з попереднього твердження та наслідку 4.1.

■

Зауваження. У позначеннях, що введені в зауваженні після наслідку 4.1, це виглядатиме як $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ для лінійно зв'язних гомотопічно еквівалентних X і Y (або просто $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$, бо це класи ізоморфності груп). Таким чином, фундаментальна група лінійно зв'язного простору зберігається (з точністю до ізоморфізма) при гомотопічних еквівалентностях – є, як кажуть, його *гомотопічним інваріантом.* Зокрема, вона є й топологічним інваріантом. Точніше буде сказати, що гомотопічна інваріантність – це властивість *функтора* з *категорії* топологічних просторів з відміченими точками та їх неперервних відображень, що переводять відмічені точки у відмічені, у категорію груп та їх гомоморфізмів, що визначений конструкціями фундаментальної групи та індукованого гомоморфізма. Детальніше про цю термінологію див. наприклад, у [3, с. 153-157] або [16, с. 209-213].

Твердження 5.3. *Для будь-яких топологічних просторів X, Y і будь-якої точки $(x, y) \in X \times Y$*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y),$$

тобто фундаментальна група прямого добутку X та Y ізоморфна прямому добутку їх фундаментальних груп (див. означення A.4).

Доведення. Зауважимо, що для будь-якої петлі f у (x, y) її композиції з канонічними проєкціями $p_X \circ f$ і $p_Y \circ f$ є петлями у x і y відповідно. Тому можна коректно визначити відображення $\alpha\colon \pi_1(X \times Y, (x, y)) \to \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ умовою $\alpha([f]) \coloneqq ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f]) = ([p_X \circ f], [p_Y \circ f])$. Це відображення буде гомоморфізмом груп:

$$\alpha([f][g]) = ((p_X)_*([f][g]), (p_Y)_*([f][g])) =$$

$$= ((p_X)_*[f](p_X)_*[g], (p_Y)_*[f](p_Y)_*[g]) =$$

$$= ((p_X)_*[f], (p_Y)_*[f])((p_X)_*[g], (p_Y)_*[g]) = \alpha([f])\,\alpha([g])$$

для будь-яких $[f], [g] \in \pi_1(X \times Y, (x, y))$ за означенням і гомоморфністю $(p_X)_*$ та $(p_Y)_*$. Щоб перевірити бієктивність α, побудуємо відображення $\beta\colon \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X \times Y, (x, y))$, що переводить кожну пару гомотопічних класів $([g], [h]) \in \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ у гомотопічний клас $[(g, h)]$ відображення $(g, h)\colon I \to X \times Y$, яке визначене умовою $t \mapsto (g(t), h(t))$ і є петлею у (x, y) (див. також зауваження після доведення теореми 26.1 курсу топології). Воно коректно визначене, бо з гомотопностей шляхів $g_0 \sim g_1$ і $h_0 \sim h_1$ випливає $(g_0, h_0) \sim (g_1, h_1)$ (перевірте це), і

$$\alpha(\beta([g], [h])) = \alpha([(g, h)]) = ([p_X \circ (g, h)], [p_Y \circ (g, h)]) = ([g], [h]),$$

$$\beta(\alpha([f])) = \beta([p_X \circ f], [p_Y \circ f]) = [(p_X \circ f, p_Y \circ f)] = [f],$$

тобто α і β взаємно обернені, а отже є ізоморфізмами.

■

Приклад 5.1. Згадаймо, що $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ для $n \geqslant 1$. Тоді з (топологічної) інваріантності фундаментальної групи, твердження 5.3, прикладу 4.2 та властивостей прямого добутку груп випливає, що

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x) \simeq \pi_1(S^{n-1}, y) \times \pi_1(\mathbb{R}, z) = \pi_1(S^{n-1}, y) \times \{[e_z]\} \simeq \pi_1(S^{n-1}, y)$$

для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, де $(y, z) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ – точка, у яку переходить x при гомеоморфізмі. Або у спрощених позначеннях для лінійно зв'язних просторів: $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ (при $n \geqslant 2$). Втім, цей ізоморфізм можна було встановити й без застосування добутків: він також випливає з прикладу 2.6 та гомотопічної інваріантності фундаментальної групи.

Зауваження. Твердження 5.3 узагальнюється також на будь-яку скінченну кількість множників (за індукцією або безпосередньо).

6 Однозв'язні простори

Введемо клас просторів, для яких фундаментальні групи найпростіші – тобто тривіальні.

Означення 6.1. Лінійно зв'язний топологічний простір X називається *однозв'язним*, якщо всі його фундаментальні групи тривіальні: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для будь-якої $x \in X$.

Зауваження. Лінійно зв'язний простір, що гомотопічно еквівалентний однозв'язному, також буде однозв'язним в силу наслідку 5.1. З наслідку 4.1 випливає, що умову тривіальності фундаментальної групи достатньо перевірити в одній точці. Неформально кажучи, вона означає, що будь-яку петлю у цьому просторі можна стягнути в точку (тобто вона гомотопна постійній). Виявляється, що вірна й більш загальна умова:

Твердження 6.1. *Топологічний простір є однозв'язним тоді й тільки тоді, коли він є лінійно зв'язним і у ньому будь-які два шляхи із загальними початком та кінцем гомотопні.*

Доведення. $\underline{\Leftarrow}$ Достатність виконується автоматично, бо петлі – теж шляхи, отже за умовою кожна петля гомотопна постійній.

$\underline{\Rightarrow}$ Нехай тепер X однозв'язний, f і g – якісь шляхи в X, і $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Нам потрібно побудувати їх гомотопію, тобто відображення $F \in C(I \times I, X)$ таке, що $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$,

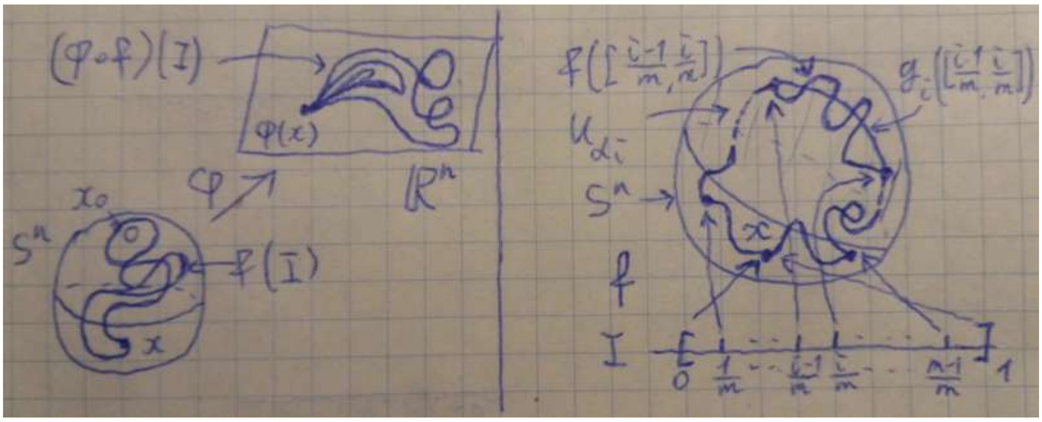
$F(0,s) = x$ і $F(1,s) = y$ для будь-яких $t, s \in I$. Цю задачу можна інтерпретувати як продовження на квадрат $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ неперервного відображення, що задане на його межі $\partial(I \times I)$. Зауважимо, що $I \times I$ гомеоморфний замкненому кругу D^2. Гомеоморфізм можна побудувати, наприклад, за допомогою центральної проєкції у площині, і при ньому межа квадрата переходить у межу круга – коло S^1. Тому для побудови потрібної нам гомотопії шляхів достатньо побудувати продовження деякого неперервного відображення $\widehat{h}\colon S^1 \to X$ на D^2 (перевірте це формально, використавши композиції з відповідним гомеоморфізмом аналогічно до міркувань у прикладі 6.2 нижче). Згідно з твердженням 1.2, для цього, у свою чергу, потрібно, щоб $\widehat{h}$ було гомотопне постійному відображенню. Далі діємо аналогічно до вправи 4.1 (власне, потрібна гомотопність випливає з її твердження, але ми тут випишемо її окремо).

Розглянемо відображення $h\colon I \to X\colon t \mapsto \widehat{h}(e^{2\pi it})$. Воно неперервне як композиція неперервних, і $h(0) = h(1) = \widehat{h}(1)$, тобто це петля. За умовою однозв'язності існує гомотопія H петлі h та постійної петлі $e_{\widehat{h}(1)}$. Визначимо тепер відображення $\widehat{H}\colon S^1 \times I \to X$ умовою $\widehat{H}(e^{2\pi it}, s) := H(t,s)$. Воно коректно визначене і неперервне (чому?), при цьому $\widehat{H}(e^{2\pi it}, 0) = H(t,0) = h(t) = \widehat{h}(e^{2\pi it})$ і $\widehat{H}(e^{2\pi it}, 1) = H(t,1) = \widehat{h}(1)$ для будь-якого t, тобто це гомотопія $\widehat{h}$ і постійного відображення в точку $\widehat{h}(1)$. Це й завершує доведення.

■

Приклад 6.1. Будь-який стяжний простір є однозв'язним згідно з наслідком 5.1 і прикладом 4.1. Зокрема, у таких просторах (наприклад, у зірчатих підмножинах $\mathbb{R}^n$) будь-які два шляхи із загальними початком та кінцем гомотопні в силу попереднього твердження.

Приклад 6.2. Сфери S^n однозв'язні при $n \geqslant 2$. Дійсно, нехай f – петля у деякій $x \in S^n$. Треба встановити, що ця петля гомотопна постійній. Спочатку припустимо, що носій f не покриває всю сферу, тобто існує $x_0 \in S^n \setminus f(I)$. Позначимо через $\varphi\colon S^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ стереографічну проєкцію (див. приклад 14.5 з курсу топології), що є гомеоморфізмом. Тоді $\varphi \circ f$ коректно визначене і неперервне, а отже є петлею в $\mathbb{R}^n$ у точці $\varphi(x)$ (див. ілюстрацію нижче). Оскільки $\mathbb{R}^n$ однозв'язний за попереднім прикладом, існує гомотопія F петлі $\varphi \circ f$ та постійної петлі $e_{\varphi(x)}$. Тоді $\varphi^{-1} \circ F$ (що неперервне як композиція неперервних) є гомотопією $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 0) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f$ і $\varphi^{-1} \circ F(\cdot, 1) = \varphi^{-1} \circ e_{\varphi(x)} = e_x$, яка нам і потрібна.



Тепер розглянемо загальний випадок (якщо існування петлі, носій якої покриває всю сферу, видається неприродним, можна згадати про класичний приклад кривої Пеано у площині, див. [1, с. 37-40] або [5, с. 65-66]). Нашою задачею буде побудувати гомотопію петель f і деякої g такої, що $g(I) \neq S^n$. Тим самим ми зведемо цей випадок до попереднього й нарешті покажемо однозв'язність S^n. Розглянемо деяке покриття $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сфери S^n, що складається з відкритих напівсфер. За неперервністю f прообраз цього покриття $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ є тоді відкритим покриттям компактного метричного простору I. Застосуємо до цього покриття лему Лебега і знайдемо якесь його число Лебега $\delta > 0$. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді з означення числа Лебега випливає, що для кожного i від 1 до m існує таке $\alpha_i \in A$, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$, а отже $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{\alpha_i}$: образ $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]$ міститься у деякій відкритій напівсфері. З прикладу 1.3 (і аналогічно до прикладу 3.2) тоді випливає, що для кожного i шлях $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ буде $\{\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\}$-гомотопний деякому шляху $g_i \in C([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}], U_{\alpha_i})$ з тими ж кінцями, носієм якого є дуга великого кола S^n (див. малюнок вище).

Визначимо тепер відображення $g\colon I \to S^n$ умовою $g|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]} = g_i$ для кожного i. Зауважимо, що за побудовою $g_i(\frac{i-1}{m}) = f(\frac{i-1}{m}) = g_{i-1}(\frac{i-1}{m})$ для i від 2 до m, $g_1(0) = f(0) = x$ і $g_m(1) = f(1) = x$, тому g коректно визначене, неперервне і є петлею в x. Гомотопію між f і g можна побудувати, "зшиваючи" гомотопії між їхніми частинами, аналогічно до доведення леми 3.1. Більш точно, нехай F_i – $\{\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\}$-гомотопія $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ та g_i для i від 1 до m. Тоді неважко перевірити, що відображення $F\colon I \times I \to S^n$, що задане умовою $F|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times I} = F_i$ для кожного i, коректно визначене та є потрібною гомотопією. При цьому носій g міститься у скінченному об'єднанні дуг великих кіл S^n, а отже не дорівнює S^n (саме тут умова $n \geqslant 2$ є суттєвою). Отже, це потрібна нам петля, і, комбінуючи дві частини доведення, отримуємо $f \sim g \sim e_x$.

Приклад 6.3. Простір $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ однозв'язний при $n \geqslant 3$ в силу попереднього прикладу, оскільки $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1})$ за прикладом 5.1 (або просто в силу гомотопічної еквівалентності, що була встановлена у прикладі 2.6).

Приклад 6.4. Прямий добуток будь-яких двох однозв'язних просторів однозв'язний за теоремою 26.1 курсу топології (що забезпечує лінійну зв'язність) та твердженням 5.3. При цьому прямий добуток двох стяжних просторів стяжний за вправою 2.1. Це також вірно для прямого добутку довільної скінченної кількості просторів за очевидними узагальненнями згаданих тверджень.

Вправа 6.1. Показати, що вірне й обернене: якщо $X \times Y$ однозв'язний (відповідно, стяжний), то простори X та Y однозв'язні (стяжні). Узагальнити це на довільну скінченну кількість множників.

7 Накриття

Ми вже достатньо багато дізналися про фундаментальні групи, але поки що не маємо жодного нетривіального прикладу і навіть не знаємо, чому дорівнює фундаментальна група кола. У цьому та наступних розділах ми познайомимося з технікою накрить, що є одним з найважливіших інструментів алгебраїчної топології та її застосувань. Зокрема, за допомогою накрить, як побачимо, можна обчислювати фундаментальні групи. Накриття є окремим випадком більш загальної топологічної конструкції *розшарування* (див., наприклад, [3, с. 291-318] або [14, гл. 4]).

Означення 7.1. Трійка (X, Y, p), де $p\colon X \to Y$ – сюр'єктивне неперервне відображення топологічних просторів, зветься *накриттям*, якщо для будь-якої $y \in Y$ існує відкрита $U \ni y$ така, що $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, де

- усі U_α відкриті;
- $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ для будь-яких $\alpha \neq \beta$ (тобто об'єднання диз'юнктне);
- $p|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to U$ є гомеоморфізмом для будь-якого α (відносно індукованих топологій).

При цьому X називають *накриваючим простором* цього накриття, Y – його *базою* (а також говорять, що (X, Y, p) – накриття Y), p – *накриваючим відображенням* (або просто накриттям), $p^{-1}(y)$ – *шаром* накриття над точкою $y \in Y$. Накриття зветься *універсальним*, якщо його накриваючий простір однозв'язний.

Зауваження. Також називатимемо окіл U з попереднього означення *правильно накритим*, а про множини U_α для $\alpha \in A$ будемо говорити, що вони *правильно накривають* U (і взагалі будемо так говорити про будь-яку відкриту множину U, що задовольняє умовам із означення). З означеня тоді випливає, що правильно накриті околи утворюють відкрите покриття Y. Зауважимо також, що будь-яка відкрита підмножина $V \subset U$ правильно накритого околу також правильно накрита: якщо покласти $V_\alpha := (p|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ для кожного $\alpha \in A$, то $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$ також задовольняє усім умовам із означення (перевірте це).

Приклад 7.1. Будь-який гомеоморфізм $p\colon X \to Y$ задає приклад накриття (т. зв. *тривіальне накриття*). У цьому випадку в якості U можна взяти Y, а в якості єдиного U_α – X.

Вправа 7.1. Показати, що для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p відкрите (тобто у загальному випадку йому "заважає" бути гомеоморфізмом лише відсутність ін'єктивності).

Приклад 7.2. Нехай Y – довільний топологічний простір, F – простір з дискретною топологією, $X = Y \times F$, і $p = p_Y\colon X \to Y$ – канонічна проєкція на Y. Тоді для $U = Y$ маємо $p^{-1}(Y) = Y \times F = \bigcup\limits_{f \in F} Y \times \{f\}$ – диз'юнктне об'єднання. Тут усі $Y \times \{f\}$ відкриті за побудовою топології прямого добутку (бо одноточкові $\{f\}$ відкриті у дискретному F), а обмеження $p|_{Y \times \{f\}}$ є гомеоморфізмами за пунктом 4. твердження 15.2 курсу топології, тому (X, Y, p) – накриття.

Вправа 7.2. Показати, що будь-яке накриття (X, Y, p) локально влаштоване як у попередньому прикладі: якщо $U \subset Y$ – правильно накритий окіл, то його прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфний добутку $U \times p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка U, а шар $p^{-1}(y)$ наділений дискретною топологією.

Вправа 7.3. Показати, що якщо підмножина $A \subset Y$ бази накриття (X, Y, p) зв'язна (зокрема лінійно зв'язна), то усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in A$ рівнопотужні.

Зауваження. Якщо усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in Y$ складаються з n елементів, говорять, що накриття – *n-листове.* Зауважимо, що для прообразу правильного накритого околу $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ з означення накриття доповненням до кожної відкритої U_α буде $\bigcup\limits_{\beta \neq \alpha} U_\beta$ – об'єднання відкритих множин, тому всі U_α будуть відкритозамкненими в $p^{-1}(U)$. Звідси можна вивести, що, наприклад, ортогональна проєкція $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ площини на вісь x не визначає накриття. Дійсно, якщо припустити, що існує правильно накритий окіл U, скажімо, точки 0, то він повинен містити інтервал (a, b), який теж буде правильно накритим, як було зауважено вище. Його прообраз $p^{-1}((a,b)) = (a,b)\times\mathbb{R}$ – смуга у площині, що є зв'язною, а отже єдина її непорожня відкритозамкнена підмножина – це вона сама. Тобто об'єднання $p^{-1}((a,b)) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$ складається з єдиної $V_\alpha = (a,b)\times\mathbb{R}$, яка за означенням повинна бути гомеоморфна (a, b). Але вони негомеоморфні (це випливає з прикладу 23.11 курсу топології), протиріччя.

Зауваження. Для нас особливе значення матимуть приклади, що утворені за допомогою дії групи на просторі (див. розділ 18 курсу топології). Для фіксованої дії λ групи G на множині X, як і раніше, будемо використовувати позначення з точками: $\lambda\colon G\times X \to X\colon (a,x)\mapsto \lambda(a,x) = a\cdot x$.

Означення 7.2. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *неперервною*, якщо для будь-якого $a \in G$ відображення $\lambda_a \coloneqq \lambda(a,\cdot)\colon X \to X\colon x \mapsto a\cdot x$ неперервне.

Зауваження. Для будь-яких $a, b \in G$ і $x \in X$ за властивістю дії $\lambda_a(\lambda_b(x)) = a\cdot(b\cdot x) = ab\cdot x$, тобто $\lambda_a\circ\lambda_b = \lambda_{ab}$. Зокрема, $\lambda_a\circ\lambda_{a^{-1}} = \lambda_{a^{-1}}\circ\lambda_a = \lambda_e = id_X$ (бо $\lambda_e(x) = e\cdot x = x$ для будь-якої $x \in X$), тобто відображення $\lambda_{a^{-1}}$ є оберненим до λ_a: $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$. Тому ці відображення є біекціями. Якщо дія неперервна, то усі λ_a і обернені до них $\lambda_{a^{-1}}$ неперервні, тобто це гомеоморфізми:

Наслідок 7.1. *Дія λ групи G на просторі X неперервна тоді й тільки тоді, коли $\lambda_a\colon X \to X$ є гомеоморфізмом для будь-якого $a \in G$.*

Означення 7.3. Дія λ групи G на топологічному просторі X зветься *цілком розривною*, якщо для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $U\cap\lambda_a(U) = \varnothing$ для будь-якого $a \in G$, $a \neq e$.

Зауваження. Це один зі способів вказати, що група діє на просторі "дискретно". З означень випливає, що будь-яка цілком розривна дія є вільною (зокрема ефективною). Для фіксованої дії далі будемо використовувати позначення $a\cdot U \coloneqq \lambda_a(U) = \{a\cdot x \mid x \in U\}$. З означення випливає, що умова цілком розривності еквівалентна формально сильнішій умові:

Наслідок 7.2. *Дія групи G на просторі X цілком розривна тоді й тільки тоді, коли для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $a \cdot U \cap b \cdot U = \varnothing$ для будь-яких $a, b \in G$, $a \neq b$.*

Доведення. $\Leftarrow$ Достатньо покласти $b = e$ в умові.

$\Rightarrow$ Якщо $a \neq b$, то $a^{-1}b \neq e$, тому за означенням для будь-якої $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що $U \cap a^{-1}b \cdot U = \varnothing$. Застосовуючи до цієї рівності біекцію λ_a, отримуємо потрібне:

$$a \cdot U \cap b \cdot U = a \cdot U \cap a \cdot (a^{-1}b \cdot U) = \varnothing.$$

■

Вправа 7.4. Показати, що будь-яка вільна неперервна дія скінченної групи на хаусдорфовому топологічному просторі є цілком розривною (див. [7, с. 167]).

Твердження 7.1. *Якщо група G діє на топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, а $p\colon X \to X/_G$ – канонічна проекція на простір орбіт $X/_G$ цієї дії, то $(X, X/_G, p)$ є накриттям.*

Доведення. Нагадаємо, що образом кожної точки $x \in X$ під дією канонічної проекції є її орбіта: $p(x) = G \cdot x$. Ми знаємо, що p неперервна і сюр'єктивна. Для будь-якої орбіти $G \cdot x \in X/_G$ розглянемо окіл $U \ni x$ з означення цілком розривної дії (при цьому в якості x можна обрати довільну точку цієї орбіти). Тоді множина $G \cdot U := \{G \cdot y \mid y \in U\}$ є відкритим околом $G \cdot x$ у просторі $X/_G$. Дійсно, вона містить $G \cdot x$ за побудовою, і

$$p^{-1}(G \cdot U) = \{a \cdot x \mid a \in G,\, x \in U\} = \bigcup_{a \in G} a \cdot U = \bigcup_{a \in G} \lambda_a(U)$$

відкрита, оскільки дія неперервна, а отже всі λ_a є гомеоморфізмами за наслідком 7.1, тому всі $\lambda_a(U)$ відкриті. Тоді $G \cdot U$ відкрита за означенням фактортопології на $X/_G$.

Більш того, відкриті множини $a \cdot U$ для $a \in G$ правильно накривають $G \cdot U$ (звідки й випливає за означенням, що $(X, X/_G, p)$ – накриття). Дійсно, ми тільки що побачили, що $p^{-1}(G \cdot U)$ є їх об'єднанням, яке диз'юнктне, бо $a \cdot U \cap b \cdot U = \varnothing$ при $a \neq b$ за наслідком 7.2 (зауважимо, що множина U в його доведенні – та ж, що і в означенні цілком розривної дії). Залишилося перевірити, що для будь-якого a обмеження канонічної проекції $p|_{a \cdot U}\colon a \cdot U \to G \cdot U\colon a \cdot y \mapsto G \cdot y$ – гомеоморфізм. Дісно, це сюр'єкція, бо $G = \{ba \mid b \in G\}$ (чому?), а отже за властивостями дії $G \cdot y = G \cdot (a \cdot y) = p(a \cdot y)$ для будь-якої $G \cdot y \in G \cdot U$. Якщо

$p(a \cdot y) = p(a \cdot z)$, тобто $G \cdot y = G \cdot z$, то існує $b \in G$ такий, що $z = b \cdot y$. Оскільки $y, z \in U$, $b = e$ за умовою на U, тому $y = z$ і $a \cdot y = a \cdot z$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – ін'єкція. Вона неперервна як обмеження неперервної проєкції p. Нарешті, будь-яка відкрита підмножина $a \cdot U$ має вигляд $a \cdot V$ для деякої відкритої $V \subset U$, бо λ_a – гомеоморфізм. Тоді її образ $p(a \cdot V) = G \cdot V$ буде відкритим у $X/_G$ (аналогічно до $G \cdot U$), а отже і в індукованій топології $G \cdot U$. Отже, $p|_{a \cdot U}$ – відкрита неперервна біекція, тобто гомеоморфізм.

■

Зауваження. Для таких накрить шаром над будь-якою точкою (орбітою) $G \cdot x \in X/_G$ буде $p^{-1}(G \cdot x) = \{a \cdot x \mid a \in G\}$, що ототожнюється з G: $a \cdot x \leftrightarrow a$, при цьому a визначений однозначно, бо дія вільна. І взагалі, індексуюча множина A з означення накриття природним чином ототожнюється з шаром $p^{-1}(y)$, де y – будь-яка точка правильно накритого околу U (як саме?).

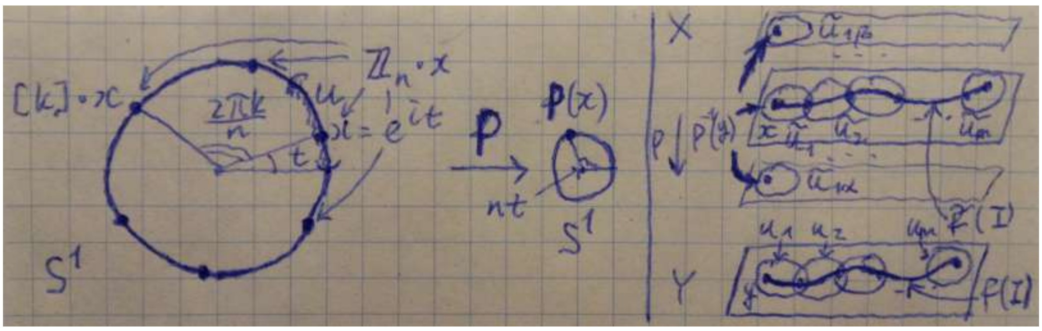
Приклад 7.3. Дія $G = \mathbb{R}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 18.3 курсу топології ($a \cdot x = x + a$) є неперервною, бо паралельні перенесення неперервні, але не цілком розривною (хоч і вільною). Дійсно, будь-який відкритий окіл U точки $0 \in \mathbb{R}^n$ повинен містити евклідову кулю $B_\varepsilon(0)$ для деякого $\varepsilon > 0$. Але тоді дія елементом $a = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \neq 0$ переводить 0 у $a \cdot 0 = (\frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in B_\varepsilon(0)$, тобто $U \cap a \cdot U \neq \varnothing$.

Вправа 7.5. Чи є неперервними дії з прикладів 18.1 і 18.2 курсу топології? Чи є вони цілком розривними?

Приклад 7.4. Розглянемо тепер дію $G = \mathbb{Z}^n$ на $X = \mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями з прикладу 18.4 курсу топології (знову $a \cdot x = x + a$). Як і у попередньому прикладі, вона неперервна. Щоб показати, що вона цілком розривна, покладемо $U = B_{\frac{1}{2}}(x)$ для будь-якої $x \in \mathbb{R}^n$ (тут кулі знову евклідові). Оскільки для $a \neq 0$ евклідова відстань між x і $a \cdot x$ не менша за 1, з нерівності трикутника випливає, що $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = \varnothing$ (де $a \cdot B_{\frac{1}{2}}(x) = B_{\frac{1}{2}}(a \cdot x)$). Нагадаємо, що простір орбіт для даної дії гомеоморфний n-вимірному тору T^n, далі для спрощення позначень будемо їх ототожнювати. При цьому ототожненні канонічній проєкції відповідатиме відображення $p\colon \mathbb{R}^n \to T^n\colon (x^1, \dots, x^n) \mapsto (e^{2\pi i x^1}, \dots, e^{2\pi i x^n})$. Таким чином, з твердження 7.1 випливає, що $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ – накриття T^n, яке є універсальним за прикладом 6.1. Зокрема, при $n = 1$ маємо універсальне накриття $(\mathbb{R}, S^1, p)$ кола.

Приклад 7.5. У прикладі 18.5 курсу топології було показано, зокрема, що n-вимірний дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфний простору орбіт дії групи $G = \mathbb{Z}_2$ на сфері $X = S^n$ (знову ж будемо їх ототожнювати для спрощення позначень). Тут $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$ – група з двох елементів (див. приклад A.4), а її дія задається умовами $[0] \cdot x = x$ і $[1] \cdot x = -x$. Оскільки тотожне відображення і центральна симетрія сфери неперервні, ця дія неперервна. Вона також цілком розривна: для будь-якої $x \in S^n$ у якості U можна взяти будь-яку відкриту напівсферу, що містить x (або просто пошлемося на вправу 7.4). Отже, $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ – дволистове накриття $\mathbb{R}P^n$ за твердженням 7.1. Тут канонічна проєкція має вигляд $p\colon S^n \to \mathbb{R}P^n\colon (x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto (x^1 : \ldots : x^{n+1})$. При $n \geqslant 2$ це накриття універсальне в силу прикладу 6.2.

Приклад 7.6. Нехай тепер $G = \mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$ – група залишків за модулем n з прикладу A.4, $X = S^1$ – коло (яке знову ототожнюємо з множиною комплексних чисел модуля 1), а дія задається умовою $[k] \cdot e^{it} = e^{\frac{2\pi i k}{n}} e^{it} = e^{i(t + \frac{2\pi k}{n})}$, тобто клас еквівалентності $[k]$ діє обертанням кола на кут $\frac{2\pi k}{n}$. Це коректно визначена дія (чому?), вона неперервна (бо обертання неперервні) та цілком розривна: для $x \in S^1$ у якості U візьмемо відкриту дугу довжини $\frac{2\pi}{n}$, що містить x (або знову ж використаємо вправу 7.4). Визначимо відображення $p\colon S^1 \to S^1$ умовою $p(e^{it}) = e^{int}$. Воно переводить усі точки кожної орбіти $\mathbb{Z}_n \cdot e^{it}$ в одну точку e^{int} кола (і різні орбіти – в різні точки), тому факторизується у бієкцію $S^1/_{\mathbb{Z}_n} \to S^1$ (див. малюнок нижче). Можна сказати, що p "намотує" коло на себе n разів. Його факторизація є гомеоморфізмом (покажіть це), тобто $S^1/_{\mathbb{Z}_n} \cong S^1$. Ототожнюючи ці простори, маємо за твердженням 7.1, що (S^1, S^1, p) – накриття кола, де канонічній проєкції відповідає описане вище відображення p. Усі шари цього накриття складаються з n елементів, тобто воно n-листове. Зауважимо, що при $n = 1$ це тривіальне накриття з прикладу 7.1, а при $n = 2$ – накриття проєктивної прямої $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ з попереднього прикладу.



Приклад 7.7. Розглянемо дію тієї ж групи $G = \mathbb{Z}_n$, що у попередньому прикладі, на тривимірній сфері $X = S^3$. Її зручно представляти як одиничну сферу у просторі $\mathbb{C}^2$, що очевидним чином ототожнюється з $\mathbb{R}^4$,

тобто як множину пар комплексних чисел, сума квадратів модулів яких дорівнює одиниці:

$$S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

З урахуванням цього ототожнення дія $\mathbb{Z}_n$ на S^3, що крім натурального n визначається деяким взаємно простим з ним натуральним числом $m < n$, задається умовами

$$[k] \cdot (z,w) = \left(e^{\frac{2\pi i\, k}{n}} z, e^{\frac{2\pi i\, mk}{n}} w\right)$$

для будь-яких $[k] \in \mathbb{Z}_n$, $(z,w) \in S^3$. Зауважимо, що пара комплексних чисел у правій частині попередньої рівності теж належить до S^3, бо множення на комплексні числа модуля 1 не змінює модулі z і w. Тому з аналогічних до попереднього прикладу міркувань випливає, що це коректно визначена неперервна дія (перевірте це). Вона цілком розривна в силу вправи 7.4. Простір орбіт цієї дії позначається через $L(n,m)$ і зветься *лінзовим простором*. Таким чином, $(S^3, L(n,m), p)$, де p – канонічна проєкція, є n-листовим накриттям цього простору в силу твердження 7.1 і зауваження після нього. Це накриття універсальне за прикладом 6.2. Зокрема, $L(2,1)$ гомеоморфний $\mathbb{R}P^3$, а накриття у цьому випадку те ж, що у прикладі 7.5 для $n = 3$ (чому?). Детальніше про лінзові простори та їхні узагальнення див., наприклад, у [16, с. 186-189].

Зауваження. Також приклади накрить виникають у комплексному аналізі як т. зв. *ріманові поверхні* функцій комплексної змінної. Див., наприклад, [9, с. 41-61].

8 Накриття та шляхи

Для опису фундаментальної групи за допомогою накрить нам потрібно спочатку сформулювати та довести кілька важливих технічніх результатів, що стосуються шляхів.

Лема 8.1 (Про підняття шляху). *Нехай (X,Y,p) – накриття, а $f\colon I \to Y$ – шлях у його базі з початком у точці $f(0) = y$. Тоді для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$ існує єдиний шлях $\widetilde{f}\colon I \to X$ у накриваючому просторі, що починається в x і накриває f: $\widetilde{f}(0) = x$, $p \circ \widetilde{f} = f$.*

Доведення. За означеням накриття, для будь-якого $t \in I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_t \ni f(t)$. Тоді $\{f^{-1}(U_t)\}_{t \in I}$ – відкрите покриття компактного I. Застосувавши лему Лебега, оберемо число Лебега $\delta > 0$ цього покриття і натуральне m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді для будь-якого $i = \overline{1,m}$ існує t_i таке, що $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]) \subset U_{t_i}$. Далі позначатимемо $U_i \coloneqq U_{t_i}$.

Прообраз $p^{-1}(U_1)$ має вигляд об'єднання $\bigcup\limits_{\alpha \in A_1} \widetilde{U}_{1\alpha}$ околів, що правильно накривають U_1, й містить, зокрема, прообраз точки $y = f(0)$. Тому існує індекс $\alpha_1 \in A_1$ такий, що $x \in \widetilde{U}_{1\alpha_1}$; позначимо $\widetilde{U}_1 \coloneqq \widetilde{U}_{1\alpha_1}$. За означенням, $p|_{\widetilde{U}_1}$ – гомеоморфізм, причому $(p|_{\widetilde{U}_1})^{-1}(y) = x$, тому $\widetilde{f}_1 \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_1})^{-1} \circ f|_{[0,\frac{1}{m}]} \colon [0, \frac{1}{m}] \to \widetilde{U}_1$ коректно визначене і неперервне, тобто є шляхом (в $\widetilde{U}_1$, а отже і в X) з початком у $\widetilde{f}_1(0) = x$. За побудовою, він накриває перший відрізок f: $p \circ \widetilde{f}_1 = f|_{[0,\frac{1}{m}]}$ (див. ілюстрацію вище). Кінець цього шляху лежить у прообразі правильно накритого U_2, для якого використовуємо аналогічні позначення: $\widetilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in p^{-1}(f(\frac{1}{m})) \subset p^{-1}(U_2) = \bigcup\limits_{\alpha \in A_2} \widetilde{U}_{2\alpha}$. Тоді існує індекс $\alpha_2 \in A_2$ такий, що $\widetilde{f}_1(\frac{1}{m}) \in \widetilde{U}_{2\alpha_2}$; позначимо $\widetilde{U}_2 \coloneqq \widetilde{U}_{2\alpha_2}$ і покладемо $\widetilde{f}_2 \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_2})^{-1} \circ f|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]} \colon [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}] \to \widetilde{U}_2$. Це шлях в $\widetilde{U}_2$ і в X з початком у $\widetilde{f}_1(\frac{1}{m})$, і $p \circ \widetilde{f}_2 = f|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]}$. Аналогічним чином обираємо околи $\widetilde{U}_i$, що правильно накривають U_i, і будуємо шляхи $\widetilde{f}_i \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_i})^{-1} \circ f|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]} \colon [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \to \widetilde{U}_i$ для кожного i від 3 до m. Нарешті, визначимо $\widetilde{f} \colon I \to X$ умовою $\widetilde{f}|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]} = \widetilde{f}_i$ для кожного i (пор. з конструкцією у прикладі 6.2). За побудовою це коректно визначений шлях, $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}_1(0) = x$ і $p \circ \widetilde{f} = f$.

Тепер перевіримо єдиність такого $\widetilde{f}$. Нехай $\widetilde{\widetilde{f}} \colon I \to X$ – якийсь ще шлях такий, що $\widetilde{\widetilde{f}}(0) = x$ і $p \circ \widetilde{\widetilde{f}} = f$. Зокрема, $p \circ \widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) = f([0, \frac{1}{m}]) \subset U_1$, тому $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset p^{-1}(U_1) = \bigcup\limits_{\alpha \in A_1} \widetilde{U}_{1\alpha}$. Оскільки $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ містить $\widetilde{\widetilde{f}}(0) = x$, вона перетинається з $\widetilde{U}_1$, що є відкритозамкненою підмножиною $p^{-1}(U_1)$ (див. зауваження після вправи 7.3). Оскільки $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}])$ до того ж зв'язна як носій шляху, $\widetilde{\widetilde{f}}([0, \frac{1}{m}]) \subset \widetilde{U}_1$. З бієктивності обмеження $p|_{\widetilde{U}_1} \colon \widetilde{U}_1 \to U_1$ та рівності відображень $p \circ \widetilde{\widetilde{f}}|_{[0,\frac{1}{m}]} = f|_{[0,\frac{1}{m}]} = p \circ \widetilde{f}|_{[0,\frac{1}{m}]}$ випливає, що $\widetilde{\widetilde{f}}|_{[0,\frac{1}{m}]} = \widetilde{f}|_{[0,\frac{1}{m}]}$. Зокрема, $\widetilde{f}(\frac{1}{m}) = \widetilde{\widetilde{f}}(\frac{1}{m})$. Далі повторюємо аналогічні міркування для $\widetilde{U}_2$ і т. д. Таким чином, $\widetilde{f} = \widetilde{\widetilde{f}}$.

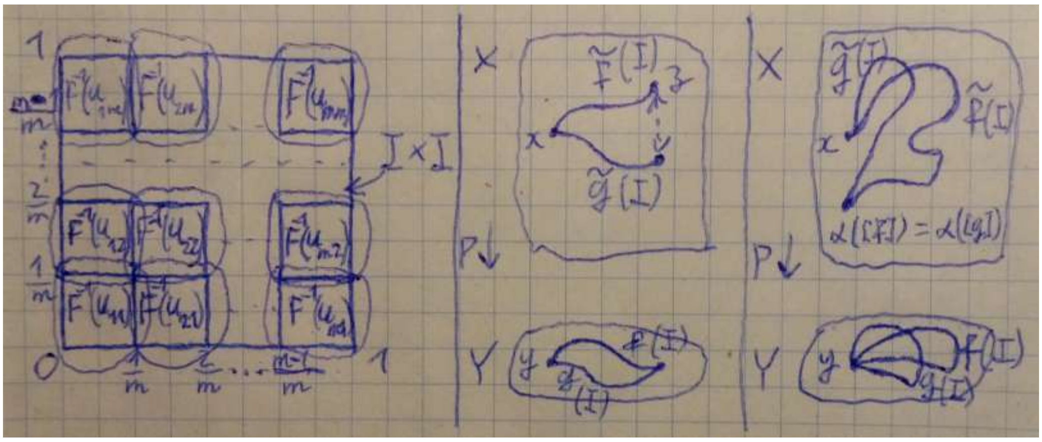
■

Означення 8.1. Шлях $\widetilde{f}$ з попередньої леми зветься *підняттям* (або *накриваючим шляхом*) шляху f у накриваючий простір X.

Також нам знадобиться наступне безпосереднє узагальнення леми про підняття шляху:

Лема 8.2 (Про підняття відображень n-вимірного куба)**.** *Нехай* (X, Y, p) *– накриття, а* $F\colon I^n \to Y$ *– неперервне відображення у його базу таке, що* $F(0, \ldots, 0) = y$. *Тоді для будь-якої* $x \in p^{-1}(y)$ *існує єдине неперервне відображення* $\widetilde{F}\colon I^n \to X$ *у накриваючий простір таке, що* $\widetilde{F}(0, \ldots, 0) = x$ *і* $p \circ \widetilde{F} = F$.

Доведення. Дійсно, при $n = 1$ це твердження попередньої леми. Наведемо доведення для випадку $n = 2$, тобто для відображень квадрата $I^2 = I \times I$. Будемо діяти як у попередньому доведенні. Для будь-якого $(t, s) \in I \times I$ існує правильно накритий відкритий окіл $U_{t,s} \ni F(t, s)$, тому $\{F^{-1}(U_{t,s})\}_{t,s \in I}$ є відкритим покриттям компактного $I \times I$. Нехай $\delta > 0$ – якесь його число Лебега. Оберемо натуральне m таке, що $\frac{\sqrt{2}}{m} < \delta$. Тоді для будь-яких $i, j = \overline{1, m}$ існує точка (t_{ij}, s_{ij}) така, що $[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \subset F^{-1}(U_{(t_{ij}, s_{ij})})$ (бо евклідовий діаметр цього квадратика, що дорівнює його діагоналі $\frac{\sqrt{2}}{m}$, менший за δ), а отже $F([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]) \subset U_{(t_{ij}, s_{ij})}$. Позначимо тоді $U_{ij} \coloneqq U_{(t_{ij}, s_{ij})}$ (див. малюнок нижче зліва).



Прообраз правильно накритого околу U_{11} містить $p^{-1}(y)$ і має вигляд $p^{-1}(U_{11}) = \bigcup\limits_{\alpha \in A_{11}} \widetilde{U}_{11\alpha}$, тому існує індекс $\alpha_{11} \in A_{11}$ такий, що $x \in \widetilde{U}_{11\alpha_{11}}$. Позначимо $\widetilde{U}_{11} \coloneqq \widetilde{U}_{11\alpha_{11}}$ і покладемо $\widetilde{F}_{11} \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{[0,\frac{1}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]}\colon [0, \frac{1}{m}] \times [0, \frac{1}{m}] \to \widetilde{U}_{11}$. Тоді $\widetilde{F}_{11}$ неперервне і $p \circ \widetilde{F}_{11} = F|_{[0,\frac{1}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]}$. Зокрема, образ правої сторони квадратика $p \circ \widetilde{F}_{11}(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) = F(\{\frac{1}{m}\} \times [0, \frac{1}{m}]) \subset U_{11} \cap U_{21}$. Далі вибираємо з околів, що правильно накривають U_{21}, окіл $\widetilde{U}_{21}$, що містить $\widetilde{F}_{11}(\frac{1}{m},0)$, і будуємо $\widetilde{F}_{21} \coloneqq (p|_{\widetilde{U}_{21}})^{-1} \circ F|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]} \colon [\frac{1}{m},\frac{2}{m}]\times[0,\frac{1}{m}] \to \widetilde{U}_{21}$. Це відображення неперервне, $p \circ \widetilde{F}_{21} = F|_{[\frac{1}{m},\frac{2}{m}]\times[0,\frac{1}{m}]}$, і $\widetilde{F}_{11}|_{\{\frac{1}{m}\}\times[0,\frac{1}{m}]} = \widetilde{F}_{21}|_{\{\frac{1}{m}\}\times[0,\frac{1}{m}]}$, бо на підмножині $\{\frac{1}{m}\} \times [0,\frac{1}{m}]$ обидва ці обмеження збігаються з $(p|_{\widetilde{U}_{11}})^{-1} \circ F|_{\{\frac{1}{m}\}\times[0,\frac{1}{m}]}$.

Далі, рухаючися вправо, отримаємо аналогічним чином відображення $\widetilde{F}_{i1}$ для усіх i від 1 до m. Після цього переходимо на другий рядок квадратиків, починаючи з відображення $\widetilde{F}_{12} \colon [0,\frac{1}{m}] \times [\frac{1}{m},\frac{2}{m}] \to \widetilde{U}_{12}$, що збігається з $\widetilde{F}_{11}$ на верхній стороні $[0,\frac{1}{m}] \times \{\frac{1}{m}\}$ нижнього лівого квадратика. Далі отримаємо таким чином відображення $\widetilde{F}_{i2}$ і т. д. Зрештою, ми отримаємо набір неперервних відображень $\widetilde{F}_{ij} \colon [\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}] \to X$ для усіх пар $i,j = \overline{1,m}$, що узгоджені на перетинах їхніх областей визначення і є такими, що $p \circ \widetilde{F}_{ij} = F|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]\times[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}]}$ для усіх i та j. Визначимо тепер $\widetilde{F} \colon I \times I \to X$ умовою $\widetilde{F}|_{[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}]\times[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}]} = \widetilde{F}_{ij}$ для кожної пари $i,j = \overline{1,m}$. За побудовою це коректно визначене неперервне відображення, $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{F}_{11}(0,0) = x$ і $p \circ \widetilde{F} = F$. Єдиність такого $\widetilde{F}$ перевіряється аналогічно до попереднього доведення (зробіть це).

Вправа 8.1. Узагальнити це доведення на випадок довільного n.

∎

Зауваження. Пізніше в цьому курсі ми сформулюємо і доведемо теорему 10.1 про існування та єдиність піднять відображень, що узагальнює дві попередні леми (див. також вправу 10.1).

Лема 8.3 (Про накриваючу гомотопію). *Нехай (X,Y,p) – накриття, $f,g \colon I \to Y$ – шляхи у його базі, що гомотопні й мають спільний початок у точці y: $f \sim g$, $y = f(0) = g(0)$, а $\widetilde{f},\widetilde{g} \colon I \to X$ – підняття f і g відповідно у накриваючий простір зі спільним початком у деякій точці $x \in p^{-1}(y)$. Тоді ці підняття теж гомотопні, зокрема, їхні кінці збігаються: $\widetilde{f} \sim \widetilde{g}$ і $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$.*

Доведення. Див. ілюстрацію зверху по центру. Нехай $F \colon I \times I \to Y$ – гомотопія шляхів f і g. Тобто це неперервне відображення, $F(t,0) = f(t)$, $F(t,1) = g(t)$, $F(0,s) = y$ і $F(1,s) = f(1) = g(1)$ для будь-яких $t,s \in I$. Зокрема, $F(0,0) = y$. Тоді з леми 8.2 у випадку $n = 2$ випливає, що існує неперервне $\widetilde{F} \colon I \times I \to X$ таке, що $\widetilde{F}(0,0) = x$ і $p \circ \widetilde{F} = F$. Зауважимо, що тоді $s \mapsto \widetilde{F}(0,s)$ – шлях у X з початком у x, що є підняттям шляху $s \mapsto F(0,s) = y$ в Y. Але цей шлях в Y є постійним e_y за умовою на F, тому постійний шлях e_x є його підняттям з початком у x. Тоді $s \mapsto \widetilde{F}(0,s)$ дорівнює e_x в силу єдиності в лемі 8.1, тобто $\widetilde{F}(0,s) = x$ для будь-якого s.

Далі діємо аналогічно. Розглянемо шляхи $t \mapsto \widetilde{F}(t,0)$ і $t \mapsto \widetilde{F}(t,1)$. З доведеного вище випливає, що вони мають спільний початок у точці x. При цьому вони є підняттями шляхів $F(\cdot,0) = f$ і $F(\cdot,1) = g$ відповідно. З єдиності в лемі 8.1 маємо тоді, що вони повинні дорівнювати $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$ відповідно, тобто $\widetilde{F}(t,0) = \widetilde{f}(t)$ і $\widetilde{F}(t,1) = \widetilde{g}(t)$ для будь-якого t. Зокрема, $\widetilde{F}(1,0) = \widetilde{f}(1)$. Позначимо цю точку через z. Тоді $s \mapsto \widetilde{F}(1,s)$ є підняттям $F(1,\cdot) = e_{f(1)}$ з початком у z, і знову ж з єдиності в лемі 8.1 випливає, що це e_z, тобто $\widetilde{F}(1,s) = z$ для будь-якого s, зокрема $\widetilde{g}(1) = \widetilde{F}(1,1) = z = \widetilde{f}(1)$. Встановлене вище означає, що $\widetilde{F}$ – гомотопія шляхів $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$.

■

9 Накриття та фундаментальні групи

У цьому розділі ми нарешті сформулюємо і доведемо результати (теорему 9.1 і наслідок 9.1), що дозволять обчислювати фундаментальні групи топологічних просторів за допомогою накрить. Необхідні для цього алгебраїчні поняття та конструкції містяться у доповненні (зокрема, означення A.5–A.9, твердження A.1 і A.2). Почнемо з дослідження властивостей індукованого гомоморфізма накриваючого відображення для довільного накриття.

Твердження 9.1. *Нехай (X, Y, p) – накриття, $y \in Y$, $x \in p^{-1}(y)$, а $p_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ – гомоморфізм фундаментальних груп, що індукований відображенням p.*

1. *Гомоморфізм p_* є ін'єктивним.*

2. *Гомотопічний клас деякої петлі f в y міститься в образі p_* тоді й тільки тоді, коли підняття f у накриваючий простір з початком у x має кінець теж у x, тобто є петлею в x.*

Зауваження. При цьому за пунктом 2. твердження A.2 образ $\operatorname{Im} p_* = p_*(\pi_1(X,x))$ гомоморфізма p_* є підгрупою групи $\pi_1(Y,y)$, а з ін'єктивності та наслідку A.1 випливає, що $\pi_1(X,x) \simeq p_*(\pi_1(X,x))$.

Доведення.

1. З пункту 1. твердження A.2 випливає, що достатньо перевірити рівність $\operatorname{Ker} p_* = \{[e_x]\}$. Нагадаємо, що $p_*([f]) = [p \circ f]$ для будь-якого гомотопічного класу петель $[f] \in \pi_1(X,x)$. Нехай $[f] \in \operatorname{Ker} p_*$, тобто $[e_y] = p_*([f]) = [p \circ f]$, що означає гомотопність петель e_y і $p \circ f$. (Єдині за лемою 8.1) підняття цих петель в X з початком

у x – це e_x і f відповідно. Тоді з леми 8.3 отримуємо, що $e_x \sim f$, тобто $[f] = [e_x]$. Це й означає, що $\operatorname{Ker} p_* = \{[e_x]\}$.

2. Дійсно, клас $[f] \in \pi_1(Y, y)$ належить до $p_*(\pi_1(X, x))$ тоді й тільки тоді, коли має вигляд $p_*([\widetilde{g}]) = [p \circ \widetilde{g}]$ для деякої петлі $\widetilde{g}$ в x, що є (єдиним за лемою 8.1) підняттям петлі $g \coloneqq p \circ \widetilde{g}$ з початком у x. При цьому рівність $[f] = [p \circ \widetilde{g}] = [g]$ еквівалентна в силу леми 8.3 тому, що підняття $\widetilde{f}$ петлі f з початком у x гомотопне $\widetilde{g}$ і тому теж є петлею (точніше, ця лема потрібна для доведення необхідності, а при доведенні достатності можна просто покласти $\widetilde{g} \coloneqq \widetilde{f}$).

■

Теорема 9.1 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою накриття)**.** *Нехай X і Y – лінійно зв'язні топологічні простори, а (X, Y, p) – накриття.*

1. *Для будь-яких $y \in Y$ і $x \in p^{-1}(y)$ існує біекція між множиною правих класів суміжності фундаментальної групи $\pi_1(Y, y)$ за підгрупою $p_*(\pi_1(X, x))$ і шаром $p^{-1}(y)$.*

2. *Якщо $(X, Y, p) = (X, X/_G, p)$, де G – група, що діє на X неперервно та цілком розривно, а p – канонічна проєкція, то $p_*(\pi_1(X, x))$ – нормальна підгрупа $\pi_1(X/_G, G \cdot x)$ для будь-якої $x \in X$, і біекція з пункту 1. є ізоморфізмом груп*

$$\pi_1(X/_G, G \cdot x)/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq G.$$

Зауваження. Якщо простір X лінійно зв'язний і (X, Y, p) – накриття, то з неперервності і сюр'єктивності p випливає, що простір $Y = p(X)$ також лінійно зв'язний, тому умову на нього можна прибрати з формулювання теореми. Те, що у пункті 1. йдеться саме про праві класи, теж насправді несуттєве, бо між множинами лівих та правих класів суміжності за підгрупою існує біекція. У пункті 2. ми використовуємо твердження 7.1 (згідно з яким $(X, X/_G, p)$ – дійсно накриття) і ототожнення шарів даного накриття з групою G із зауваження після цього твердження. Якщо, як у пункті 2., $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(Y, y)$, то визначена в силу твердження A.1 факторгрупа $\pi_1(Y, y)/p_*(\pi_1(X, x))$, що знаходиться у біективній відповідності з шаром $p^{-1}(y)$ за пунктом 1., інколи зветься *групою монодромії* накриття (X, Y, p) у точці x. Ми повернемося до питань про нормальність підгрупи $p_*(\pi_1(X, x))$ у загальному випадку та топологічний сенс групи монодромії у розділі 11 (див., зокрема, теорему 11.1 та наслідок 11.3).

Доведення. Отже, нехай $x \in X$ і $y = p(x)$. Для кожного класу петель $[f] \in \pi_1(Y, y)$ нехай f – деякий його представник (петля в y), а $\widetilde{f}$ – підняття петлі f з початком у x (що існує і єдине за лемою 8.1). Воно повинне закінчуватися у деякій точці з $p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(y)$. Покладемо $\alpha([f]) \coloneqq \widetilde{f}(1)$ (див. ілюстрацію зверху справа). Покажемо перш за все, що так можна коректно визначити відображення $\alpha\colon \pi_1(Y, y) \to p^{-1}(y)$. Нехай f і g – петлі в y, для яких $[f] = [g]$, тобто $f \sim g$. Тоді $\widetilde{f} \sim \widetilde{g}$ за лемою 8.3, зокрема, $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$. Це й означає коректність визначення α. Перевіримо, що це відображення сюр'єктивне. Оскільки X лінійно зв'язний, для будь-якої $z \in p^{-1}(y)$ існує шлях h, що з'єднує x і z. Тоді $(p \circ h)(0) = p(x) = y$ і $(p \circ h)(1) = p(z) = y$, тобто $p \circ h$ – петля в y, і в наших позначеннях $h = \widetilde{p \circ h}$ (підняття $p \circ h$ з початком у x), тому $\alpha([p \circ h]) = h(1) = z$, що й демонструє сюр'єктивність α.

Позначимо $H \coloneqq p_*(\pi_1(X, x))$. Як зазначалося вище, це підгрупа групи $\pi_1(Y, y)$. Щоб довести пункт 1., нам залишилося показати, що $\alpha([f]) = \alpha([g])$ тоді й тільки тоді, коли рівні класи суміжності $H[f] = H[g]$ за H у $\pi_1(Y, y)$. Дійсно, у цьому випадку ми можемо факторизувати α у коректно визначене ін'єктивне відображення з множини правих класів суміжності $\pi_1(Y, y)$ за H у $p^{-1}(y)$, що визначене умовою $H[f] \mapsto \alpha([f]) = \widetilde{f}(1)$, і це буде сюр'єкцією, бо α – сюр'єкція. Так і отримаємо потрібну біекцію.

Отже, нехай $\alpha([f]) = \alpha([g])$, тобто $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$. Тоді добуток шляхів $\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}$ визначений і є петлею в x, тому задає гомотопічний клас $[\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}] \in \pi_1(X, x)$. Звідси за означеннями маємо

$$[f][g]^{-1} = [f * \overline{g}] = [(p \circ \widetilde{f}) * \overline{(p \circ \widetilde{g})}] =$$

$$= [p \circ (\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}})] = p_*([\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}]) \in p_*(\pi_1(X, x)) = H.$$

Таким чином, $[f][g]^{-1} \in H$, що еквівалентне $H[f] = H[g]$ (чому?).

Тепер нехай $H[f] = H[g]$, тобто існує $[h] \in H$ таке, що $[f] = [h][g] = [h * g]$, отже $f \sim h * g$. Оскільки $[h] \in p_*(\pi_1(X, x))$, $\widetilde{h}(1) = x$ за пунктом 2. твердження 9.1. Тому визначений шлях $\widetilde{h} * \widetilde{g}$, що накриває $h * g$ і починається в x, тобто $\widetilde{h * g} = \widetilde{h} * \widetilde{g}$. Тоді

$$\alpha([f]) = \widetilde{f}(1) = \widetilde{h * g}(1) = \widetilde{h} * \widetilde{g}(1) = \widetilde{g}(1) = \alpha([g]),$$

де друга рівність випливає з гомотопності $f \sim h * g$ і леми 8.3. Це завершує доведення пункту 1.

Нехай тепер $(X, Y, p) = (X, X/_{G}, p)$, де група G діє на X неперервно та цілком розривно, і $x \in X$. Ототожнимо $p^{-1}(G \cdot x)$ з G як у зауваженні після твердження 7.1: $a \cdot x \leftrightarrow a$, де $a \in G$ (нагадаємо, що це біекція, бо дія вільна). За допомогою цього ототожнення перетворимо α із доведення пункту 1. на відображення $\alpha\colon \pi_1(X/_G, G\cdot x)\to G$, тобто тепер у введених вище позначеннях $\widetilde{f}(1)=\alpha([f])\cdot x$ для кожного $[f]\in\pi_1(X/_G, G\cdot x)$. Тоді з уже доведеного випливає, що α коректно визначене та сюр'єктивне.

Покажемо, що α є гомоморфізмом груп $\pi_1(X/_G, G\cdot x)$ і G. Нехай $[f],[g]\in\pi_1(X/_G, G\cdot x)$. Для піднять $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$ петель f і g відповідно з початком у x маємо $\widetilde{f}(1)=\alpha([f])\cdot x$ і $\widetilde{g}(1)=\alpha([g])\cdot x$. Тепер зауважимо, що шлях $\lambda_{\alpha([f])}\circ\widetilde{g}=\alpha([f])\cdot\widetilde{g}\colon t\mapsto\alpha([f])\cdot\widetilde{g}(t)$ теж накриває g, бо

$$(p\circ(\alpha([f])\cdot\widetilde{g}))(t)=G\cdot(\alpha([f])\cdot\widetilde{g}(t))=G\cdot\widetilde{g}(t)=(p\circ\widetilde{g})(t)=g(t)$$

для кожного t. Друга рівність тут випливає з того, що $\{a\,\alpha([f])\mid a\in G\}=G$ (аналогічно до перевірки сюр'єктивності у доведенні твердження 7.1). Крім того, шлях $\alpha([f])\cdot\widetilde{g}$ починається в $\alpha([f])\cdot\widetilde{g}(0)=\alpha([f])\cdot x=\widetilde{f}(1)$. Тому визначений шлях $\widetilde{f}*(\alpha([f])\cdot\widetilde{g})$ з початком у $\widetilde{f}(0)=x$, що накриває $f*g$, тобто $\widetilde{f*g}=\widetilde{f}*(\alpha([f])\cdot\widetilde{g})$. Отже за означеннями

$$\alpha([f][g])\cdot x=\alpha([f*g])\cdot x=\widetilde{f*g}(1)=\widetilde{f}*(\alpha([f])\cdot\widetilde{g})(1)=$$

$$=\alpha([f])\cdot\widetilde{g}(1)=\alpha([f])\cdot(\alpha([g])\cdot x)=\alpha([f])\,\alpha([g])\cdot x,$$

звідки маємо $\alpha([f][g])=\alpha([f])\,\alpha([g])$, що й означає гомоморфність α.

Зауважимо, що ядро α має вигляд $\operatorname{Ker}\alpha=H=p_*(\pi_1(X,x))$. Дійсно, з доведення пункту 1. випливає, що $\alpha([f])=e=\alpha([e_{G\cdot x}])$ тоді й тільки тоді, коли $H[f]=H[e_{G\cdot x}]=H$, тобто $[f]\in H$. Тому, зокрема, $p_*(\pi_1(X,x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(X/_G, G\cdot x)$ за пунктом 1. твердження A.2 і, оскільки гомоморфізм α сюр'єктивний, за пунктом 3. того ж твердження маємо ізоморфність

$$\pi_1(X/_G, G\cdot x)/p_*(\pi_1(X,x))=\pi_1(X/_G, G\cdot x)/\operatorname{Ker}\alpha\simeq\operatorname{Im}\alpha=G,$$

причому ізоморфізм отримуємо факторизацією α: $H[f]\mapsto\alpha([f])$, тобто це та ж сама біекція, що й у доведенні пункту 1. Це, у свою чергу, завершує доведення пункту 2.

∎

Наслідок 9.1 (Обчислення фундаментальної групи за допомогою універсального накриття)**.** *Нехай (X,Y,p) – універсальне накриття.*

1. *Для будь-якої $y\in Y$ існує біекція між фундаментальною групою $\pi_1(Y,y)$ і шаром $p^{-1}(y)$.*

2. *Якщо* $(X, Y, p) = (X, X/_G, p)$, *де* G *– група, що діє на просторі* X *неперервно та цілком розривно, а* p *– канонічна проекція, то для будь-якої* $x \in X$ *біекція з пункту* 1. *є ізоморфізмом груп*

$$\pi_1(X/_G, G \cdot x) \simeq G.$$

Доведення. Якщо накриття універсальне, то простір X однозв'язний. Тобто X (а отже й Y) лінійно зв'язний, і $\pi_1(X, x) = [e_x]$ для будь-якого $x \in X$, а отже $p_*(\pi_1(X, x)) = [e_y]$ для $x \in p^{-1}(y)$. Тому твердження пунктів 1. і 2. випливають з відповідних пунктів попередньої теореми разом з прикладом А.13.

■

Зауваження. Результат пункту 2. цього наслідку можна записати у спрощених позначеннях (див. зауваження після наслідку 4.1) в силу лінійної зв'язності X: $\pi_1(X/_G) \simeq G$.

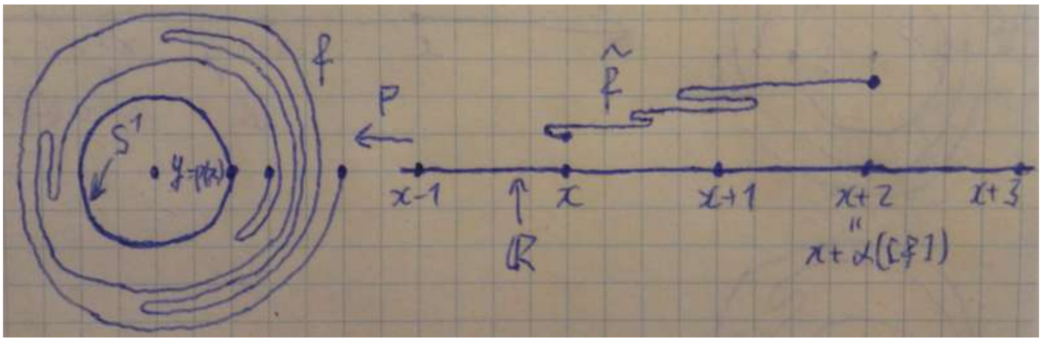
Твердження 9.2. *Якщо* (X, Y, p) *– накриття, простір* X *є лінійно зв'язним, а* Y *– однозв'язним, то* p *– гомеоморфізм.*

Доведення. З пункту 1. твердження 9.1 і зауваження після його формулювання випливає, що для будь-якої $x \in X$ і $y = p(x)$ група $\pi_1(X, x)$ ізоморфна підгрупі $p_*(\pi_1(X, x))$ групи $\pi_1(Y, y)$. Але у нас простір Y однозв'язний, тобто $\pi_1(Y, y) = \{[e_y]\}$ тривіальна. Тому $\pi_1(X, x)$ теж тривіальна: $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$. Це означає, що X однозв'язний, тому накриття універсальне. Тоді за пунктом 1. наслідку 9.1 кожний шар $p^{-1}(y)$ складається з однієї точки, отже сюр'єкція p є біекцією. Вона неперервна за означенням та відкрита в силу вправи 7.1. Отже p – дійсно гомеоморфізм, а накриття тривіальне, як у прикладі 7.1.

■

Приклад 9.1. Накриття $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ з прикладу 7.4 побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}^n$ і є універсальним. Тому з пункту 2. наслідку 9.1 отримуємо, що для будь-якої $y \in T^n$ фундаментальна група n-вимірного тора T^n у точці y ізоморфна $\mathbb{Z}^n$: $\pi_1(T^n, y) \simeq \mathbb{Z}^n$ (або просто $\pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, див. зауваження після згаданого наслідку). Зокрема, для $n = 1$ маємо $\pi_1(S^1, y) = \pi_1(T^1, y) \simeq \mathbb{Z}$.

За побудовою у доведенні теореми 9.1, щоб знайти образ при цьому ізоморфізмі гомотопічного класу петлі f у точці $y \in S_1$, потрібно побудувати підняття f у накриваючий простір, тобто пряму $\mathbb{R}$, з початком у деякій $x \in p^{-1}(y)$ (тобто $y = e^{2\pi i x}$). Це підняття закінчиться у точці $x + k$, де $k \in \mathbb{Z}$ й буде образом класу $[f]$. Неформально кажучи, k – це кількість повних обертів (з урахуванням орієнтації) петлі f навколо центру кола (див. ілюстрацію знизу). Аналогічно будуються образи класів петель і для довільного n.



Зауважимо також, що цей результат узгоджений з твердженням 5.3: згідно з його очевидним узагальненням, для кожної точки тора маємо

$$\pi_1(T^n, y) = \pi_1\left(\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}, \left(e^{2\pi i x^1}, \ldots, e^{2\pi i x^n}\right)\right) \simeq$$

$$\simeq \pi_1\big(S^1, e^{2\pi i x^1}\big) \times \ldots \times \pi_1\big(S^1, e^{2\pi i x^n}\big) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n} \simeq \mathbb{Z}^n.$$

У літературі ця група також позначається $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ (див. приклад А.9).

Приклад 9.2. Аналогічним чином, дволистове накриття $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ з прикладу 7.5, що побудоване за допомогою дії групи $G = \mathbb{Z}_2$, є універсальним при $n \geqslant 2$. Тому для кожної $y \in \mathbb{R}P^n$ фундаментальна група $\pi_1(\mathbb{R}P^n, y) \simeq \mathbb{Z}_2$ (або просто $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$) згідно з пунктом 2. наслідку 9.1. Зауважимо, що при $n = 1$ проєктивна пряма $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфна колу S^1 (див. приклад 18.5 курсу топології), тому $\pi_1(\mathbb{R}P^1, y) \simeq \mathbb{Z}$ для будь-якої y за гомотопічною інваріантністю і попереднім прикладом.

Приклад 9.3. Розглянемо n-листове накриття (S^1, S^1, p) з прикладу 7.6, де $p\colon S^1 \to S^1\colon e^{it} \mapsto e^{int}$ відповідає дії групи $G = \mathbb{Z}_n$. Тоді для кожної $x \in S^1$ факторгрупа $\pi_1(S^1, p(x))/p_*(\pi_1(S^1, x))$ повинна бути ізоморфна $\mathbb{Z}_n$ за пунктом 2. теореми 9.1. Перевіримо це безпосередньо. У прикладі 9.1 було встановлено, що $\pi_1(S^1, x) \simeq \pi_1(S^1, p(x)) \simeq \mathbb{Z}$ – група, що складається з елементів вигляду $[f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$, де $[f]$ – гомотопічний клас будь-якої петлі f, яка робить один оберт навколо центру кола у додатному напрямку й відповідає таким чином $1 \in \mathbb{Z}$ при ізоморфізмі (чому?). Іншими словами, це твірна цієї групи у термінології прикладу А.6.

Якщо $x = e^{2\pi i\, t_0}$, то в якості такої петлі можна взяти $f\colon t \mapsto e^{2\pi i\,(t_0+t)}$. Тоді $p(f(t)) = e^{2\pi i\, n(t_0+t)}$ для кожного $t \in I$, тому $p\circ f$ робить n обертів навколо центру кола у додатному напрямку й піднімається у відрізок в універсальному накриваючому просторі $\mathbb{R}$ кола (див. приклад 9.1), що сполучає точки nt_0 і nt_0+n, а отже елемент $p_*([f]) = [p\circ f]$ фундаментальної групи $\pi_1(S^1, p(x))$ відповідає числу $n \in \mathbb{Z}$. Тоді в силу гомоморфності p_* підгрупа $p_*(\pi_1(S^1, x)) \subset \pi_1(S^1, p(x))$, у свою чергу, складається зі степенів $[p \circ f]^k$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$ і таким чином відповідає підгрупі $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ цілих чисел, що кратні n (див. приклад A.14). Отже, наш ізоморфізм приймає вигляд $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$. Більш того, це той самий ізоморфізм, що описаний у прикладі A.14 (перевірте це).

Приклад 9.4. Оскільки n-листове накриття $(S^3, L(n,m), p)$ лінзового простору $L(n,m)$, що побудоване у прикладі 7.7 для будь-яких взаємно простих натуральних чисел $m < n$ за допомогою дії групи $\mathbb{Z}_n$, є універсальним, за пунктом <u>2.</u> наслідку 9.1 фундаментальна група цього простору $\pi_1(L(n,m), y)$ ізоморфна $\mathbb{Z}_n$ у будь-якій $y \in L(n,m)$ (або просто $\pi_1(L(n,m)) \simeq \mathbb{Z}_n$; зауважимо, що лінзові простори лінійно зв'язні в силу лінійної зв'язності S^3).

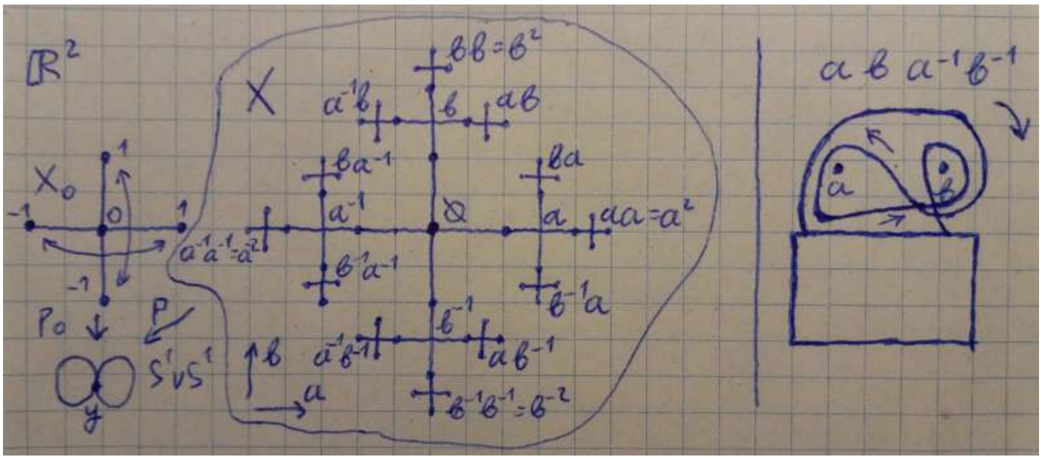
Приклад 9.5. Нехай $Y = S^1 \vee S^1$ – букет двох кіл зі спільною точкою y (див. вправу 17.2 курсу топології). Побудуємо його універсальне накриття. Для цього почнемо з підмножини

$$X_0 \coloneqq [-1,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1,1]$$

площини $\mathbb{R}^2$ (тобто "хреста", що зображений на малюнку нижче зліва). На цій множині можна ввести відношення еквівалентності $\sim$ умовами $(1,0) \sim (-1,0)$ і $(0,1) \sim (0,-1)$ (інші точки еквівалентні лише собі), склеївши кінці відрізків. Тоді $X_0/_\sim \cong S^1 \vee S^1$ аналогічно до прикладу 16.5 курсу топології, причому канонічна проєкція відповідає відображенню $p_0\colon X_0 \to S^1 \vee S^1$, що, зокрема, переводить точку $(0,0)$ в y. Але $(X_0, S^1 \vee S^1, p_0)$ не буде накриттям (чому?). Втім, на основі цієї ідеї дійсно можна побудувати накриття (детальніше цей процес описаний у [5, с. 208-212]).

Покладемо $X \coloneqq (\langle a,b\rangle \times X_0)/_\sim$, де вільна група з 2 твірними $\langle a,b\rangle$ (див. приклад A.6) наділена дискретною топологією, а відношення еквівалентності $\sim$ визначене умовами $(W,(1,0)) \sim (aW,(-1,0))$ і $(W,(0,1)) \sim (bW,(0,-1))$ для будь-якого слова $W \in \langle a,b\rangle$ (інші точки еквівалентні лише собі). Таким чином, простір X утворюється склеюванням копій X_0, що індексовані елементами $\langle a,b\rangle$. Його можна вкласти в $\mathbb{R}^2$, як показано нижче (зображені лише копії X_0, що відповідають словам довжини не більшої за 2; самі ці слова позначають центри відповідних "хрестів";

при цьому при збільшенні слова на один символ ми зменшуємо ”хрест” удвічі і приклеюємо до існуючої конструкції відповідно до відношення еквівалентності).



Визначимо дію групи $\langle a, b\rangle$ на просторі X умовою $W_1 \cdot [(W_2, (x, y))] \coloneqq [(W_1W_2, (x, y))]$ для будь-яких слів $W_1, W_2 \in \langle a, b\rangle$ і будь-якої $(x, y) \in X_0$, де квадратні дужки позначають, як завжди, клас еквівалентності відносно $\sim$.

Вправа 9.1. Показати, що простір X є однозв’язним (більш того, стяжним), дія $\langle a, b\rangle$ на ньому – коректно визначеною, неперервною та цілком розривною, і що відображення $\langle a, b\rangle \cdot [(W, (x, y))] \mapsto p_0(x, y)$ коректно задає гомеоморфізм між простором орбіт $X/_{\langle a,b\rangle}$ і $S^1 \vee S^1$.

Ототожнимо $X/_{\langle a,b\rangle}$ і $S^1 \vee S^1$ за допомогою цього гомеоморфізма. Тоді відображення $p\colon X \to S^1 \vee S^1\colon [(W, (x, y))] \mapsto p_0(x, y)$ відповідатиме канонічній проекції. Воно, зокрема, переводить центри усіх ”хрестів” у точку y. Таким чином, $(X, S^1 \vee S^1, p)$ – універсальне накриття за попередньою вправою і твердженням 7.1. З пункту 2. наслідку 9.1 тоді випливає, що $\pi_1(S^1 \vee S^1, y) \simeq \langle a, b\rangle$ (або просто $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \langle a, b\rangle$ в силу лінійної зв’язності $S^1 \vee S^1$). Таким чином, отримали перший приклад неабелевої фундаментальної групи. Різні (не тільки універсальне) накриття цього простору також описані у [16, с. 78-81].

Вправа 9.2. Аналогічним чином показати, що фундаментальна група букета довільного натурального числа n кіл $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$ ізоморфна вільній групі з n твірними $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, що описана у прикладі A.6 (при $n = 1$ це випливає з прикладу 9.1).

Вправа 9.3. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – попарно різні точки $\mathbb{R}^2$. Показати, що простір $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ гомотопічно еквівалентний $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$ (при $n = 1$ це встановлено у прикладі 2.6), а отже його фундаментальні групи ізоморфні вільній групі з n твірними в силу гомотопічної інваріантності та попередньої вправи.

Зауваження. Фундаментальна група простору $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ (або $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$) використовується, зокрема, у т. зв. задачах про картини. Найпростіша з них формулюється наступним чином. У стіну вбито два цвяхи. Треба закрутити навколо них мотузку, на якій висить картина, таким чином, щоб вона висіла, але падала, якщо вийняти зі стіни будь-який з цвяхів. З попередньої вправи, гомотопічної інваріантності фундаментальної групи і прикладу 9.5 випливає, що фундаментальна група площини без двох різних точок (цвяхів) ізоморфна $\langle a, b\rangle$, де твірні a і b відповідають (аналогічно до прикладу 9.1) обертанням навколо цвяхів. Тоді для розв'язку задачі нам достатньо знайти нетривіальний елемент фундаментальної групи (слово), що перетворюється на тривіальний (порожнє слово) після викидання з нього усіх символів a і a^{-1} або b і b^{-1}, і задає гомотопічний клас потрібного розташування мотузки. Найпростішим таким словом є т. зв. *комутатор* $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ елементів a і b. Відповідне йому закручування мотузки зображено на ілюстрації вище. Як бачимо, воно дійсно задовольняє умові задачі. Огляд задач такого типу та потрібної для них математичної техніки див. у [19].

Виявляється, що будь-яка група G є фундаментальною групою деякого топологічного простору. Більш того, завжди можна побудувати неперервну та цілком розривну дію G на деякому стяжному просторі, а отже G є фундаментальною групою простору орбіт цієї дії в силу твердження 7.1 та пункту 2. наслідку 9.1. Такі простори орбіт, що визначаються групою G з точністю до гомотопічної еквівалентності, звуться *просторами Ейленберга – Маклейна* групи G і позначаються через $K(G, 1)$. Їх конструкція, приклади та застосування описані у [16, с. 115-126].

10 Підняття у накриваючий простір. Морфізми накрить

У зв'язку з теоремою 9.1 та наслідком 9.1 виникають природні питання застосовності цього метода обчислення фундаментальної групи: за яких умов для даного простору Y існує універсальне накриття (X, Y, p), чи є воно єдиним (принаймні з точністю до якого-небудь відношення еквівалентності) і коли його можна представити у вигляді $(X, X/_G, p)$ для неперервної та цілком розривної дії деякої групи G? У двох наступних розділах будуть наведені результати, що відповідають на ці питання, але спочатку розглянемо кілька важливих допоміжних результатів та конструкцій, що стосуються накрить. Наступна теорема узагальнює леми 8.1 і 8.2 про підняття шляхів та відображень кубів відповідно. Вона дозволить нам, зокрема, вірно сформулювати та довести твердження про єдиність накрить над даним простором. Почнемо з корисної загальної леми.

Лема 10.1. *Нехай $p\colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, а шлях $f\colon I \to X$ з'єднує точки x та x' простору X. Позначимо $g := p \circ f$, $y := p(x)$, $y' := p(x')$ (тоді шлях $g\colon I \to Y$ з'єднує точки y та y'). Нехай $\alpha\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x')$ і $\beta\colon \pi_1(Y,y) \to \pi_1(Y,y')$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами f і g відповідно, а $p_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ і $p'_*\colon \pi_1(X,x') \to \pi_1(Y,y')$ – гомоморфізми фундаментальних груп, що індуковані відображенням p у точках x і x' відповідно. Тоді*

$$p'_* \circ \alpha = \beta \circ p_*,$$

тобто діаграма фундаментальних груп та їх гомоморфізмів

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(X,x') \arrow[d, "p'_*"] \\ \pi_1(Y,y) \arrow[r, "\beta"] & \pi_1(Y,y') \end{tikzcd}$$

комутативна.

Доведення. За умовою $f \in C(I,X)$, $f(0) = x$ і $f(1) = x'$, тому $g = p \circ f \in C(I,Y)$ як композиція неперервних, тобто дійсно є шляхом, $g(0) = p(f(0)) = y$ і $g(1) = p(f(1)) = y'$. Тоді для будь-якого гомотопічного класу $[h] \in \pi_1(X,x)$ петлі h у x за конструкцією ізоморфізма у твердженні 4.1 та означенням індукованого гомоморфізма маємо

$$p'_*(\alpha([h])) = p'_*([\overline{f} * h * f]) = [p \circ (\overline{f} * h * f)] = [(p \circ \overline{f}) * (p \circ h) * (p \circ f)] =$$

$$= [\overline{g} * (p \circ h) * g] = \beta([p \circ h]) = \beta(p_*([h])),$$

звідки й маємо потрібну комутативність.

∎

Теорема 10.1 (Існування та єдиність піднять). *Нехай (X, Y, p) – накриття, Z – лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний топологічний простір, $\varphi\colon Z \to Y$ – неперервне відображення, точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $\varphi(z) = p(x)$. У φ існує єдине підняття в X, тобто неперервне відображення $\widetilde{\varphi}\colon Z \to X$ таке, що $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$ та $\widetilde{\varphi}(z) = x$, тоді й тільки тоді, коли*

$$\varphi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x)).$$

Доведення. Позначимо $y \coloneqq \varphi(z) = p(x) \in Y$. Тоді індуковані гомоморфізми з включення у формулюванні теореми діють наступним чином: $\varphi_*\colon \pi_1(Z, z) \to \pi_1(Y, y)$, $p_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$, отже це включення підгруп $\pi_1(Y, y)$. Зображення умови $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$ у вигляді комутативної діаграми можна побачити на малюнках нижче.

$\underline{\Rightarrow}$ За умовою і пунктом $\underline{2.}$ твердження 5.1 маємо

$$\varphi_*(\pi_1(Z, z)) = p_* \circ \widetilde{\varphi}_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x)),$$

де гомоморфізм $\widetilde{\varphi}_*\colon \pi_1(Z, z) \to \pi_1(X, x)$ індукований підняттям. Таким чином, отримали потрібне включення. Зауважимо, що аналогічне включення матиме місце і для фундаментальних груп в будь-яких інших точках $z' \in Z$ і $x' \coloneqq \widetilde{\varphi}(z')$.

$\underline{\Leftarrow}$ Спочатку покажемо єдиність $\widetilde{\varphi}$, що використовує лише лінійну зв'язність простору Z. Дійсно, нехай неперервні $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\widetilde{\varphi}}\colon Z \to X$ такі, що $p \circ \widetilde{\varphi} = p \circ \widetilde{\widetilde{\varphi}} = \varphi$ і $\widetilde{\varphi}(z) = \widetilde{\widetilde{\varphi}}(z) = x$. Для будь-якої $z' \in Z$ існує шлях $h \in C(I, Z)$, що з'єднує z і z'. Тоді шляхи $\widetilde{f} \coloneqq \widetilde{\varphi} \circ h \in C(I, X)$ і $\widetilde{\widetilde{f}} \coloneqq \widetilde{\widetilde{\varphi}} \circ h \in C(I, X)$ з'єднують x з $\widetilde{\varphi}(z')$ і з $\widetilde{\widetilde{\varphi}}(z')$ відповідно. Оскільки $p \circ \widetilde{f} = p \circ \widetilde{\varphi} \circ h = \varphi \circ h$, і аналогічно $p \circ \widetilde{\widetilde{f}} = \varphi \circ h$, шляхи $\widetilde{f}$ і $\widetilde{\widetilde{f}}$ є підняттями шляху $\varphi \circ h \in C(I, Y)$ зі спільним початком x. Тоді $\widetilde{f} = \widetilde{\widetilde{f}}$ за єдиністю у лемі 8.1, зокрема, $\widetilde{\varphi}(z') = \widetilde{f}(1) = \widetilde{\widetilde{f}}(1) = \widetilde{\widetilde{\varphi}}(z')$. Таким чином, $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\widetilde{\varphi}}$, що й означає єдиність.

Нехай тепер відомо, що $\varphi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$. Побудуємо підняття $\widetilde{\varphi}$, використовуючи шляхи наступним чином. Нехай $z' \in Z$ – довільна точка, а $h \in C(I, Z)$ – шлях, що з'єднує z і z', який існує в силу лінійної зв'язності Z. Тоді шлях $g \coloneqq \varphi \circ h \in C(I, Y)$ з'єднує y і $y' \coloneqq \varphi(z')$. Нехай $f \in C(I, X)$ – його (єдине) підняття з леми 8.1 з початком у x та кінцем у $x' \coloneqq f(1)$. Зокрема, $p \circ f = g$, і тому $p(x') = y'$. Покажемо тепер, що x' не залежить від h, для чого виконаємо деяку допоміжну роботу.

Фіксуємо шляхи f, g, h і точку x'. Побудуємо як у твердженні 4.1 ізоморфізми фундаментальних груп $\alpha\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x')$, $\beta\colon \pi_1(Y, y) \to \pi_1(Y, y')$ і $\gamma\colon \pi_1(Z, z) \to \pi_1(Z, z')$ за шляхами f, g і h відповідно. Тоді з леми 10.1 маємо рівності

$$\varphi'_* \circ \gamma = \beta \circ \varphi_*, \quad p'_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$$

для індукованих гомоморфізмів $\varphi_* \colon \pi_1(Z,z) \to \pi_1(Y,y)$ і $\varphi'_* \colon \pi_1(Z,z') \to \pi_1(Y,y')$ відображення φ та $p_* \colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ і $p'_* \colon \pi_1(X,x') \to \pi_1(Y,y')$ відображення p, тобто діаграми

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z,z) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1(Z,z') \\ {\scriptstyle\varphi_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi'_*} \\ \pi_1(Y,y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y,y') \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X,x') \\ {\scriptstyle p_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p'_*} \\ \pi_1(Y,y) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(Y,y') \end{array}$$

комутативні. З цих комутативностей, ізоморфності α і γ та умови теореми випливає, що

$$\varphi'_*(\pi_1(Z,z')) = \varphi'_*(\gamma(\pi_1(Z,z))) = \beta(\varphi_*(\pi_1(Z,z))) \subset$$

$$\subset \beta(p_*(\pi_1(X,x))) = p'_*(\alpha(\pi_1(X,x))) = p'_*(\pi_1(X,x')),$$

тобто маємо включення $\varphi'_*(\pi_1(Z,z')) \subset p'_*(\pi_1(X,x'))$ підгруп $\pi_1(Y,y')$, що аналогічне до включення з умови, але для іншої пари точок.

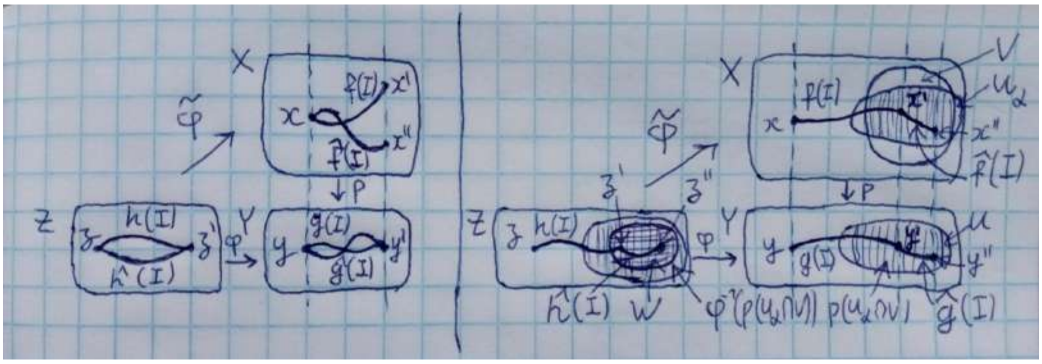
Тепер нехай $\widehat{h} \in C(I,Z)$ також з'єднує z і z', тоді шлях $\widehat{g} \coloneqq \varphi \circ \widehat{h} \in C(I,Y)$ з'єднує y і y', і нехай його підняття $\widehat{f} \in C(I,X)$ з початком у x має кінець у $x'' \coloneqq \widehat{f}(1) \in p^{-1}(y')$ (зокрема, $p \circ \widehat{f} = \widehat{h}$). Див. ілюстрацію нижче. Тоді $\overline{h} * \widehat{h}$ є петлею у z', а $\varphi \circ (\overline{h} * \widehat{h}) = \overline{g} * \widehat{g}$ – петлею в y' з гомотопічним класом у $\pi_1(Y,y')$, що дорівнює

$$[\overline{g} * \widehat{g}] = [\varphi \circ (\overline{h} * \widehat{h})] = \varphi'_*([\overline{h} * \widehat{h}]) \in \varphi'_*(\pi_1(Z,z')) \subset p'_*(\pi_1(X,x'))$$

за доведеним вище. З іншого боку, шлях $\overline{f} * \widehat{f}$ є підняттям тієї ж петлі $p \circ (\overline{f} * \widehat{f}) = \overline{g} * \widehat{g}$ з початком у $\overline{f} * \widehat{f}(0) = \overline{f}(0) = x'$. Оскільки $[\overline{g} * \widehat{g}] \in p'_*(\pi_1(X,x'))$, він повинен закінчуватися у тій же точці згідно з пунктом <u>2.</u> твердження 9.1, тобто $x'' = \widehat{f}(1) = \overline{f} * \widehat{f}(1) = x'$. Це й доводить незалежність x' від h. Таким чином, можно коректно визначити відображення $\widetilde{\varphi} \colon Z \to X$, поставивши кожній $z' \in Z$ у відповідність $\widetilde{\varphi}(z') \coloneqq x'$ з описаної нами побудови. При цьому $p(\widetilde{\varphi}(z')) = p(x') = y' = \varphi(z')$, для будь-якої $z' \in Z$, тобто $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$. Для $z' = z$ у якості h можна взяти e_z, тоді $g = \varphi \circ e_z = e_y$, і його підняттям буде $f = e_x$, тому $\widetilde{\varphi}(z) = f(1) = x$.

Залишилося перевірити, що $\widetilde{\varphi}$ неперервне. Лише тут буде потрібна локальна лінійна зв'язність простору Z. Для будь-якої відкритої $V \subset X$ і кожної $z' \in \widetilde{\varphi}^{-1}(V)$ маємо $x' \coloneqq \widetilde{\varphi}(z') \in V$. Нехай U – правильно накритий відкритий окіл точки $y' \coloneqq \varphi(z') = p(x') \in Y$ з означення накриття:

$p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, а індекс $\alpha \in A$ такий, що $x' \in U_\alpha$. Тоді $U_\alpha \cap V$ є відкритим околом x', отже, оскільки обмеження p на U_α – гомеоморфізм на U, $p(U_\alpha \cap V) \subset U$ є відкритим околом y' (в індукованій топології відкритої U, а отже в Y), а $\varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$ – відкритим околом z' за неперервністю φ. Оскільки Z локально лінійно зв'язний, тоді існує лінійно зв'язна відкрита W така, що $z' \in W \subset \varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$.



Наступні кроки доведення проілюстровані вище. Для будь-якої $z'' \in W$ існує шлях $\widehat{h} \in C(I, W)$, що з'єднує z' і z''. Якщо $h \in C(I, Z)$ – якийсь шлях, що з'єднує z і z', то шлях $h * \widehat{h} \in C(I, Z)$ з'єднує z і z''. Під дією φ він переходить у шлях $\varphi \circ (h * \widehat{h}) = g * \widehat{g} \in C(I, Y)$, що з'єднує y і $y'' \coloneqq \varphi(z'')$, де шляхи $g \coloneqq \varphi \circ h$ і $\widehat{g} \coloneqq \varphi \circ \widehat{h}$ з'єднують y з y' і y' з y'' відповідно. Якщо $f \in C(I, X)$ і $\widehat{f} \in C(I, X)$ – підняття g і $\widehat{g}$ з початками у точках x та x' відповідно, то f закінчується у $\widetilde{\varphi}(z') = x'$ за побудовою $\widetilde{\varphi}$, тому визначений шлях $f * \widehat{f}$, і він є підняттям $p \circ (f * \widehat{f}) = g * \widehat{g}$ з початком у x. Отже, $x'' \coloneqq \widetilde{\varphi}(z'') = f * \widehat{f}(1) = \widehat{f}(1)$ за побудовою $\widetilde{\varphi}$. Оскільки $\widehat{h}(I) \subset W \subset \varphi^{-1}(p(U_\alpha \cap V))$, $\widehat{g}(I) \subset p(U_\alpha \cap V)$, і тому $\widehat{f}(I) \subset p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) \subset p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, бо $\widehat{f}$ є підняттям $\widehat{g}$. При цьому $\widehat{f}(0) = x' \in U_\alpha$. Перетин зв'язної $\widehat{f}(I)$ з U_α, що є відкритозамкненою в топології $p^{-1}(U)$ (див. зауваження після вправи 7.3) є таким чином відкритозамкненим і непорожнім, отже збігається зі всією цією множиною: $\widehat{f}(I) \subset U_\alpha$ (аналогічно до доведення єдиності у лемі 8.1). Оскільки обмеження p на U_α є, зокрема, ін'єктивним, $U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V$, отже $\widehat{f}(I) \subset U_\alpha \cap V \subset V$. Зокрема, $\widetilde{\varphi}(z'') = x'' = \widehat{f}(1) \in V$. Таким чином, ми показали, що у кожної $z' \in \widetilde{\varphi}^{-1}(V)$ існує відкритий окіл $W \subset \widetilde{\varphi}^{-1}(V)$, тобто $\widetilde{\varphi}^{-1}(V)$ відкрита. Отже, підняття $\widetilde{\varphi}$ дійсно неперервне, що завершує доведення теореми.

■

Зауваження. В умовах попередньої теореми відображення $\widetilde{\varphi}$ називають *підняттям* відображення φ у накриваючий простір X. Трохи інший спосіб доведення коректності визначення $\widetilde{\varphi}$ у її доведенні, що безпосередньо використовує лему 8.3, можна знайти у [7, с. 187-188]. Також у [7, с. 189-190] наведено приклад, що демонструє суттєвість локальної лінійної зв'язності для доведення, а отже для існування неперервного підняття $\widetilde{\varphi}$ взагалі, бо якщо воно існує, то конструкція у доведенні повинна до нього приводити (виведіть це з доведення єдиності у теоремі).

Приклад 10.1. Якщо простір Z однозв'язний (зокрема лінійно зв'язний) та локально лінійно зв'язний, а (X, Y, p) – накриття, то для будь-якого неперервного $\varphi\colon Z \to Y$ маємо $\varphi_*(\pi_1(Z, z)) = \varphi_*(\{[e_z]\}) = [e_{\varphi(z)}]$ для кожної $z \in Z$, отже φ задовольняє умові попередньої теореми та має підняття. Наприклад, це вірно для куба I^n, що є опуклою підмножиною $\mathbb{R}^n$, а отже однозв'язним простором (точніше, стяжним, див. приклад 6.1). Перевірте, що він локально лінійно зв'язний. Таким чином, ця теорема дійсно узагальнює леми 8.1 (при $n = 1$) і 8.2. Зауважимо, що при цьому ми використовували лему 8.1 у доведенні теореми, а також посилалися на пункт <u>2.</u> твердження 9.1, що спирається на лему 8.3 про накриваючу гомотопію, у доведенні якої, у свою чергу, використана лема 8.2 для випадку $n = 2$.

Вправа 10.1. Узагальнити попередню теорему наступним чином. Нехай X і Y – лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні топологічні простори, (X, Y, p) і (Z, W, q) – накриття, $\varphi\colon Y \to W$ – неперервне відображення, точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $\varphi(p(x)) = q(z)$. У φ існує єдине *накриття*, тобто неперервне відображення $\widetilde{\varphi}\colon X \to Z$ таке, що $\varphi \circ p = q \circ \widetilde{\varphi}$ і $\widetilde{\varphi}(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли

$$\varphi_*(p_*(\pi_1(X, x))) \subset q_*(\pi_1(Z, z))$$

для індукованих гомоморфізмів у відповідних точках. Іншими словами, ці відображення пов'язані комутативною діаграмою

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & Z \\ {\scriptstyle p}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Зауважимо, що це твердження перетворюється на теорему 10.1 при $X = Y$ і тотожному $p = id_X$ (з точністю до заміни позначень).

Зауваження. У цьому та двох подальших розділах нам часто будуть зустрічатися накриття (X, Y, p), де, як у попередній вправі, простори

X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні. При цьому, оскільки $Y = p(X)$ і p неперервне, з лінійної зв'язності X випливає лінійна зв'язність Y, тому насправді її достатньо вимагати лише від X (ми вже зауважували це після формулювання теореми 9.1). Також достатньо буде локальної лінійної зв'язності будь-якого з просторів X або Y в силу наступного твердження. Але ми й надалі у означеннях і формулюваннях тверджень будемо записувати обидві ці умови для обох просторів з міркувань симетрії.

Твердження 10.1. *Нехай (X, Y, p) – накриття. Простір X є локально лінійно зв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y.*

Доведення. Ця еквівалентність вірна для будь-якого відкритого неперервного відображення топологічних просторів $p\colon X \to Y$ (перевірте це), тому випливає з відкритості p (вправа 7.1) та його неперервності. Але ми дамо безпосереднє доведення.

$\underline{\Rightarrow}$ Нехай X локально лінійно зв'язний. Для будь-якої $y \in Y$ нехай $U \ni y$ – правильно накритий відкритий окіл y з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Для будь-якої відкритої $V \ni y$ її прообраз $p^{-1}(V)$ відкритий за неперервністю та містить $p^{-1}(y)$. Оберемо якусь $x \in p^{-1}(y)$ та відповідний індекс $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Зокрема, U_α – відкритий окіл x, тому перетин $U_\alpha \cap p^{-1}(V)$ теж є відкритим околом x. За означенням локальної лінійної зв'язності X тоді існує лінійно зв'язна відкрита W така, що $x \in W \subset U_\alpha \cap p^{-1}(V)$. Оскільки обмеження $p\colon U_\alpha \to U$ є гомеоморфізмом, $p(W) \subset U \cap V \subset U$ відкрита та лінійно зв'язна в індукованій топології відкритої U, а отже в Y. Оскільки $y = p(x) \in p(W) \subset U \cap V \subset V$, існування такої $p(W)$ для будь-яких y і V й означає локальну лінійну зв'язність простору Y.

$\underline{\Leftarrow}$ Достатність перевіряється схожим чином до необхідності. Нехай Y локально лінійно зв'язний. Для будь-яких $x \in X$ і відкритої $V \ni x$ нехай знову $U \ni y$ – правильно накритий відкритий окіл $y := p(x)$: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, і $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Тоді $U_\alpha \cap V$ є відкритим околом x, і з гомеоморфності $p\colon U_\alpha \to U$ випливає, що $p(U_\alpha \cap V) \subset U$ – відкритий окіл y. З локальної лінійної зв'язності Y тоді маємо існування лінійно зв'язної відкритої W такої, що $y \in W \subset p(U_\alpha \cap V)$. Отже, $x \in U_\alpha \cap p^{-1}(W) \subset U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V \subset V$ (бо обмеження p на U_α ін'єктивне), де $U_\alpha \cap p^{-1}(W) = (p|_{U_\alpha})^{-1}(W)$ відкрита та лінійно зв'язна за гомеоморфністю $p\colon U_\alpha \to U$. Звідси й випливає локальна лінійна зв'язність простору X.

∎

Зауваження. Нехай тепер (X, Y, p) та (Z, Y, q) – деякі накриття, що мають спільну базу Y, причому простір X лінійно зв'язний та локально лінійно зв'язний (отже й Y є таким, а Z, у свою чергу, локально лінійно зв'язний за попередніми зауваженням та твердженням). Нехай точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $p(x) = q(z)$. Застосуємо теорему 10.1 до накриття (Z, Y, q) та відображення $p\colon X \to Y$. Згідно з твердженням цієї теореми, існує єдине неперервне відображення $\varphi\colon X \to Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$ та $\varphi(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

Нагадаємо також, що для єдиності φ тут потрібні лише лінійна зв'язність простору X та умова на точку. Умова $q \circ \varphi = p$ представляється у вигляді комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

топологічних просторів та непервних відображень. Дамо відображенням з такою властивістю спеціальну назву:

Означення 10.1. *Морфізмом* накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) зі спільною базою Y зветься неперервне відображення $\varphi\colon X \to Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$. Якщо крім цього φ – бієкція та $\varphi^{-1}\colon Z \to X$ – морфізм накрить (Z, Y, q) та (X, Y, p), то φ називають *ізоморфізмом* накрить. Якщо існує ізоморфізм накрить $\varphi\colon X \to Z$, то говорять, що (X, Y, p) *ізоморфне* (Z, Y, q) (або що вони ізоморфні).

Зауваження. Умова на φ^{-1} з означення ізоморфізма накрить означає, що це відображення неперервне, тобто φ є гомеоморфізмом, і $p \circ \varphi^{-1} = q$. Втім, ця друга рівність і так вірна в силу умови $q \circ \varphi = p$ та бієктивності φ. І навпаки, якщо $\varphi\colon X \to Z$ – такий гомеоморфізм, що $q \circ \varphi = p$, то φ і φ^{-1} є морфізмами накрить за означеням.

Наслідок 10.1. *Відображення накриваючих просторів $\varphi\colon X \to Z$ є ізоморфізмом накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) тоді й тільки тоді, коли φ – гомеоморфізм і $q \circ \varphi = p$.*

Запишемо тепер кілька властивостей морфізмів разом з переформулюванням обговореного вище часткового випадку теореми 10.1:

Твердження 10.2. <u>*1.*</u> *Композиція будь-яких двох морфізмів накрить є морфізмом накрить.*

2. *Ізоморфність є відношенням еквівалентності накрить зі спільною базою Y.*

3. *Якщо $\varphi\colon X \to Z$ – морфізм накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q), де простори Y та Z лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, то (X, Z, φ) – накриття.*

4. *Якщо $\varphi, \psi\colon X \to Z$ – морфізми накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q), де простори X та Y лінійно зв'язні, й існує точка $x \in X$ така, що $\varphi(x) = \psi(x)$, то $\varphi = \psi$.*

5. *Нехай (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття, де простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, а точки $x \in X$ і $z \in Z$ такі, що $p(x) = q(z)$. Тоді існує морфізм $\varphi\colon X \to Z$ цих накрить такий, що $\varphi(x) = z$, тоді й тільки тоді, коли*

$$p_*(\pi_1(X, x)) \subset q_*(\pi_1(Z, z)).$$

6. *Нехай (X, Y, p) – універсальне накриття, де простори X та Y локально лінійно зв'язні. Тоді для будь-якого накриття (Z, Y, q) існує морфізм $\varphi\colon X \to Z$ цих накрить.*

7. *Нехай (Z, Y, q) – тривіальне накриття. Тоді для будь-якого накриття (X, Y, p), де простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, існує морфізм $\varphi\colon X \to Z$ цих накрить.*

Доведення.

1. Дійсно, якщо $\varphi\colon X \to Z$, $\psi\colon Z \to W$ – морфізми накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q), (Z, Y, q) і (W, Y, r) відповідно, то $\psi\circ\varphi\colon X \to W$ неперервне як композиція неперервних, і $r \circ \psi \circ \varphi = q \circ \varphi = p$, як добре видно з наступної комутативної діаграми:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"] & W \arrow[dl, "r"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

   Тому $\psi \circ \varphi$ – дійсно морфізм накрить (X, Y, p) і (W, Y, r).

2. Тотожне відображення $id_X\colon X \to X$ є гомеоморфізмом і задовольняє умові $p \circ id_X = p$, тому будь-яке накриття (X, Y, p) ізоморфне самому собі. Якщо $\varphi\colon X \to Z$ – ізоморфізм (X, Y, p) і (Z, Y, q), то за означенням φ^{-1} – ізоморфізм (Z, Y, q) та (X, Y, p). Нарешті,

якщо $\varphi\colon X \to Z$, $\psi\colon Z \to W$ – ізоморфізми (X, Y, p) і (Z, Y, q), (Z, Y, q) і (W, Y, r) відповідно, то за означеням φ^{-1}, ψ^{-1} – ізоморфізми (Z, Y, q) та (X, Y, p), (W, Y, r) та (Z, Y, q) відповідно, тому за попереднім пунктом бієкція $\psi \circ \varphi$ є морфізмом (X, Y, p) і (W, Y, r), а $(\psi\circ\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\circ\psi^{-1}$ – морфізмом (W, Y, r) та (X, Y, p) (знову див. діаграму вище). Таким чином, $\psi\circ\varphi$ – ізоморфізм (X, Y, p) і (W, Y, r) за означенням.

3. Відображення $\varphi\colon X \to Z$ неперервне за означенням. Перевіримо його сюр'єктивність. Оберемо якусь $x \in X$ і нехай $z \coloneqq \varphi(x) \in Z$. Оскільки Z лінійно зв'язний, для будь-якої $z' \in Z$ існує шлях $h \in C(I, Z)$, що з'єднує z і z'. Тоді шлях $g \coloneqq q \circ h \in C(I, Y)$ з'єднує $q(z)$ і $q(z')$. Нехай $f \in C(I, X)$ – його (єдине) підняття в X з початком у x для накриття (X, Y, p). Тоді $g = p\circ f = q\circ\varphi\circ f$, оскільки φ – морфізм, тому шляхи $\varphi \circ f$ і h є підняттями g у Z зі спільним початком $\varphi(f(0)) = \varphi(x) = z = h(0)$. За єдиністю у лемі 8.1, $\varphi\circ f = h$, зокрема, $z' = h(1) = \varphi(f(1)) \in \varphi(X)$. Таким чином, φ дійсно є сюр'єктивним.

   Нехай тепер z – довільна точка Z. Покладемо $y \coloneqq q(z) \in Y$. За означеннями накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q), у точки y існують правильно накриті околи для них обох. Тоді перетин цих околів теж буде відкритою правильно накритою для накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q) множиною за зауваженням після означення 7.1. Оскільки простір Y локально лінійно зв'язний, цей перетин у свою чергу включає відкритий лінійно зв'язний окіл $U \ni y$, що є правильно накритим для обох накрить за тими ж міркуваннями. Нехай $V \subset Z$ – (єдина) відкрита множина, що правильно накриває U для накриття (Z, Y, q) і містить точку z. Зокрема, тоді $q|_V\colon V \to U$ – гомеоморфізм. З іншого боку, нехай $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ – об'єднання правильно накриваючих околів для накриття (X, Y, p). За означенням морфізма φ, $p^{-1}(U) = \varphi^{-1}(q^{-1}(U)) \supset \varphi^{-1}(V)$. Позначимо $B \coloneqq \{\beta \in A \mid U_\beta \cap \varphi^{-1}(V) \neq \varnothing\}$ (зауважимо, що ця підмножина індексів непорожня, бо $\varphi^{-1}(V) \neq \varnothing$ за доведеною раніше сюр'єктивністю φ). Таким чином, $\varphi^{-1}(V) \subset \bigcup\limits_{\beta\in B} U_\beta$, і це диз'юнктне об'єднання відкритих підмножин X. При цьому для будь-якого $\beta \in B$ обмеження $p|_{U_\beta}\colon U_\beta \to U$ – гомеоморфізм, зокрема, U_β лінійно зв'язна. Тоді й $\varphi(U_\beta) \subset \varphi(p^{-1}(U)) = \varphi(\varphi^{-1}(q^{-1}(U))) = q^{-1}(U)$ лінійно зв'язна за неперервністю φ. Оскільки правильно накриваюча V є відкритозамкненою у $q^{-1}(U)$ та $\varphi(U_\beta)\cap V \neq \varnothing$ за означенням B, $\varphi(U_\beta) \subset V$ (аналогічно до доведення єдиності у лемі 8.1). Зокрема, тому $\bigcup\limits_{\beta\in B} U_\beta \subset \varphi^{-1}(V)$, а отже $\varphi^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\beta\in B} U_\beta$. Крім того, тоді з означення морфізма випливає, що $p|_{U_\beta} = q|V \circ \varphi|_{U_\beta}$, тобто $\varphi|_{U_\beta} = (q|V)^{-1} \circ p|_{U_\beta} \colon U_\beta \to V$ – гомеоморфізм як композиція гомеоморфізмів. Все це означає, що V – правильно накритий окіл точки z, а (X, Z, φ) – дійсно накриття.

4. Це твердження про єдиність у теоремі 10.1, що застосоване до накриття (Z, Y, q) та відображення $p\colon X \to Y$.

5. Це критерій існування у теоремі 10.1, що застосований до накриття (Z, Y, q) та відображення $p\colon X \to Y$.

6. Застосуємо попередній пункт до накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q), взявши якусь точку $x \in X$, поклавши $y \coloneqq p(x)$ і обравши $z \in q^{-1}(y)$. З однозв'язності X випливає, що $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\} \subset q_*(\pi_1(Z, z))$, тому дійсно існує морфізм накрить $\varphi\colon X \to Z$ (єдиний такий, що $\varphi(x) = z$, в силу двох попередніх пунктів).

7. Нагадаємо, що тривіальне накриття – це трійка (Z, Y, q), де q – гомеоморфізм (див. приклад 7.1). Застосуємо пункт 5. до накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q): знову оберемо $x \in X$, покладемо $y \coloneqq p(x)$ і оберемо $z \in q^{-1}(y)$. Оскільки q – гомеоморфізм, $q_*\colon \pi_1(Z, z) \to \pi_1(Y, y)$ – ізоморфізм за твердженням 5.2. Зокрема, він сюр'єктивний, і тому $p_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(Y, y) = q_*(\pi_1(Z, z))$. Отже, існує (єдиний такий, що $\varphi(x) = z$) морфізм накрить $\varphi\colon X \to Z$.

■

Вправа 10.2. Показати, що саме умова лінійної зв'язності X суттєва для пункту 4. попереднього твердження, і, скажімо, слабшої умови лінійної зв'язності лише Y недостатньо. Щоб побудувати контрприклад, можна скористатися прикладом 7.2. Аналогічним чином можна показати важливість цієї умови для інших результатів цього та наступних розділів.

Вправа 10.3. Показати, що, втім, пункт 4. попереднього твердження залишиться вірним, якщо замість лінійної зв'язності X та Y вимагати, щоб X був зв'язним і локально зв'язним. Перша з цих умов означає, що Y також зв'язний в силу неперервності та сюр'єктивності p, а друга еквівалентна локальній зв'язності Y (це доводиться дослівно так само, як твердження 10.1, якщо замінити там всюди локальну лінійну зв'язність на локальну зв'язність). Пор. з теоремою 27.1 курсу топології. Спробуйте також визначити, які з наступних тверджень будуть вірними за такої заміни умов.

Наслідок 10.2. *Будь-які два універсальні накриття (X, Y, p) і (Z, Y, q) локально лінійно зв'язного простору Y ізоморфні.*

Доведення. Зауважимо, що в умовах цього наслідку X та Z локально лінійно зв'язні за твердженням 10.1, а Y лінійно зв'язний, бо таким є X (і Z). Тоді за пунктом 6. попереднього твердження існує морфізм $\varphi\colon X \to Z$ даних накрить. В силу пункту 3. того ж твердження, (X, Z, φ) є накриттям. Оскільки це накриття однозв'язного простору Z лінійно зв'язним X, відображення φ є гомеоморфізмом в силу твердження 9.2, тобто ізоморфізмом накрить за наслідком 10.1.

■

Зауваження. Інший спосіб показати, що $\varphi\colon X \to Z$ з доведення попереднього наслідку є ізоморфізмом, – побудувати його для двох точок $x \in X$, $z \in Z$ так, що $\varphi(x) = z$, разом з морфізмом $\psi\colon Z \to X$ таким, що $\psi(z) = x$, і показати їх взаємну оберненість аналогічно до доведення пункту 2. наслідку 10.3 нижче.

З пункту 1. твердження 10.2 випливає, що накриття топологічного простору Y та їхні морфізми (з операцією композиції) утворюють *категорію.* Зокрема, ізоморфізми накрить є ізоморфізмами у цій категорії, а пункт 2. згаданого твердження є окремим випадком загальнокатегорного факта: ізоморфізми задають відношення еквівалентності між об'єктами (та повторює його доведення; знову ж, див. [3, с. 153-157] або [16, с. 209-213] для знайомства з цими поняттями).

Розглянемо тепер підкатегорію накрить лінійно зв'язного та локально лінійно зв'язного простору Y з лінійно зв'язними накриваючими просторами (що є також локально лінійно зв'язними в силу твердження 10.1), морфізми якої визначені так само. Пункт 6. твердження 10.2 означає тоді, що у цій категорії універсальні накриття є *універсальними відштовхуючими об'єктами* (і саме за цією властивістю універсальності ці накриття так називаються), а пункт 7. того ж твердження – що тривіальні накриття є *універсальними притягуючими об'єктами.*

Також можна говорити про категорію накрить з відміченими точками простору Y з відміченою точкою $y \in Y$:

Означення 10.2. *Накриттям з відміченою точкою* топологічного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$ будемо називати накриття (X, Y, p) разом з точкою $x \in X$ такою, що $p(x) = y$. *Морфізмом* (відповідно, *ізоморфізмом*) *накрить* (X, Y, p) і (Z, Y, q) *з відміченими точками* $x \in X$ і $z \in Z$ зветься неперервне відображення (відповідно, гомеоморфізм) $\varphi\colon X \to Z$ таке, що $q \circ \varphi = p$ і $\varphi(x) = z$. Якщо існує ізоморфізм накрить з відміченими точками, то говорять, що вони *ізоморфні.*

Зауваження. Таким чином, морфізм (відповідно, ізоморфізм) накрить з відміченими точками є, зокрема, морфізмом (ізоморфізмом) накрить у звичайному сенсі. Аналогічно до загального випадку, з пункту 1. твердження 10.2 випливає, що попереднє означення дійсно описує об'єкти та морфізми деякої категорії.

Вправа 10.4. Перевірити, що ізоморфізми накрить з відміченими точками також є ізоморфізмами у загальнокатегорному сенсі, тобто бієктивними морфізмами, обернені до яких теж є морфізмами. Вивести звідси, що ізоморфність таких накрить теж є відношенням еквівалентності.

Зауваження. Нарешті, можна також розглядати категорію $\mathcal{C}(Y,y)$ накрить з відміченими точками та лінійно зв'язними (і локально лінійно зв'язними) накриваючими просторами лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$. З доведень пунктів 6. і 7. твердження 10.2 випливає, що універсальні та тривіальні накриття будуть універсальними об'єктами також і в цій категорії (тільки тепер з однозначно визначеними морфізмами). У розділі 12 ми отримаємо класифікацію усіх таких накрить з точністю до ізоморфізма (теорема 12.1). Для цього нам будуть корисні наступні уточнені властивості морфізмів накрить з відміченими точками:

Наслідок 10.3. *Нехай (X,Y,p) і (Z,Y,q) – накриття з відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ відповідно топологічного простору Y з відміченою точкою $y \in Y$ (тобто $p(x) = p(z) = y$).*

1. *Якщо простори X та Y лінійно зв'язні, то будь-які два морфізми даних накрить з відміченими точками $\varphi, \psi \colon X \to Z$ рівні.*

2. *Якщо простори X, Y і Z лінійно зв'язні та існують морфізми $\varphi \colon X \to Z$ і $\psi \colon Z \to X$ даних накрить з відміченими точками, то це взаємно обернені ізоморфізми.*

3. *Нехай простори X та Y лінійно зв'язні й локально лінійно зв'язні. Морфізм $\varphi \colon X \to Z$ даних накрить з відміченими точками існує тоді й тільки тоді, коли*

$$p_*(\pi_1(X,x)) \subset q_*(\pi_1(Z,z)).$$

Доведення.

1. Це просто переформулювання пункту 4. твердження 10.2.

2. Згідно з означенням, $\varphi\colon X \to Z$ та $\psi\colon Z \to X$ неперервні, $q \circ \varphi = p$, $p \circ \psi = q$, $\varphi(x) = z$ і $\psi(z) = x$. Тоді $p \circ \psi \circ \varphi = q \circ \varphi = p$ і $\psi \circ \varphi(x) = \psi(z) = x$, тобто неперервне $\psi \circ \varphi\colon X \to X$ є морфізмом на себе (*ендоморфізмом*) накриття (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$. Оскільки ще одним таким ендоморфізмом є тотожне відображення $id_X\colon X \to X$, а X лінійно зв'язний, $\psi \circ \varphi = id_X$ за попереднім пунктом. Аналогічно перевіряється, що $\varphi \circ \psi = id_Z$. Таким чином, φ та ψ є взаємно оберненими неперервними відображеннями, отже кожне з них – гомеоморфізм та ізоморфізм даних накрить з відміченими точками.

3. Це, у свою чергу, переформулювання пункту 5. твердження 10.2.

■

Зауваження. З іншого боку, сукупність класів ізоморфних накрить з $\mathcal{C}(Y, y)$ можна розглядати і як множину з відношенням (часткового) порядку. Тут позначатимемо (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$ через (X, Y, p, x). Інколи кажуть, що накриття $(Z, Y, q, z) \in \mathcal{C}(Y, y)$ *підпорядковане* накриттю $(X, Y, p, x) \in \mathcal{C}(Y, y)$, якщо між ними існує морфізм $\varphi\colon X \to Z$. Тоді він існує й для будь-яких накрить, що ізоморфні даним (чому?), отже підпорядкованість можна перенести як відношення на сукупність класів ізоморфності. Тоді з пункту 1. твердження 10.2 випливає транзитивність такого відношення, а з пункту 2. попереднього твердження – його антисиметричність (якщо (Z, Y, q, z) підпорядковане (X, Y, p, x), а (X, Y, p, x) – (Z, Y, q, z), то вони ізоморфні). Разом з очевидною рефлексивністю це демонструє, що підпорядкованість дійсно є відношенням порядку (перевірте це детально за необхідності). Згідно з пунктами 6. і 7. твердження 10.2, клас, що складається з тривіальних накрить (чому вони всі ізоморфні?), є найменшим елементом цієї множини, а клас, що складається з універсальних (що ізоморфні за наслідком 10.2) – найбільшим. Звичайно, ми поки що не знаємо, чи ці універсальні накриття існують. Критерії цього будуть встановлені у розділі 12 (наслідок 12.2).

11 Автоморфізми накрить та регулярні накриття

У цьому розділі ми дамо відповідь на одне з питань, що були поставлені на початку попереднього, а саме з'ясуємо за яких умов довільне накриття є накриттям над простором орбіт деякої неперервної та цілком розривної дії (принаймні, з точністю до якогось відношення еквівалентності).

Виявляється, що для цього потрібно розглянути множину ізоморфізмів цього накриття на себе:

Означення 11.1. *Автоморфізмом* накриття (X, Y, p) зветься його ізоморфізм на себе.

Зауваження. Таким чином, за наслідком 10.1, автоморфізм накриття (X, Y, p) – це такий гомеоморфізм $\varphi\colon X \to X$, що $p \circ \varphi = p$, тобто φ переводить будь-який шар $p^{-1}(y)$ цього накриття на себе, переставляючи його елементи. Зокрема, англійською автоморфізм накриття зветься з цієї причини *deck transformation* – перетворенням колоди (карт). Множину усіх автоморфізмів накриття (X, Y, p) позначатимемо через $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$. Наступне твердження демонструє, що за додаткової умови лінійної зв'язності X та Y це якраз і буде потрібна нам група, що діє на X неперервно та цілком розривно.

Зауважимо, що будь-який автоморфізм накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язними X та Y однозначно визначений образом довільної точки $x \in X$ за пунктом 4. твердження 10.2, тобто якщо $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$ та $\varphi(x) = \psi(x)$, то $\varphi = \psi$. Як обговорювалося у вправах 10.2 та 10.3, для цієї однозначної визначеності є суттєвою лінійна зв'язність X, яку, однак, можна тут замінити умовою зв'язності та локальної зв'язності цього простору.

Твердження 11.1. *Для будь-якого накриття (X, Y, p) множина його автоморфізмів $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ з операцією композиції є групою. Умова $\varphi \cdot x \coloneqq \varphi(x)$ для $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$ і $x \in X$ визначає неперервну дію цієї групи на X. Якщо до того ж топологічні простори X та Y лінійно зв'язні, то ця дія цілком розривна.*

Доведення. Розглянемо довільні $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$. Тоді, наприклад, з доведення пункту 2. твердження 10.2 випливає, що композиція $\varphi\circ\psi$, тотожне відображення id_X і обернене φ^{-1} належать до $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$. Таким чином, на $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ коректно визначена асоціативна операція композиції, для якої одиницею (нейтральним елементом) є id_X (бо $\varphi \circ id_X = id_X \circ \varphi = \varphi$ для будь-якого φ), а оберненим елементом до φ є φ^{-1} (бо $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = id_X$). Тому це група.

В умові дійсно описана дія $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ на X, бо $\varphi \cdot (\psi \cdot x) = \varphi(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi) \cdot x$ та $id_X \cdot x = id_X(x) = x$ для будь-яких $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$, $x \in X$. Для цієї дії λ і будь-якого $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$ за побудовою $\lambda_\varphi = \varphi$, що є гомеоморфізмом, тому λ неперервна.

Нехай тепер X та Y лінійно зв'язні, $x \in X$, $y \coloneqq p(x) \in Y$, а відкрита $U \ni y$ – правильно накритий окіл y, прообраз якого має вигляд $p^{-1}(U) =$

$\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ з означення накриття. Оберемо $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Зокрема, U_α є відкритим околом x. Нехай U_α і $\lambda_\varphi(U_\alpha) = \varphi(U_\alpha)$ перетинаються для деякого $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$, тобто існує точка $z \in U_\alpha$ така, що $z = \varphi(w)$ для деякого $w \in U_\alpha$. Тоді за означенням автоморфізма $p(z) = p(\varphi(w)) = p(w)$. Обмеження p на U_α є гомеоморфізмом, зокрема ін'єктивним, тому $w = z = \varphi(w)$. Тоді $\varphi = id_X$ в силу однозначної визначеності автоморфізмів. Таким чином, $U_\alpha \cap \lambda_\varphi(U_\alpha) = \varnothing$ при $\varphi \neq id_X$, тобто U_α – окіл x, існування якого вимагається в означенні цілком розривної дії.

$\blacksquare$

Вправа 11.1. Показати, що ізоморфні накриття мають ізоморфні групи автоморфізмів. Чи вірно це також для відношень еквівалентності накрить, що описані далі у вправах 11.2 та 11.3?

Зауваження. У подальшому ми будемо мати на увазі саме ту дію групи автоморфізмів $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ на X, що описана у попередньому твердженні. З іншого боку, у випадку накриття простору орбіт $(X, X/_G, p)$ з твердження 7.1 у нас вже є група G, що діє неперервно та цілком розривно на X. Виявляється, що для лінійно зв'язного X можна побудувати канонічний ізоморфізм між групами G і $\mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$, що пов'язує ці дві дії:

Твердження 11.2. *Якщо група G діє на лінійно зв'язному топологічному просторі X неперервно та цілком розривно, то відображення $G \to \mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$, що ставить у відповідність елементу групи $a \in G$ гомеоморфізм $\lambda_a \colon X \to X$, є ізоморфізмом груп.*

Доведення. Відображення λ_a для $a \in G$ дійсно є гомеоморфізмами за означенням неперервної дії (точніше, за наслідком 7.1). Крім того,

$$p(\lambda_a(x)) = G \cdot (a \cdot x) = \{b \cdot (a \cdot x) \mid b \in G\} =$$

$$= \{ba \cdot x \mid b \in G\} = \{c \cdot x \mid c \in G\} = G \cdot x = p(x)$$

для будь-яких $a \in G$, $x \in X$, де четверта рівність випливає з того, що будь-який елемент $c \in G$ можна представити у вигляді ba (для цього достатньо покласти $b := ca^{-1} \in G$). Таким чином, $p \circ \lambda_a = p$, отже $\lambda_a \in \mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$, і ми дійсно коректно визначили відображення в групу автоморфізмів. Оскільки $\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b$ для будь-яких $a, b \in G$ згідно з зауваженням після означення 7.2, це гомоморфізм груп. Його ядром є $\{a \in G \mid \lambda_a = id_X\} = \{e\}$, бо дія вільна. Тому цей гомоморфізм ін'єктивний за пунктом 1. твердження A.2.

Щоб показати, що побудоване відображення дійсно є ізоморфізмом, залишилося перевірити його сюр'єктивність. Нехай $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$. Оберемо якусь $x \in X$. Згідно з означенням автоморфізма накриття, $G \cdot x = p(x) = p(\varphi(x)) = G \cdot \varphi(x)$, тобто $\varphi(x) = a \cdot x = \lambda_a(x)$ для деякого $a \in G$ (причому a визначений однозначно, бо дія вільна: $a \cdot x \neq b \cdot x$ при $a \neq b$). Тоді $\varphi = \lambda_a$ за однозначною визначеністю автоморфізмів. Це й означає сюр'єктивність. Зауважимо, що лише тут ми використали лінійну зв'язність X.

■

Зауваження. Хоча ми й знаємо тепер, що група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на лінійно зв'язному накриваючому просторі X неперервно та цілком розривно, залишається питання, коли база Y є простором орбіт. Сформулюємо тепер необхідні і достатні умови того, що це так, тобто (X, Y, p) має вигляд накриття простору орбіт з попереднього твердження (точніше, еквівалентне йому в деякому сенсі, див. наступні зауваження і вправи). Тут $X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ позначає простір орбіт дії з твердження 11.1.

Твердження 11.3. *Нехай (X, Y, p) – накриття, де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

1. *Існує гомеоморфізм $\psi\colon Y \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ такий, що*
$$\psi(p(x)) = \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x$$
для будь-якої точки $x \in X$.

2. *Група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$.*

3. *Існує точка $y \in Y$ така, що група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно.*

Зауваження. Умова на ψ з цього твердження еквівалентна рівності $\psi \circ p = q$, де $q\colon X \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ – канонічна проєкція на простір орбіт, тобто комутативності діаграми

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Y \arrow[rr, "\psi"] & & X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)} \end{tikzcd}$$

просторів та непервних відображень. Пор. з наведеною перед означенням 10.1 діаграмою, що ілюструє поняття морфізма, зокрема ізоморфізма, накрить.

Вправа 11.2. За аналогією з означенням 10.1 визначити відношення еквівалентності накрить зі спільним накриваючим простором X, відносно якого (X, Y, p) в умовах твердження 11.3 еквівалентне накриттю $(X, X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, q)$.

Вправа 11.3. За допомогою комутативної діаграми з вправи 10.1 визначити відношення еквівалентності (ізоморфності) двох довільних накрить (X, Y, p) і (Z, W, q), узагальнивши означення 10.1 і попередню вправу.

Доведення. <u>1. ⇐ 2.</u> Отже, нехай група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на усіх шарах накриття. Тоді умова $\psi(p(x)) = \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x$, $x \in X$ коректно визначає відображення $\psi\colon Y \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$. Дійсно, нехай $y = p(x) = p(z) \in Y$. Оскільки x і z належать до одного шару $p^{-1}(y)$, за умовою транзитивності існує $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $z = \varphi(x) = \varphi \cdot x$. Це й означає, що $\mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot z$, тобто орбіта $\psi(y)$ визначена однозначно. І навпаки, якщо $\psi(p(x)) = \psi(p(z))$, тобто $\mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot z$, то існує $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $z = \varphi(x)$. Тоді з означення автоморфізма випливає, що $p(x) = p(\varphi(x)) = p(z)$. Це означає, що ψ ін'єктивне. Воно сюр'єктивне, бо будь-яка орбіта $\mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x$ є образом $p(x)$ для її довільної точки x. Прообраз будь-якої відкритої підмножини $U \subset X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ згідно з побудовою ψ та сюр'єктивністю p дорівнює $\psi^{-1}(U) = p(p^{-1}(\psi^{-1}(U))) = p(q^{-1}(U))$, де $q\colon X \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ – канонічна проєкція на простір орбіт (див. комутативну діаграму вище). Оскільки відображення q неперервне, а p – відкрите за вправою 7.1, $\psi^{-1}(U)$ відкрита. Отже, ψ неперервне. Нарешті, для будь-якої відкритої $U \subset Y$ знову ж за побудовою та бієктивністю ψ маємо $q^{-1}(\psi(U)) = p^{-1}(\psi^{-1}(\psi(U))) = p^{-1}(U)$. Це відкрита множина, бо p неперервне, отже $\psi(U)$ відкрита за означенням фактортопології. Звідси маємо, що ψ відкрите і таким чином дійсно є гомеоморфізмом. Він задовольняє умову пункту <u>1.</u> за побудовою.

<u>1. ⇒ 2.</u> Нехай ψ – гомеоморфізм з пункту <u>1.</u> Для будь-яких $y \in Y$, $x, z \in p^{-1}(y)$ тоді за умовою цього пункту маємо

$$\mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x = \psi(p(x)) = \psi(y) = \psi(p(z)) = \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot z,$$

що й означає існування $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$ такого, що $z = \varphi(x)$, тобто транзитивність дії.

<u>2. ⇐ 3.</u> Нехай $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на $p^{-1}(y)$ для деякої $y \in Y$. Оскільки Y лінійно зв'язний, для будь-якої $y' \in Y$ існує шлях $g \in C(I, Y)$, що з'єднує її з y: $g(0) = y'$, $g(1) = y$. Для будь-яких $x', z' \in p^{-1}(y')$ тоді за лемою 8.1 існують і єдині підняття $f, h \in C(I, X)$ цього шляху з початками в x', z' відповідно: $p \circ f = p \circ h = g$, $f(0) = x'$, $h(0) = z'$. Їхні

кінці $x \coloneqq f(1)$ і $z \coloneqq h(1)$ повинні належати до $p^{-1}(y)$. З транзитивності дії на цьому шарі маємо, що існує такий $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$, що $\varphi(x) = z$. З означення автоморфізма тоді випливає, що

$$p \circ \varphi \circ f(1-t) = p \circ f(1-t) = g(1-t) = p \circ h(1-t)$$

для будь-якого $t \in I$, тобто шляхи $\varphi \circ \overline{f}$ і $\overline{h}$ є підняттями $\overline{g}$ зі спільним початком $\varphi(\overline{f}(0)) = \varphi(x) = z = \overline{h}(0)$. Тоді за єдиністю у лемі 8.1 маємо $\varphi \circ \overline{f} = \overline{h}$, зокрема, $\varphi(x') = \varphi(\overline{f}(1)) = \overline{h}(1) = z'$. Таким чином, ми показали, що $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє транзитивно на $p^{-1}(y')$.

Нарешті, імплікація 2. $\Rightarrow$ 3. тривіальна.

$\blacksquare$

Зауваження. Імплікація 2. $\Leftarrow$ 3. – єдина у цьому доведенні, де явно використовувалася лінійна зв'язність (причому лише Y). Але насправді лінійна зв'язність X та Y суттєва для формулювання попереднього твердження, бо забезпечує розривність дії за твердженням 11.1, а отже те, що $(X, X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, q)$ є накриттям за твердженням 7.1. Накриття з властивістю, що описана у твердженні 11.3, мають спеціальну назву:

Означення 11.2. Накриття (X, Y, p), де топологічні простори X та Y лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, зветься *регулярним* (або *накриттям Галуа*), якщо група $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ діє на шарі $p^{-1}(y)$ транзитивно для будь-якої точки $y \in Y$.

Зауваження. З твердження 11.3 випливає, що "для будь-якої точки $y \in Y$" у цьому означенні можна замінити на "для деякої точки $y \in Y$". Оскільки цілком розривна (за твердженням 11.1) дія групи $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$ на X є вільною, у випадку регулярного накриття ця група діє на кожному шарі $p^{-1}(y)$ накриття вільно і транзитивно: для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$ існує єдиний автоморфізм $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, Y, p)$ такий, що $\varphi(x) = z$. Фіксуючи точку x, ми таким чином отримаємо бієкцію між $p^{-1}(y)$ та $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$.

Приклад 11.1. Накриття $(X, X/_G, p)$, де група G неперервно та цілком розривно діє на лінійно зв'язному і локально лінійно зв'язному просторі X, є регулярним. Дійсно, шарами цього накриття є орбіти $G \cdot x$, і для будь-яких двох точок $a \cdot x$, $b \cdot x \in G \cdot x$ автоморфізм $\lambda_{ba^{-1}} \in \mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$ (див. твердження 11.2) переводить першу в другу. Також воно задовольняє пункту 1. твердження 11.3 для тотожного ψ, бо простори орбіт за діями груп G і $\mathrm{Aut}(X, X/_G, p)$ збігаються в силу твердження 11.2. Цей приклад є базовим, бо будь-яке регулярне накриття у певному сенсі зводиться до такого, як описано у твердженні 11.3.

Зауваження. Повернемося до фундаментальних груп. У випадку накриття $(X, X/_G, p)$ з попереднього прикладу у доведенні пункту 2. теореми 9.1 було показано, що для будь-якої $x \in X$ підгрупа $p_*(\pi_1(X,x)) \subset \pi_1(X/_G, G \cdot x)$ є ядром деякого гомоморфізма $\pi_1(X/_G, G \cdot x) \to G$ і тому нормальна (нагадаємо також, що $p_*(\pi_1(X,x))$ ізоморфна групі $\pi_1(X,x)$ за пунктом 1. твердження 9.1 і зауваженням після його формулювання). Виявляється, що нормальність цієї підгрупи є зручним алгебраїчним критерієм регулярності накриття. Почнемо його доведення з двох корисних загальних лем.

Лема 11.1. *Нехай $p\colon X \to Y$ – неперервне відображення топологічних просторів, $x, z \in X$, $p(x) = p(z)$, шлях $h\colon I \to X$ з'єднує x і z. Тоді*

$$p_*(\pi_1(X,z)) = [p \circ h]^{-1} p_*(\pi_1(X,x))[p \circ h]$$

тобто підгрупи $p_*(\pi_1(X,x))$ і $p_*(\pi_1(X,z))$ спряжені в $\pi_1(Y,y)$, де $y = p(x) = p(z)$, у сенсі прикладу А.12.

Доведення. Отже, $h \in C(I,X)$, $h(0) = x$, $h(1) = z$, тому $p \circ h \in C(I,Y)$ як композиція неперервних, $p \circ h(0) = p \circ h(1) = y$, тобто $p \circ h$ – петля в y, отже визначений її гомотопічний клас $[p \circ h] \in \pi_1(Y,y)$. Нехай $\alpha\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,z)$ і $\beta\colon \pi_1(Y,y) \to \pi_1(Y,y)$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами h і $p \circ h$ відповідно. Тоді для будь-якого $[g] \in \pi_1(Y,y)$ з побудови ізоморфізма β, означення множення і вигляду обернених елементів фундаментальної групи (див. теорему 4.1) випливає, що

$$\beta([g]) = [\overline{(p \circ h)} * g * (p \circ h)] = [\overline{p \circ h}][g][p \circ h] = [p \circ h]^{-1}[g][p \circ h] = C_{[p \circ h]^{-1}}([g])$$

у позначеннях прикладу А.12, тобто β є спряженням у $\pi_1(Y,y)$ з елементом $[p \circ h]^{-1}$. Крім того, за лемою 10.1 маємо комутативність $p_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$. Зауважимо, що p_* у формулюванні та цій комутативності насправді позначає два, взагалі кажучи, різні індуковані гомоморфізми: $p_*\colon \pi_1(X,z) \to \pi_1(Y,y)$ зліва і $p_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ справа. Тоді, оскільки α – ізоморфізм,

$$p_*(\pi_1(X,z)) = p_*(\alpha(\pi_1(X,x))) = \beta(p_*(\pi_1(X,x))) =$$

$$= C_{[p \circ h]^{-1}}(p_*(\pi_1(X,x))) = [p \circ h]^{-1} p_*(\pi_1(X,x))[p \circ h].$$

Таким чином, отримали потрібну рівність підгруп.

■

Означення 11.3. Відображення топологічних просторів $\varphi\colon X \to Y$ зветься *локальним гомеоморфізмом*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U \ni x$ такий, що $\varphi(U)$ відкрита і обмеження $\varphi|_U\colon U \to \varphi(U)$ – гомеоморфізм (відносно індукованих топологій).

Приклад 11.2. Для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p є локальним гомеоморфізмом: для довільної $x \in X$ в якості U з попереднього означення візьмемо правильно накриваючий окіл U_α точки x. Тоді $p|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to p(U_\alpha)$ – гомеоморфізм за означенням накриття (де $p(U_\alpha)$ – правильно накритий окіл $p(x)$).

Лема 11.2. *Відображення топологічних просторів є гомеоморфізмом тоді й тільки тоді, коли це бієкція і локальний гомеоморфізм.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Дійсно, будь-який гомеоморфізм бієктивний, а щоб перевірити його локальну гомеоморфність, достатньо у попередньому означенні покласти $U = X$.

$\underline{\Leftarrow}$ Отже, нехай бієкція $\varphi\colon X \to Y$ просторів X та Y є локальним гомеоморфізмом. Для будь-якої відкритої $V \subset Y$ і кожної точки $x \in \varphi^{-1}(V)$ нехай $U \ni x$ – окіл з означення локальної гомеоморфності. Оскільки $\varphi|_U$ неперервне, а перетин $\varphi(U) \cap V$ є відкритим околом $\varphi(x)$ у індукованій топології $\varphi(U)$, його прообраз $(\varphi|_U)^{-1}(\varphi(U) \cap V) = U \cap \varphi^{-1}(V) \subset \varphi^{-1}(V)$ є відкритим околом x у індукованій топології відкритої U, а отже у X. Оскільки це так для усіх точок $\varphi^{-1}(V)$, ця множина відкрита. Таким чином, φ неперервне. Аналогічним чином перевіряється його відкритість (тобто неперервність φ^{-1}): для будь-якої відкритої $V \subset X$ і кожної $x \in V$ візьмемо окіл $U \ni x$ як вище. Тоді $U \cap V$ – відкритий окіл x у індукованій топології U, і, оскільки $\varphi|_U\colon U \to \varphi(U)$ бієктивне та відкрите, $\varphi|_U(U \cap V) = \varphi(U) \cap \varphi(V) \subset \varphi(V)$ є відкритим околом $\varphi(x)$ у індукованій топології відкритої $\varphi(U)$, а отже у Y. Оскільки це так для кожної точки $\varphi(x) \in \varphi(V)$, ця множина відкрита. Це завершує доведення відкритості, а отже гомеоморфності φ. Іншими словами, φ і φ^{-1} є неперервними, бо неперервні у деякому околі кожної точки, а неперервність є локальною властивістю.

■

Теорема 11.1 (Критерії регулярності накриття)**.** *Нехай X і Y – лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні топологічні простори, а (X, Y, p) – накриття. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

1. *Накриття (X, Y, p) є регулярним.*

2. *Підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ є нормальною в $\pi_1(Y, p(x))$ для будь-якої точки $x \in X$.*

3. *$p_*(\pi_1(X,x)) = p_*(\pi_1(X,z))$ для будь-яких точок $x, z \in X$ таких, що $p(x) = p(z)$.*

4. *Існує точка $x \in X$ така, що підгрупа $p_*(\pi_1(X,x))$ є нормальною в $\pi_1(Y, p(x))$.*

5. *Існує точка $y \in Y$ така, що $p_*(\pi_1(X,x)) = p_*(\pi_1(X,z))$ для будь-яких точок $x, z \in p^{-1}(y)$.*

Доведення. Ми будемо доводити імплікації між цими твердженнями згідно зі схемою, що зображена нижче.

1. $\Rightarrow$ 2. Якщо (X, Y, p) регулярне, то з твердження 11.3 випливає існування гомеоморфізма $\psi\colon Y \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ такого, що $\psi \circ p = q$, де $q\colon X \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ – канонічна проєкція на простір орбіт. Тоді для кожної $x \in X$ маємо $\psi(p(x)) = q(x) = \mathrm{Aut}(X,Y,p) \cdot x$, а індукований гомоморфізм $\psi_*\colon \pi_1(Y, p(x)) \to \pi_1(X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, \mathrm{Aut}(X,Y,p) \cdot x)$ є ізоморфізмом в силу твердження 5.2. Оскільки $\psi_* \circ p_* = (\psi \circ p)_* = q_*$ за пунктом 2. твердження 5.1, $\psi_*(p_*(\pi_1(X,x))) = q_*(\pi_1(X,x))$, де $p_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, p(x))$ і $q_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, \mathrm{Aut}(X,Y,p)\cdot x)$ – відповідні індуковані гомоморфізми. При цьому $q_*(\pi_1(X,x))$ є нормальною підгрупою $\pi_1(X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, \mathrm{Aut}(X,Y,p)\cdot x)$ за пунктом 2. теореми 9.1. Звідси випливає, що $p_*(\pi_1(X,x))$ – нормальна у $\pi_1(Y, p(x))$, бо ψ_* – ізоморфізм (перевірте, що при ізоморфізмі нормальна підгрупа переходить у нормальну).

2. $\Rightarrow$ 3. випливає з леми 11.1 та міркувань прикладу A.12: для будь-якої $x \in X$ усі $p_*(\pi_1(X,z))$ для $z \in X$ таких, що $p(z) = p(x)$, спряжені з $p_*(\pi_1(X,x))$, а отже збігаються з нею, оскільки $p_*(\pi_1(X,x))$ нормальна. Зауважимо, що для цього було б достатньо нормальності $p_*(\pi_1(X,x))$ лише для однієї точки x з кожного шару $p^{-1}(y)$, $y \in Y$.

2. $\Rightarrow$ 4. тривіальним чином.

4. $\Rightarrow$ 5. доводиться дослівно так само, як 2. $\Rightarrow$ 3., тільки тепер лише для точок $p^{-1}(y)$, де $y \coloneqq p(x)$, а x – точка з твердження 4. При цьому за цим твердженням нормальною є лише $p_*(\pi_1(X,x))$, але цього достатньо в силу зауваження наприкінці доведення 2. $\Rightarrow$ 3.

5. $\Rightarrow$ 3. Почнемо діяти аналогічно до доведення імплікації 2. $\Leftarrow$ 3. у твердженні 11.3. Нехай $y \in Y$ така, що $p_*(\pi_1(X,x)) = p_*(\pi_1(X,z))$ для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$. З лінійної зв'язності Y випливає існування для будь-якої точки $y' \in Y$ шляху $g \in C(I,Y)$, що з'єднує її з y. Для будь-яких $x', z' \in p^{-1}(y')$ нехай $f, h \in C(I,X)$ – (єдині) підняття шляху g з початками в x', z' відповідно. Зокрема, $p \circ f = p \circ h = g$. Покладемо $x \coloneqq f(1)$, $z \coloneqq h(1)$, тоді $x, z \in p^{-1}(y)$. Нехай $\alpha\colon \pi_1(X,x') \to \pi_1(X,x)$, $\beta\colon \pi_1(Y,y') \to \pi_1(Y,y)$ і $\gamma\colon \pi_1(X,z') \to \pi_1(X,z)$ – ізоморфізми фундаментальних груп з твердження 4.1, що побудовані за шляхами f, g і h відпо-

відно. За лемою 10.1, тоді $p_* \circ \alpha = \beta \circ p_*$, де p_* позначає два різні індуковані гомоморфізми: $p_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ зліва і $p_*\colon \pi_1(X,x') \to \pi_1(Y,y')$ справа. З цієї ж леми випливає, що $p_* \circ \gamma = \beta \circ p_*$, де тепер p_* позначає $p_*\colon \pi_1(X,z) \to \pi_1(Y,y)$ зліва і $p_*\colon \pi_1(X,z') \to \pi_1(Y,y')$ справа. Таким чином, діаграми

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(X,x) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(Y,y') \arrow[r, "\beta"] & \pi_1(Y,y)
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(X,z') \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(X,z) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(Y,y') \arrow[r, "\beta"] & \pi_1(Y,y)
\end{tikzcd}$$

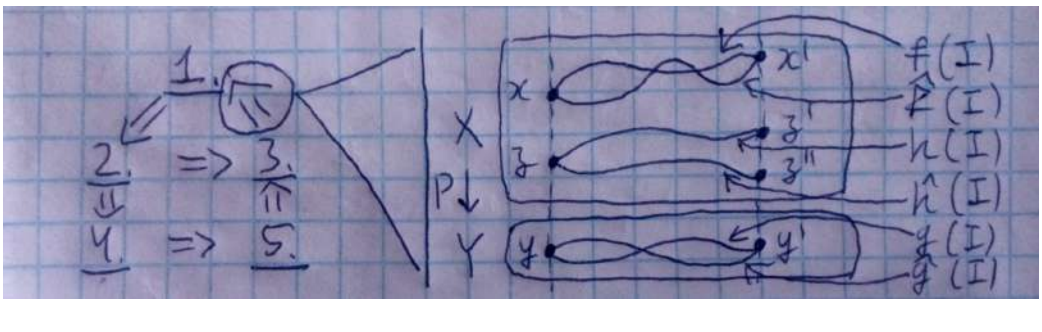
комутативні. Тоді з цих комутативностей, того, що α і γ – ізоморфізми, і властивості точки y випливає, що

$$\beta(p_*(\pi_1(X,x'))) = p_*(\alpha(\pi_1(X,x'))) = p_*(\pi_1(X,x)) =$$
$$= p_*(\pi_1(X,z)) = p_*(\gamma(\pi_1(X,z'))) = \beta(p_*(\pi_1(X,z'))),$$

тому, оскільки β – ізоморфізм, $p_*(\pi_1(X,x')) = p_*(\pi_1(X,z'))$, що й потрібно було показати (це міркування, у свою чергу, нагадує один з кроків у доведенні теореми 10.1).

<u>3. ⇒ 1.</u> Це основний етап доведення теореми. Отже, нам відомо, що усі підгрупи $p_*(\pi_1(X,x))$ для точок x, що належать одному й тому ж шару, збігаються. Нехай $y \in Y$. Треба показати, що $\mathrm{Aut}(X,Y,p)$ діє на $p^{-1}(y)$ транзитивно, тобто що для будь-яких $x, z \in p^{-1}(y)$ існує $\varphi \in \mathrm{Aut}(X,Y,p)$ такий, що $\varphi(x) = z$.

Побудуємо відображення φ, використовуючи шляхи аналогічно до конструкції підняття $\widetilde{\varphi}$ у доведенні теореми 10.1. Цю побудову проілюстровано знизу. Для будь-якої $x' \in X$ в силу лінійної зв'язності X існує шлях $f \in C(I,X)$, що з'єднує x і x': $f(0) = x$, $f(1) = x'$. Тоді його проєкція $g \coloneqq p \circ f \in C(I,Y)$ є шляхом (як композиція неперервних), що з'єднує $y = p(x) = p(f(0))$ і $y' \coloneqq p(x') = p(f(1))$. За лемою 8.1 у нього існує єдине підняття $h \in C(I,X)$ з початком у z, тобто $p \circ h = g$ і $h(0) = z$. Позначимо через $z' \coloneqq h(1)$ кінець цього шляху. Зокрема, $p(z') = p \circ h(1) = g(1) = y'$.



Аналогічно до доведення теореми 10.1, нам тепер потрібно показати, що z' насправді не залежить від шляху f, тобто однозначно визначена точками x, z і x'. Дійсно, нехай $\widehat{f} \in C(I, X)$ також з'єднує x і x'. Тоді $\widehat{g} \coloneqq p \circ \widehat{f} \in C(I, Y)$ так само з'єднує y і y'. Нехай тепер $\widehat{h} \in C(I, X)$ – (єдине) підняття $\widehat{g}$ з початком у z, і $z'' \coloneqq \widehat{h}(1) \in p^{-1}(y')$ – його кінець. Тоді добуток $\overline{f} * \widehat{f}$ є петлею в x', що проєктується у петлю $p \circ (\overline{f} * \widehat{f}) = \overline{g} * \widehat{g}$ в y'. Її гомотопічним класом у $\pi_1(Y, y')$ є

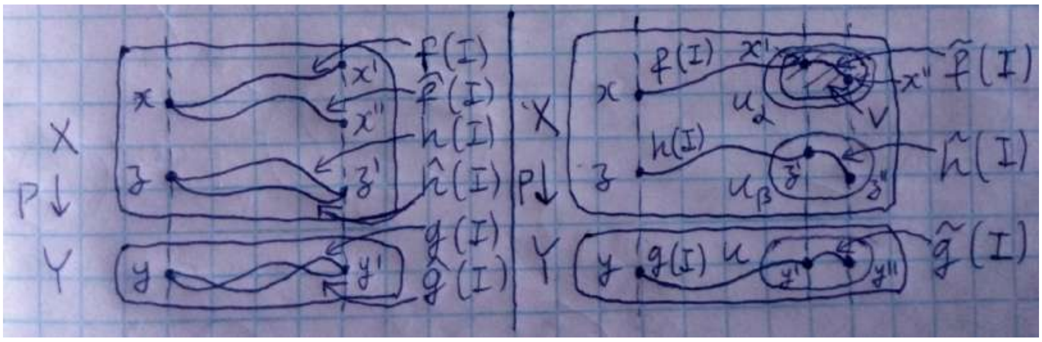
$$[\overline{g} * \widehat{g}] = [p \circ (\overline{f} * \widehat{f})] = p_*([\overline{f} * \widehat{f}]) \in p_*(\pi_1(X, x')) = p_*(\pi_1(X, z')),$$

де остання рівність випливає з умови <u>3.</u>, бо $x', z' \in p^{-1}(y')$. Крім того, шлях $\overline{h} * \widehat{h}$ починається в z' і є підняттям тієї ж петлі $p \circ (\overline{h} * \widehat{h}) = \overline{g} * \widehat{g}$. Оскільки $[\overline{g} * \widehat{g}] \in p_*(\pi_1(X, z'))$, (єдине) підняття $\overline{g} * \widehat{g}$ з початком у z' повинне бути петлею за пунктом <u>2.</u> твердження 9.1, тобто $z'' = \widehat{h}(1) = \overline{h} * \widehat{h}(1) = \overline{h} * \widehat{h}(0) = \overline{h}(0) = z'$. Це й доводить незалежність z' від f. Тому (для фіксованих x і z) коректно визначене відображення $\varphi \colon X \to X$, що ставить у відповідність кожній $x' \in X$ точку $\varphi(x') \coloneqq z'$ описаним вище чином. При цьому за його побудовою маємо у наших позначеннях $p(\varphi(x')) = p(z') = y' = p(x')$ для усіх x', тобто $p \circ \varphi = p$. Для $x' = x$ можна взяти $f = e_x$, тоді $g = e_y$ і $h = e_z$, звідки $\varphi(x) = z' = h(1) = z$. Таким чином, щоб показати, що φ – потрібний нам елемент групи $\mathrm{Aut}(X, Y, p)$, залишилося перевірити його гомеоморфність. Згідно з лемою 11.2, для цього достатньо буде показати, що це бієкція і локальний гомеоморфізм.

Перевірка ін'єктивності φ схожа на раніше зроблену перевірку коректності. Вона зображена на малюнку нижче. Нехай $x', x'' \in X$ такі, що $\varphi(x') = \varphi(x'') = z'$. За побудовою φ це означає, що для шляхів $f, \widehat{f} \in C(I, X)$, що з'єднують x з x' і x'' відповідно, їхніх проєкцій $g = p \circ f$, $\widehat{g} = p \circ \widehat{f} \in C(I, Y)$ та піднять $h, \widehat{h} \in C(I, X)$ шляхів g і $\widehat{g}$ відповідно з початками у z маємо $h(1) = \widehat{h}(1) = z'$. Тоді визначена петля $\overline{h} * \widehat{h}$ у z', що накриває петлю $p \circ (\overline{h} * \widehat{h}) = \overline{g} * \widehat{g}$ в $y' = p(z') = p(x') = p(x'')$. Оскільки тепер для відповідного гомотопічного класу в $\pi_1(Y, y')$ маємо

$$[\overline{g} * \widehat{g}] = [p \circ (\overline{h} * \widehat{h})] = p_*([\overline{h} * \widehat{h}]) \in p_*(\pi_1(X, z')) = p_*(\pi_1(X, x'))$$

знову ж за умовою <u>3.</u>, підняття $\overline{f} * \widehat{f}$ петлі $\overline{g} * \widehat{g}$ з початком у $\overline{f} * \widehat{f}(0) = \overline{f}(0) = x'$ повинне бути петлею, тобто $x'' = \widehat{f}(1) = \overline{f} * \widehat{f}(1) = \overline{f} * \widehat{f}(0) = x'$. Таким чином, φ ін'єктивне. Щоб показати його сюр'єктивність, спочатку побудуємо для довільної $z' \in X$ шлях $h \in C(I, X)$, що з'єднує z і z' і є підняттям $g \coloneqq p \circ h \in C(I, Y)$, а потім побудуємо підняття $f \in C(I, X)$ шляху g з початком у x (зокрема, $g = p \circ f$). Якщо покласти $x' \coloneqq f(1)$, то $\varphi(x') = h(1) = z'$ за побудовою φ. Це завершує доведення бієктивності цього відображення.



Як було анонсовано раніше, завершимо доведення імплікації <u>3. $\Rightarrow$ 1.</u> демонстрацією локальної гомеоморфності φ, що проілюстрована вище. Саме тут єдине місце у доведенні теореми, де знадобиться локальна лінійна зв'язність. Будемо діємо аналогічно до доведення неперервності $\widetilde{\varphi}$ у теоремі 10.1. Отже, нехай $x' \in X$. У точки $y' := p(x') \in Y$ за означенням накриття існує правильно накритий відкритий окіл $U \ni y'$: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Тоді існують індекси $\alpha, \beta \in A$ такі, що $x' \in U_\alpha$, $z' := \varphi(x') \in U_\beta$ (бо $x', z' \in p^{-1}(y')$). В силу локальної лінійної зв'язності X, існує лінійно зв'язна відкрита V така, що $x' \in V \subset U_\alpha$. Лінійна зв'язність означає, що для будь-якої $x'' \in V$ існує шлях $\widetilde{f} \in C(I, V)$, що з'єднує x' і x''. Якщо тепер $f \in C(I, X)$ – якийсь шлях, що з'єднує x і x', то шлях $f * \widetilde{f} \in C(I, X)$ з'єднує x і x''. Спроєктуємо його у шлях $p \circ (f * \widetilde{f}) = g * \widetilde{g} \in C(I, Y)$, що з'єднує y і $y'' := p(x'')$, де шляхи $g := p \circ f$ і $\widetilde{g} := p \circ \widetilde{f}$ з'єднують y з y' і y' з y'' відповідно. Тепер зауважимо, що якщо $h, \widetilde{h} \in C(I, X)$ – (єдині) підняття g і $\widetilde{g}$ з початками у точках z і z' відповідно, то за побудовою φ шлях h повинен закінчуватися у $\varphi(x') = z'$, тому визначений $h * \widetilde{h}$, що є підняттям $p \circ (h * \widetilde{h}) = g * \widetilde{g}$ з початком у z. Тоді $z'' := \varphi(x'') = h * \widetilde{h}(1) = \widetilde{h}(1)$ за побудовою φ, тобто це кінець шляху $\widetilde{h}$. Оскільки $\widetilde{f}(I) \subset V \subset U_\alpha$, $\widetilde{g}(I) = p(\widetilde{f}(I)) \subset p(V) \subset U$, і тому $\widetilde{h}(I) \subset p^{-1}(U)$, бо $\widetilde{h}$ є підняттям $\widetilde{g}$. При цьому $\widetilde{h}(0) = z' \in U_\beta$. Тоді з $\widetilde{h}(I) \subset p^{-1}(U)$ та зі зв'язності $\widetilde{h}(I)$ аналогічно доведенню теореми 10.1 (або доведенню єдиності у лемі 8.1) випливає, що $\widetilde{h}(I) \subset U_\beta$. Зокрема, $z'' = \widetilde{h}(1) \in U_\beta$. З іншого боку, $p(z'') = p(x'') = y''$, а обмеження $p|_{U_\beta} \colon U_\beta \to U$ є гомеоморфізмом за означенням накриття. Таким чином,

$$\varphi(x'') = z'' = (p|_{U_\beta})^{-1}(y'') = (p|_{U_\beta})^{-1}(p(x'')) = (p|_{U_\beta})^{-1} \circ p|_{U_\alpha}(x'')$$

для будь-якої $x'' \in V$, тобто $\varphi|_V = (p|_{U_\beta})^{-1} \circ p|_{U_\alpha}$, де $p|_{U_\alpha} \colon U_\alpha \to U$ також є гомеоморфізмом. Тому обмеження $\varphi|_V \colon V \to \varphi(V)$ – теж гомеоморфізм, де $\varphi(V)$ відкрита у індукованій топології відкритої U_β, а отже в X, як образ V під дією гомеоморфізма. Це завершує доведення локальної гомеоморфності φ, імплікації та теореми в цілому. Також ми показали, що локально φ дійсно виглядає як тасування колоди карт, переводячи відкриту підмножину U_α у відкриту підмножину U_β композицією обмежень відображення p.

Вправа 11.4. Показати, що будь-який автоморфізм накриття (X, Y, p) з локально лінійно зв'язними X та Y локально виглядає так само.

Зауважимо також, що згідно зі схемою вище імплікація 2. $\Rightarrow$ 3. нам сама по собі насправді не була потрібна.

$\blacksquare$

Вправа 11.5. Спробуйте показати суттєвість умови локальної лінійної зв'язності простору X для цієї теореми (аналогічно до зауваження після доведення теореми 10.1).

Наслідок 11.1. *Універсальне накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору є регулярним.*

Доведення. Тобто маємо накриття (X, Y, p), де накриваючий простір X однозв'язний (зокрема, лінійно зв'язний, а отже й Y лінійно зв'язний), а Y локально лінійно зв'язний (отже й X локально лінійно зв'язний за твердженням 10.1). Тоді $\pi_1(X, x) = \{[e_x]\}$ для кожної $x \in X$, тому підгрупа $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_{p(x)}]\}$ тривіальна, а отже нормальна у $\pi_1(Y, p(x))$. Тому накриття регулярне за теоремою 11.1.

$\blacksquare$

Приклад 11.3. Оскільки будь-який многовид M є локально лінійно зв'язним за пунктом 5. твердження 29.2 курсу топології, будь-яке універсальне накриття простору M є регулярним. Зокрема, простори $\mathbb{R}^n$, сфери S^n, тори T^n та дійсні проєктивні простори $\mathbb{R}P^n$ є n-вимірними лінійно зв'язними многовидами для усіх натуральних n (див. розділ 29 курсу топології), тому універсальні накриття $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$ і $(S^n, \mathbb{R}P^n, p)$ (при $n \geqslant 2$), що розглядалися у прикладах 7.4 і 7.5 відповідно, регулярні за попереднім наслідком. Крім того, тривимірними лінійно зв'язними многовидами є лінзові простори $L(n, m)$, що були описані у прикладі 7.7 (перевірте це; також тут можна використати твердження 12.4 наступного розділу), тому описані у тому ж прикладі їх універсальні накриття $(S^3, L(n, m), p)$ теж регулярні. Звичайно, регулярність перелічених накрить випливає також з того, що це накриття над просторами орбіт груп, що діють на однозв'язних і локально лінійно зв'язних накриваючих просторах (що теж є многовидами) неперервно та цілком розривно, згідно з прикладом 11.1. Зауважимо також, що суттєвою для цих міркувань є лише властивість локальної евклідовості многовида. Ми повернемося до обговорення накрить многовидів у наступному розділі.

Приклад 11.4. Хоча букет двох кіл $S^1 \vee S^1$, а також накриваючий простір його універсального накриття, що було побудоване у прикладі 9.4, і не є многовидами (чому?), $S^1 \vee S^1$ є локально лінійно зв'язним (перевірте це), тому це універсальне накриття теж задовольняє умові наслідку 11.1 і є регулярним. Знову ж, це випливає і з того, що це накриття над простором орбіт (приклад 11.1). Все сказане тут вірне й для узагальнення на букет n кіл у вправі 9.2 (при $n \geqslant 2$).

Наслідок 11.2. *Накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору, фундаментальна група якого абелева, з лінійно зв'язним накриваючим простором є регулярним.*

Доведення. Як і в доведенні наслідку 11.1, це накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язними і локально лінійно зв'язними X та Y. При цьому в силу лінійної зв'язності Y усі його фундаментальні групи ізоморфні за наслідком 4.1, тому можемо говорити просто про "абелеву фундаментальну групу", маючи на увазі, що $\pi_1(Y, y)$ абелева для будь-якої $y \in Y$. Але тоді всі її підгрупи нормальні, зокрема, $p_*(\pi_1(X, x))$ для будь-якої $x \in p^{-1}(y)$, отже накриття регулярне за теоремою 11.1.

■

Приклад 11.5. Усі фундаментальні групи, що поки що були обчислені у цьому курсі, крім фундаментальних груп букетів кіл з прикладу 9.4 і вправи 9.2 (вони ж фундаментальні групи площини з виколотими точками з вправи 9.3), були абелевими, тому накриття відповідних просторів задовольняють попередньому наслідку при виконанні додаткових умов зв'язності та є таким чином регулярними. Зокрема, неуніверсальні n-листові накриття (S^1, S^1, p), що визначені дією $\mathbb{Z}_n$ і досліджувалися у прикладах 7.6 та 9.3, є регулярними, бо $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ абелева, а коло S^1 лінійно зв'язне і локально лінійно зв'язне як многовид. Згадаємо, що при ототожненні $\pi_1(S^1, y)$ з $\mathbb{Z}$ для деякої $y \in S^1$ усі $p_*(\pi_1(S^1, x))$ при $x \in p^{-1}(y)$ дійсно збігалися, як це й повинно бути за теоремою 11.1: це була підгрупа $n\mathbb{Z}$ цілих чисел, що кратні n. Звичайно, регулярність також випливає з прикладу 11.1, бо це накриття над простором орбіт.

Приклад 11.6. Оскільки топологічні групи мають абелеві фундаментальні групи згідно з вправою 4.3, будь-яке лінійно зв'язне накриття локально лінійно зв'язної топологічної групи регулярне за наслідком 11.2. До таких топологічних груп відносяться $\mathbb{R}^n$, тори T^n (зокрема коло S^1)

та матричні групи $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ і $\mathrm{SU}(n)$ (див. приклад 4.3). Перевірте, що всі ці топологічні групи дійсно є лінійно зв'язними (для багатьох з них це встановлювалося в курсі топології) та локально лінійно зв'язними. Зокрема, локальну лінійну зв'язність можна вивести з того, що усі перелічені групи є многовидами, але в останніх трьох прикладах це не так просто довести.

Вправа 11.6. Показати, що будь-яке дволистове накриття локально лінійно зв'язного топологічного простору з лінійно зв'язним накриваючим простором є регулярним.

Вправа 11.7. Побудувати приклад трилистового накриття простору $S^1 \vee S^1$ з лінійно зв'язним накриваючим простором, що не має нетотожних автоморфізмів, а отже не є регулярним.

Наслідок 11.3. *Якщо накриття (X, Y, p) регулярне, то його групи монодромії ізоморфні його групі автоморфізмів:*

$$\pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq \mathrm{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $x \in X$. Зокрема, якщо це регулярне накриття є універсальним, то

$$\pi_1(Y, y) \simeq \mathrm{Aut}(X, Y, p)$$

для будь-якої точки $y \in Y$.

Доведення. Нехай $\psi\colon Y \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ – гомеоморфізм з твердження 11.3. У доведенні імплікації <u>1. ⇒ 2.</u> теореми 11.1 було показано, що тоді для будь-якої $x \in X$ підгрупа $p_*(\pi_1(X, x))$ переходить у $q_*(\pi_1(X, x))$ під дією ізоморфізма $\psi_*\colon \pi_1(Y, p(x)) \to \pi_1(X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$. Тут $q\colon X \to X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}$ – канонічна проєкція на простір орбіт, $p_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, p(x))$ і $q_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x)$ – індуковані гомоморфізми. Тоді факторгрупи ізоморфних фундаментальних груп за ізоморфними нормальними підгрупами $p_*(\pi_1(X, x))$ та $q_*(\pi_1(X, x))$ теж ізоморфні (перевірте це):

$$\pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq$$

$$\simeq \pi_1(X/_{\mathrm{Aut}(X,Y,p)}, \mathrm{Aut}(X, Y, p) \cdot x)/q_*(\pi_1(X, x)) \simeq \mathrm{Aut}(X, Y, p),$$

де друга ізоморфність є твердженням пункту <u>2.</u> теореми 9.1.

Оскільки у випадку універсального накриття $\pi_1(X, x)$ (а отже й образи $p_*(\pi_1(X, x))$) тривіальні для усіх $x \in X$, друга ізоморфність в умові даного наслідку випливає з першої (або аналогічним чином виводиться з пункту <u>2.</u> наслідку 9.1).

■

12 Існування та єдиність накрить

Тут ми дамо відповідь на решту питань, що були поставлені на початку розділу 10, а саме про умови існування та можливу єдиність універсального накриття. Насправді наша відповідь буде стосуватися набагато більш широкого класу накрить. Для того, щоб її сформулювати, спочатку введемо локальний аналог поняття однозв'язності. Виявляється, що це можна зробити принаймні двома різними способами:

Означення 12.1. Топологічний простір X зветься

- *напівлокально однозв'язним*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ існує відкрита $U \ni x$ така, що будь-яка петля в x підпростору U гомотопна постійній у X;

- *локально однозв'язним*, якщо для будь-якої точки $x \in X$ і будь-якої відкритої $U \ni x$ існує відкрита V така, що $x \in V \subset U$ і будь-яка петля в x підпростору V гомотопна постійній в U.

Зауваження. Умова на U в означенні напівлокальної однозв'язності означає, що для будь-якої петлі $f \in C(I, U) \subset C(I, X)$ (де на U розглядається індукована топологія) у точці x (тобто $f(0) = f(1) = x$) існує гомотопія $F \in C(I \times I, X)$ петель f (точніше, $i \circ f$, де $i\colon U \to X : y \mapsto y$ – відображення включення, що, нагадаємо, є неперервним у індукованій топології) і e_x. Це, у свою чергу, означає рівність гомотопічних класів $i_*([f]) = [i \circ f] = [e_x]$ у групі $\pi_1(X, x)$, де $i_*\colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ – гомоморфізм, що індукований включенням. Іншими словами, ця умова еквівалентна тому, що $i_*(\pi_1(U, x)) = \{[e_x]\}$, тобто гомоморфізм i_* тривіальний (див. приклад A.7). Аналогічним чином можна переформулювати умову на V в означенні локальної однозв'язності (зробіть це). З цих означень випливає, що будь-який локально однозв'язний простір є напівлокально однозв'язним: якщо покласти $U = X$ в означенні локальної однозв'язності, ми отримаємо умову напівлокальної однозв'язності X. Обернене, взагалі кажучи, невірне, як демонструє приклад 12.4 нижче.

Приклад 12.1. Будь-який однозв'язний (зокрема стяжний, див. приклад 6.1) простір є напівлокально однозв'язним: достатньо взяти $U = X$.

Приклад 12.2. Будь-який многовид є локально однозв'язним, а отже напівлокально однозв'язним. Дійсно, нехай x – довільна точка n-вимірного многовида M, і $U \ni x$ відкрита. Існує карта (W, φ) в околі x, тобто відкрита $W \ni x$ та гомеоморфізм $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^n$. Тоді $U \cap W$ – теж відкритий окіл x, отже $\varphi(U \cap W)$ – відкритий окіл $\varphi(x)$ у $\mathbb{R}^n$. Оскільки топологія $\mathbb{R}^n$ породжена евклідовою метрикою, існує $\varepsilon > 0$ таке, що відкрита евклідова куля $B_\varepsilon(\varphi(x)) \subset \varphi(U \cap W)$. Покладемо $V := \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x))) \subset U \cap W \subset U$. Це теж відкритий окіл x, бо φ – гомеоморфізм. Нехай $f \in C(I, V)$ – петля в x, тоді $\varphi \circ f \in C(I, B_\varepsilon(\varphi(x)))$ – петля у $\varphi(x)$. Куля $B_\varepsilon(\varphi(x))$ стяжна як опукла підмножина $\mathbb{R}^n$, отже однозв'язна, тому існує гомотопія $F \in C(I \times I, B_\varepsilon(\varphi(x)))$ петель $\varphi \circ f$ і $e_{\varphi(x)}$. Тоді $\varphi^{-1} \circ F \in C(I \times I, V)$ (неперервне як композиція неперервних) буде за означенням гомотопією петель f і e_x у $V \subset U$ аналогічно, наприклад, першій частині доведення однозв'язності у прикладі 6.2. Таким чином, M локально однозв'язний. Зауважимо, що для цього, як і для локальної лінійної зв'язності, потрібна лише локальна евклідовість M.

Отже, будь який неоднозв'язний многовид буде прикладом локально однозв'язного (зокрема напівлокально однозв'язного) локально лінійно зв'язного простору, що не є однозв'язним, скажімо, тор T^n (зокрема коло S^1) згідно з прикладом 9.1 або дійсний проєктивний простір $\mathbb{R}P^n$ згідно з прикладом 9.2. Ці многовиди до того ж лінійно зв'язні.

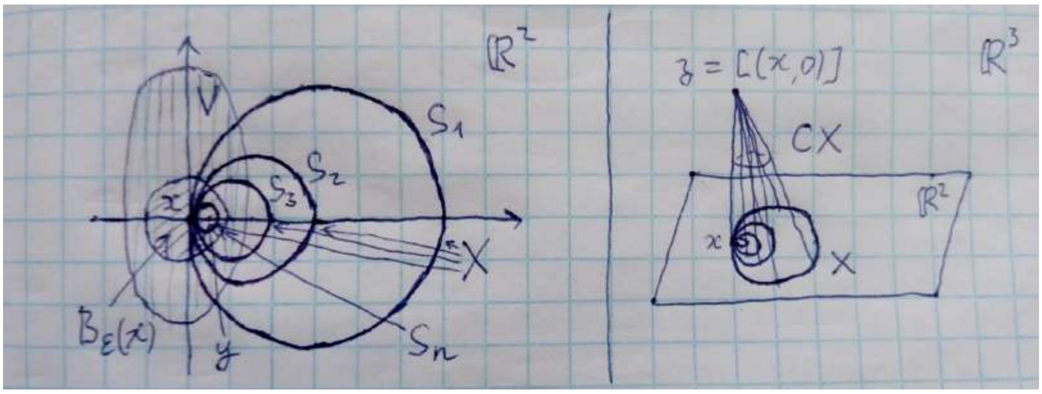
Приклад 12.3 (Гавайська сережка)**.** Розглянемо підмножину $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ площини $\mathbb{R}^2$, де S_n – коло радіуса $\frac{1}{n}$ з центром у $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ (див. ілюстрацію нижче). У індукованій з площини топології цього простору будь-який відкритий окіл U точки $x = (0,0)$ має вигляд $X \cap V$, де V – відкритий окіл x у $\mathbb{R}^2$, тому міститиме перетин $X \cap B_\varepsilon(x)$ множини X з відкритим евклідовим кругом деякого радіуса $\varepsilon > 0$, а отже міститиме й коло S_n для будь-якого n такого, що $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Це коло S_n є носієм петлі

$$f\colon I \to X\colon t \mapsto \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos 2\pi t, \frac{1}{n}\sin 2\pi t\right)$$

у x. Покажемо, що f негомотопна e_x у X. Дійсно, якщо б це було не так та між ними існувала б гомотопія $F \in C(I \times I, X)$, то $i \circ F \in C(I \times I, \mathbb{R}^2 \setminus \{y\})$, де y – якась точка всередині кола S_n, що не належить X (наприклад, $y = (q, 0)$, де $0 < q < \frac{2}{n}$ ірраціональне), а $i\colon X \to \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ – включення, була б гомотопією $f = i \circ f$ і e_x у проколотій площині $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ (знову ж за означенням гомотопії). Цей простір гомотопічно еквівалентний S^1. А саме, відображення

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{y\} \to S_y\colon z \mapsto \frac{z - y}{|z - y|} + y$$

є його (строгою) деформаційною ретракцією на коло $S_y \cong S^1$ з центром в y радіуса 1 аналогічно до прикладу 2.6. Оскільки тоді φ разом з включенням S_y у $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ утворюють пару гомотопічно обернених відображень за доведенням твердження 2.2, індукований гомоморфізм $\varphi_*\colon \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}, x) \to \pi_1(S_y, \varphi(x))$ є ізоморфізмом за твердженням 5.2. Він переводить $[f]$ у $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$. Але у першій з цих груп $[f] = [e_x]$ за нашим припущенням, а в другій $\varphi \circ f$ має гомотопічний клас $[\varphi \circ f] \neq [e_{\varphi(x)}]$ в силу міркувань прикладу 9.1, тобто ізоморфізм φ_* переводить тривіальний елемент у нетривіальний. Це протиріччя (для якого вистачило б і гомоморфності φ_*) демонструє, що f дійсно негомотопна постійній петлі у X. Таким чином, простір X не є напівлокально однозв'язним (а отже й не є однозв'язним в силу прикладу 12.1 або локально однозв'язним в силу зауваження після означення 12.1). При цьому він лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний (покажіть це).



Означення 12.2. *Конусом* над топологічним простором X зветься факторпростір $CX \coloneqq X \times I/_{X\times\{0\}}$.

Зауваження. Нагадаємо, що факторизація за підмножиною означає факторизацію за відношенням еквівалентності, що ототожнює усі точки цієї підмножини, не чіпаючи інші. Елементи CX, тобто класи еквівалентності точок $X \times I$, будемо позначати через $[(x,t)]$, де $x \in X$ і $t \in I$. Таким чином, $[(x,0)]$ складається з усіх точок $X \times \{0\}$, а решта класів $[(x,t)]$ для $t \in (0,1]$ – кожен з однієї точки (x,t).

Твердження 12.1. *Для будь-якого топологічного простору X конус CX стяжний.*

Доведення. Відображення $F\colon (X \times I) \times I \to CX\colon ((x,t),s) \mapsto [(x,st)]$ є неперервним як композиція неперервного (чому?) відображення у $X \times I$ та канонічної проєкції на факторпростір. При цьому $F((x,0),s) = [(x,0)]$ для будь-яких $x \in X$ і $s \in I$, тобто еквівалентні точки переходять у рівні, тому F факторизується у неперервне $\widehat{F}\colon CX \times I \to CX\colon ([(x,t)], s) \mapsto [(x, st)]$ (аналогічно до факторизації відображень у твердженні 16.2 курсу топології; відновіть деталі самостійно). Оскільки $F([(x,t)], 0) = [(x,0)]$ і $F([(x,t)], 1) = [(x,t)]$ для будь-якої $[(x,t)] \in CX$, це гомотопія між постійним відображенням у точку $[(x,0)]$ і тотожним відображенням CX. Отже, CX стяжний за твердженням 2.3.

■

Приклад 12.4. Тепер розглянемо конус CX над простором X з прикладу 12.3. Його можна вкласти у $\mathbb{R}^3$, як показано на малюнку вище. Для цього достатньо побудувати "звичайний" конус над $X \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ з будь-якою вершиною $z \notin \mathbb{R}^2$, тобто об'єднання усіх відрізків, що з'єднують z з точками X, і ця підмножина $\mathbb{R}^3$ буде гомеоморфною CX (покажіть це). Вершина z при цьому відповідатиме $[(x,0)] \in CX$. Простір CX стяжний в силу попереднього твердження, отже однозв'язний (зокрема лінійно зв'язний), і тому напівлокально однозв'язний за прикладом 12.1. Крім того, він локально лінійно зв'язний (виведіть це з локальної лінійної зв'язності X). При цьому відкрита підмножина $U := \{[(y,t)] \mid t \in (0,1]\} \subset CX$ гомотопічно еквівалентна X (перевірте, що це так для будь-якого простору X). Повторюючи міркування прикладу 12.3 для цієї підмножини (або див. далі вправу 12.2), можна показати, що у точки $[(x,1)] \in U$, де $x = (0,0)$, не існує відкритого околу V такого, що $[(x,1)] \in V \subset U$ і будь-яка петля в $[(x,1)]$, що лежить у V, гомотопна постійній в U (зробіть це). Тому CX не є локально однозв'язним.

Вправа 12.1. Сформулювати локальний аналог поняття стяжності так, щоб з цієї локальної стяжності випливала локальна однозв'язність (а отже й напівлокальна однозв'язність). Див. відповідь у [5, с. 230]. Показати, що будь-який многовид локально стяжний.

Твердження 12.2. *Локальна та напівлокальна однозв'язності є топологічними інваріантами.*

Доведення. Дійсно, гомеоморфізми зберігають відкриті околи і переводять гомотопні петлі у гомотопні (як у прикладі 12.2), тому якщо топологічні простори X і Y гомеоморфні, то X є локально (відповідно, напівлокально) однозв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y.

■

Вправа 12.2. Чи є локальна та напівлокальна однозв'язності гомотопічними інваріантами (тобто чи вірно, що якщо $X \sim Y$, то X є (напів)локально однозв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є Y)?

Твердження 12.3. *Нехай* (X, Y, p) *– накриття. Простір* X *є локально (відповідно, напівлокально) однозв'язним тоді й тільки тоді, коли таким є* Y.

Доведення. Доведемо цю еквівалентність у випадку напівлокальної однозв'язності, адже саме вона нам знадобиться у подальшому. Доведення для локальної однозв'язності аналогічне (виконайте його). Див. також доведення твердження 10.1.

$\underline{\Rightarrow}$ Отже, нехай X напівлокально однозв'язний. Для довільної точки $y \in Y$ нехай $U \ni y$ – її правильно накритий відкритий окіл з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Оберемо якусь $x \in p^{-1}(y)$ і нехай індекс $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. З напівлокальної однозв'язності X випливає існування відкритої $V \ni x$ такої, що будь-яка петля в x, що лежить у V, гомотопна постійній в X. Тоді $U_\alpha \cap V$ – відкритий окіл x, а отже $W \coloneqq p(U_\alpha \cap V) \subset U$ – відкритий окіл y, бо обмеження p на U_α – гомеоморфізм. Тепер розглянемо будь-яку петлю $g \in C(I, W)$ в y і піднімемо її у шлях $f \in C(I, X)$ з початком у x, використавши лему 8.1: $p \circ f = g$ і $f(0) = x$. Тоді з $f(I) \subset p^{-1}(U)$ та зі зв'язності $f(I)$ випливає, що $f(I) \subset U_\alpha$ (як у доведенні єдиності підняття в лемі 8.1). Оскільки таким чином $f(1) \in U_\alpha \cap p^{-1}(y) = \{x\}$ (бо гомеоморфізм $p|_{U_\alpha}$ є, зокрема, ін'єкцією), f є петлею у x. Крім того, оскільки $g(I) \subset W = p(U_\alpha \cap V)$, $f(I) \subset U_\alpha \cap p^{-1}(p(U_\alpha \cap V)) = U_\alpha \cap V \subset V$ знову ж за ін'єктивністю $p|_{U_\alpha}$. Тоді з властивості V випливає, що f гомотопна e_x у X. Якщо $F \in C(I \times I, X)$ – відповідна гомотопія, то за означенням $p \circ F \in C(I \times I, Y)$ є гомотопією g і e_y. Отже, W задовольняє умові означення 12.1, тому Y є напівлокально однозв'язним.

$\underline{\Leftarrow}$ Достатність доводимо аналогічним чином. Тепер Y напівлокально однозв'язний, а ми розглядаємо довільну точку $x \in X$. Покладемо $y \coloneqq p(x)$ і розглянемо правильно накритий відкритий окіл $U \ni y$ з означення накриття: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Нехай також $V \ni y$ – відкритий окіл з означення напівлокальної однозв'язності: будь-яка петля в y, що лежить у V, гомотопна постійній в Y. Якщо $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$, то $W \coloneqq U_\alpha \cap p^{-1}(V)$ є відкритим околом x за неперервністю p. Для будь-якої петлі $f \in C(I, W)$ в x шлях $g \coloneqq p \circ f \in C(I, p(W))$ є петлею в y, де $p(W) \subset U \cap V \subset V$. Тоді за властивістю V петля g гомотопна e_y в Y. Оскільки f накриває g, а e_x – e_y, і це петлі в x, звідси випливає, що f гомотопна e_x у X за лемою 8.3 про накриваючу гомотопію. Тому W є околом x, що потрібний для демонстрації напівлокальної однозв'язності X. ■

Вправа 12.3. Чи вірні еквівалентності з попереднього твердження для будь-якого відкритого неперервного відображення топологічних просторів $p\colon X \to Y$?

Наслідок 12.1. *Якщо у топологічного простору Y існує універсальне накриття (X, Y, p), то Y напівлокально однозв'язний.*

Доведення. Оскільки простір X однозв'язний, а отже напівлокально однозв'язний за прикладом 12.1, Y напівлокально однозв'язний в силу попереднього твердження.

■

Зауваження. Попередній наслідок обґрунтовує вибір з двох умов означення 12.1 слабшої умови напівлокальної однозв'язності для подальшого дослідження, адже нас цікавлять перш за все саме універсальні накриття. З цього наслідку випливає, зокрема, що у простору з прикладу 12.3 не існує універсального накриття, а отже його фундаментальну групу в принципі не вдасться обчислити за допомогою техніки накрить. Ми наведемо спосіб її опису у розділі 13, див. зауваження після вправи 13.2 і посилання там.

Зауважимо, що з існування у простору Y універсального накриття випливає також, що Y лінійно зв'язний. Тепер ми вже нарешті можемо сформулювати та довести основну теорему цього розділу.

Теорема 12.1 (Існування та єдиність накрить)**.** *Нехай топологічний простір Y лінійно зв'язний, локально лінійно зв'язний та напівлокально однозв'язний, а $y \in Y$ – деяка його точка. Тоді для будь-якої підгрупи $H \subset \pi_1(Y, y)$ існує накриття (X, Y, p) з лінійно зв'язним X та відміченою точкою $x \in X$ таке, що $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = H$. Це накриття є единим з точністю до ізоморфізма накрить з відміченими точками: якщо (X, Y, p) і (Z, Y, q) – накриття з лінійно зв'язними X і Z та відміченими точками $x \in X$ і $z \in Z$ відповідно такі, що $p(x) = p(z) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = q_*(\pi_1(Z, z)) = H$, то існує єдиний гомеоморфізм $\varphi\colon X \to Z$ такий, що $\varphi(x) = z$ і $q \circ \varphi = p$.*

Доведення. Спочатку покажемо єдиність накриття з точністю до ізоморфізма. Зауважимо, що простір X лінійно зв'язний за умовою і локально лінійно зв'язний за твердженням 10.1, бо існує накриття (X, Y, p) з локально лінійно зв'язним Y. Тоді з умови $p_*(\pi_1(X, x)) = q_*(\pi_1(Z, z))$ і пункту <u>3.</u> наслідку 10.3 випливає існування морфізмів даних накрить з відміченими точками $\varphi\colon X \to Z$ та $\psi\colon Z \to X$. Пункт <u>2.</u> того ж наслідку означає, що ці морфізми є взаємно оберненими ізоморфізмами, зокрема, φ – потрібний нам ізоморфізм (єдиний за пунктом <u>1.</u> того ж наслідку).

Як бачимо, для єдиності накриття достатньо лінійної зв'язності та локальної лінійної зв'язності Y разом з умовою на образ фундаментальної групи X у точці x.

Тепер почнемо доводити існування. Нам дані лінійно зв'язний, локально лінійно зв'язний і напівлокально однозв'язний простір Y, точка $y \in Y$ і підгрупа $H \subset \pi_1(Y, y)$. Якщо б накриття (X, Y, p) з відміченою точкою $x \in X$ з умови теореми (тобто таке, що X лінійно зв'язний, $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(X, x)) = H$) існувало, то для будь-якої точки $v \in X$ і будь-яких двох шляхів $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in C(I, X)$, що з'єднували б x і v (й існували б у силу лінійної зв'язності X), гомотопічний клас $[\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}]$ петлі $\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}$ належав би до $\pi_1(X, x)$, а отже

$$[f * \overline{g}] = [p \circ (\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}})] = p_*([\widetilde{f} * \overline{\widetilde{g}}]) \in p_*(\pi_1(X, x)) = H,$$

де $f \coloneqq p \circ \widetilde{f} \in C(I, Y)$, $g \coloneqq p \circ \widetilde{g} \in C(I, Y)$ – шляхи з початком в y та кінцем в $z \coloneqq p(v)$. І навпаки, нехай $f, g \in C(I, Y)$ – будь-які шляхи зі спільними початком y та кінцем z такі, що $[f * \overline{g}] \in H = p_*(\pi_1(X, x))$, тобто $[f * \overline{g}] = [h]$ для деякої h такої, що $[h] \in p_*(\pi_1(X, x))$. Домножуючи тепер гомотопні петлі h і $f * \overline{g}$ в y на шлях g з початком у точці y, маємо в силу лем 3.1–3.4 наступні гомотопності шляхів:

$$h * g \sim (f * \overline{g}) * g \sim f * (\overline{g} * g) \sim f * e_z \sim f.$$

Нехай тепер $\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h} \in C(I, X)$ – (єдині) підняття шляхів f, g і h відповідно у накриваючий простір X з початком у x, що існують за лемою 8.1. Оскільки $[h] \in p_*(\pi_1(X, x))$, $\widetilde{h}$ є петлею у x за пунктом 2. твердження 9.1, тому визначений шлях $\widetilde{h} * \widetilde{g}$. Оскільки $p \circ (\widetilde{h} * \widetilde{g}) = h * g$, цей шлях – це (єдине) підняття шляху $h * g$ з початком у x. Тоді зі встановленої вище гомотопності $h * g \sim f$ і леми 8.3 про накриваючу гомотопію випливає, що $\widetilde{h} * \widetilde{g} \sim \widetilde{f}$, зокрема, $\widetilde{g}(1) = \widetilde{h} * \widetilde{g}(1) = \widetilde{f}(1)$, тобто підняття $\widetilde{f}$ і $\widetilde{g}$ закінчуються у спільній точці X. Таким чином, побудована бієкція між X та класами еквівалентності шляхів з початком у точці y та спільними кінцями, що задовольняють умові вигляду $[f * \overline{g}] \in H$. Мотивуючись цим, для доведення існування у нашій теоремі побудуємо X як множину класів еквівалентності шляхів у Y з початком у точці y, що визначена такою умовою.

Отже, будемо говорити, що два шляхи $f, g \in C(I, Y)$ зі спільним початком у точці y та спільним кінцем еквівалентні, якщо гомотопічний клас $[f * \overline{g}] \in \pi_1(Y, y)$ петлі $f * \overline{g}$ у точці y належить до H. Зокрема, ця умова виконана для гомотопних f і g, бо для них $[f * \overline{g}] = [g * \overline{g}] = [e_y] \in H$ за лемами 3.1 і 3.4. Позначимо це відношення через $\sim$: $f \sim g$. Перевіримо, що воно є еквівалентністю. Дійсно, $f \sim f$ для будь-якого f, бо знову ж $[f * \overline{f}] = [e_y] \in H$. Якщо $f \sim g$, тобто $[f * \overline{g}] \in H$, то $[g * \overline{f}] = [\overline{f * \overline{g}}] = [f * \overline{g}]^{-1} \in H$ за означеннями добутку і оберненого шляху, виглядом обернених елементів у фундаментальній групі (теорема 4.1) і тим, що H – підгрупа. Отже, $g \sim f$. Нарешті, якщо $f \sim g$ і $g \sim h$, тобто $[f * \overline{g}], [g * \overline{h}] \in H$, то

$$[f * \overline{h}] = [f * e_z * \overline{h}] = [f * \overline{g} * g * \overline{h}] = [f * \overline{g}][g * \overline{h}] \in H,$$

де z – спільний кінець f, g і h, за лемами 3.1–3.4, означенням фундаментальної групи і тим, що H – підгрупа. Таким чином, $f \sim h$, і це завершує перевірку означення відношення еквівалентності. Далі у цьому доведенні позначатимемо квадратними дужками класи еквівалентності саме цього відношення, що, взагалі кажучи, ширші за гомотопічні. Позначимо множину таких класів (фактормножину множини шляхів з початком в y) через X і визначимо відображення p з X у Y наступним чином:

$$p\colon X := \{[f] \mid f \in C(I, Y)\colon f(0) = y\} \to Y\colon [f] \mapsto f(1).$$

Отже, кожному класу еквівалентності шляхів ставиться у відповідність кінець будь-якого шляху з цього класу. Оскільки вони всі мають спільний кінець за означенням нашої еквівалентності, це відображення коректно визначене. Позначимо $x := [e_y] \in X$, для нього $p(x) = e_y(1) = y$. Для кожної $z \in Y$ в силу лінійної зв'язності Y існує шлях $f \in C(I, Y)$, що з'єднує y і z, отже $p([f]) = f(1) = z$. Таким чином, p – сюр'єкція.

Введемо тепер топологію на X. Для будь-якої відкритої підмножини $U \subset Y$ і класу $[f] \in X$ такого, що $p([f]) = f(1) \in U$ (тобто шляхи з $[f]$ закінчуються у деякій точці U) позначимо

$$U_{[f]} := \{[f * h] \mid h \in C(I, U)\colon h(0) = f(1)\} \subset X,$$

тобто це множина класів еквівалентностей добутків шляхів з $[f]$ на шляхи, що лежать в U і починаються у спільному кінці шляхів з $[f]$ (зауважимо, що не кожний шлях з $[f * h]$ повинен мати такий вигляд). Також відмітимо, що неважливо, який саме шлях з $[f]$ обрати: якщо $[f] = [g]$, тобто $f \sim g$, то петля $f * \overline{g}$ гомотопна якійсь петлі k в y, гомотопічний клас якої належить до H, тому шлях f гомотопний $k * g$ (як у міркуваннях на початку доведення існування), а отже $f * h$ гомотопний $k * (g * h)$ для будь-якого $h \in C(I, U)$ з початком у $f(1) = g(1)$, звідки аналогічним чином випливає, що $[f * h] = [g * h]$. При цьому $[f] \in U_{[f]}$ (достатньо взяти $h = e_{f(1)}$). Такі множини утворюють покриття X хоча б тому, що за побудовою $X = Y_x$ (де, нагадаємо, $x = [e_y]$). Зауважимо також, що для будь-якої відкритої $V \subset U$ і класу $[f] \in p^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$ маємо включення

$$V_{[f]} = \{[f * h] \mid h \in C(I, V) \colon h(0) = f(1)\} \subset U_{[f]},$$

бо $C(I, V) \subset C(I, U)$. Нехай $[g] \in U_{[f]}$, тобто $[g] = [f * h]$ для деяких $f \in [f]$ і $h \in C(I, U)$ таких, що $h(0) = f(1)$. Це, у свою чергу, означає, що гомотопічний клас петлі $(f * h) * \overline{g}$ належить до H. Знову ж, оскільки H – підгрупа, звідси і з вигляду оберених елементів у фундаментальній групі випливає, що обернений гомотопічний клас, що є гомотопічним класом петлі $(g * \overline{h}) * \overline{f}$, теж належить до H (зауважимо, що ця петля, взагалі кажучи, не є оберненою до попередньої – тут ми працюємо саме з гомотопічними класами, неявно використовуючи лему 3.2 про асоціативність). Отже, $[g * \overline{h}] = [f]$, де $\overline{h} \in C(I, U)$ і $\overline{h}(0) = h(1) = g(1)$. Таким чином, $[f] \in U_{[g]}$. Крім того,

$$U_{[g]} = \{[g * k] \mid k \in C(I, U) \colon k(0) = g(1)\} =$$

$$= \{[f * (h * k)] \mid k \in C(I, U) \colon k(0) = g(1)\} \subset U_{[f]},$$

де рівність $[g * k] = [(f * h) * k] = [f * (h * k)]$ випливає з того, що $g \sim f * h$, леми 3.2 і зауваженої вище еквівалентності гомотопних шляхів (як саме?), а включення – з того, що для кожного такого шляху k добуток $h * k \in C(I, U)$ і $h * k(0) = h(0) = f(1)$. Оскільки $[f] \in U_{[g]}$, так само маємо $U_{[f]} \subset U_{[g]}$. Таким чином, $U_{[f]} = U_{[g]}$. Це означає, що для фіксованої U будь-які дві множини $U_{[f]}$ і $U_{[g]}$ або не перетинаються, або збігаються. Дійсно, якщо вони мають якусь спільну точку $[l]$, то за доведеним маємо $U_{[f]} = U_{[l]} = U_{[g]}$. Якщо ж $[l]$ є спільною точкою $U_{[f]}$ і $V_{[g]}$ для деяких вікритих $U, V \subset Y$, $[f] \in p^{-1}(U)$ та $[g] \in p^{-1}(V)$, то за побудовою цих множин $p([l]) = l(1) \in U \cap V$ (чому?), тому за показаним вище

$$[l] \in (U \cap V)_{[l]} \subset U_{[l]} \cap V_{[l]} = U_{[f]} \cap V_{[g]}.$$

Це разом зі сказаним вище про покриття означає, що сукупність $\mathcal{B}$ підмножин $U_{[f]} \subset X$ для усіх відкритих $U \subset Y$ та $[f] \in p^{-1}(U)$ задовольняє критерію бази, отже на X існує єдина топологія з базою $\mathcal{B}$. Нагадаємо, що відкритими підмножинами у цій топології є усі можливі об'єднання елементів $\mathcal{B}$. Зокрема, для кожного класу $[f] \in p^{-1}(U)$ множина $U_{[f]}$ є відкритим околом $[f]$. Для будь-якої відкритої $U \subset Y$ таким чином $p^{-1}(U) \subset \bigcup_{[f] \in p^{-1}(U)} U_{[f]}$. І навпаки, для будь-якої $[g] \in \bigcup_{[f] \in p^{-1}(U)} U_{[f]}$ існує $[f] \in p^{-1}(U)$ такий, що $[g] \in U_{[f]}$, тобто, як бачили вище, $g \sim f * h$, де $h \in C(I, U)$. Тоді $p([g]) = g(1) = f * h(1) = h(1) \in U$. Це означає, що

$\bigcup\limits_{[f]\in p^{-1}(U)} U_{[f]} \subset p^{-1}(U)$, отже $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{[f]\in p^{-1}(U)} U_{[f]}$. Оскільки ця множина відкрита за побудовою топології, звідси випливає, що відображення p неперервне.

Тепер покажемо, що (X, Y, p) є накриттям. Для довільної точки $z \in Y$ нехай $U \ni z$ – відкритий окіл з означення напівлокальної однозв'язності простору Y. Оскільки цей простір також локально лінійно зв'язний, існує відкрита лінійно зв'язна множина V така, що $z \in V \subset U$. Як було встановлено вище, $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{[f]\in p^{-1}(V)} V_{[f]}$, де відкриті множини $V_{[f]}$ або не перетинаються, або збігаються. Об'єднаємо ті з них, що збігаються, представивши цей прообраз у вигляді $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_{[f_\alpha]}$ для деякої підмножини класів $\{[f_\alpha]\}_{\alpha\in A} \subset p^{-1}(V)$ так, що $V_{[f_\alpha]} \cap V_{[f_\beta]} = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Таким чином, це диз'юнктне об'єднання відкритих множин, і щоб показати, що V є правильно накритим околом, а $V_{[f_\alpha]}$ – правильно його накриваючими, залишилось показати, що обмеження p на кожну з цих множин є гомеоморфізмом на V.

Отже, розглянемо довільний індекс $\alpha \in A$ і обмеження $p\colon V_{[f_\alpha]} \to V$. Для кожної точки $w \in V$ в силу лінійної зв'язності цього околу існує шлях $h \in C(I, V)$, що з'єднує z і w. Оскільки $f_\alpha(1) = p([f_\alpha]) = z$, визначений шлях $f_\alpha * h$, його клас еквівалентності $[f_\alpha * h]$ належить до $V_{[f_\alpha]}$ за означенням цієї множини, і $p([f_\alpha * h]) = f_\alpha * h(1) = h(1) = w$. Отже, обмеження p є сюр'єкцією. Нехай тепер образи двох елементів $V_{[f_\alpha]}$, що за означенням мають вигляд $[f_\alpha * h]$ і $[f_\alpha * k]$, де $h, k \in C(I, V)$ такі, що $h(0) = k(0) = f_\alpha(1) = z$, рівні:

$$h(1) = f_\alpha * h(1) = p([f_\alpha * h]) = p([f_\alpha * k]) = f_\alpha * k(1) = k(1).$$

Це означає, що визначена петля $h * \overline{k} \in C(I, V) \subset C(I, U)$ у точці z. За властивістю U, ця петля гомотопна e_z в Y, тоді за лемами 3.1–3.4 маємо

$$(f_\alpha * h) * \overline{(f_\alpha * k)} = (f_\alpha * h) * (\overline{k} * \overline{f_\alpha}) \sim f_\alpha * (h * \overline{k}) * \overline{f_\alpha} \sim f_\alpha * e_z * \overline{f_\alpha} \sim f_\alpha * \overline{f_\alpha} \sim e_y,$$

де $\sim$ знову позначає гомотопність петель. Оскільки гомотопічний клас постійної петлі e_y належить до H, це означає, що $[f_\alpha * h] = [f_\alpha * k]$, що демонструє ін'єктивність обмеження $p\colon V_{[f_\alpha]} \to V$. Його неперервність випливає з неперервності p, але можна перевірити її й безпосередньо. Дійсно, прообраз будь-якої відкритої підмножини $W \subset V$ має вигляд $p^{-1}(W) = \bigcup\limits_{[g]\in p^{-1}(W)} W_{[g]}$, причому $W_{[g]} \subset V_{[g]}$ для кожного $[g] \in p^{-1}(W) \subset p^{-1}(V)$, як було показано вище. Тому в силу диз'юнктності об'єднання $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_{[f_\alpha]}$ перетин $p^{-1}(W) \cap V_{[f_\alpha]} = W_{[g]} \subset V_{[g]} = V_{[f_\alpha]}$ для деякого

$[g] \in p^{-1}(W) \cap V_{[f_\alpha]}$ (де остання рівність випливає з $[g] \in V_{[f_\alpha]}$ за доведеним вище). Оскільки $W_{[g]}$ є відкритою підмножиною у топології X, а отже й у індукованій топології $V_{[f_\alpha]}$, це доводить неперервність обмеження p. Нарешті, розглянемо довільну відкриту підмножину $V_{[f_\alpha]}$ (в індукованій топології цієї відкритої підмножини, а отже й у X), що за побудовою топології є об'єднанням елементів бази $\mathcal{B}$, тобто множин вигляду $W_{[g]} \subset V_{[f_\alpha]}$ для деяких відкритих $W \subset Y$ та класів $[g] \in p^{-1}(W)$. Щоб показати відкритість образу такого об'єднання під дією p (а отже й відкритість $p\colon V_{[f_\alpha]} \to V$), достатньо показати, що образ будь-якої такої підмножини $p(W_{[g]}) \subset V$ відкритий. За нашими означеннями,

$$p(W_{[g]}) = \{p([g * h]) = g * h(1) \mid h \in C(I, W)\colon h(0) = g(1)\} =$$

$$= \{h(1) \mid h \in C(I, W)\colon h(0) = g(1)\} \subset W.$$

Для будь-якої точки $w \in p(W_{[g]})$ в силу локальної лінійної зв'язності Y існує відкрита лінійно зв'язна $\widehat{W}$ така, що $w \in \widehat{W} \subset W$. Згідно з описом вище, w є кінцем деякого шляху $h \in C(I, W)$ з початком у $g(1)$. У свою чергу, w можна з'єднати з будь-якою точкою $\widehat{W}$ шляхом, що лежить у $\widehat{W} \subset W$ за лінійною зв'язністю цієї множини. Множачи ці шляхи, ми отримуємо шлях, що з'єднує $g(1)$ та довільну точку $\widehat{W}$ і лежить у W. Це означає, що $\widehat{W} \subset p(W_{[g]})$. Оскільки кожна точка входить у $p(W_{[g]})$ з деяким відкритим околом, ця множина відкрита. Це завершує доведення відкритості $p\colon V_{[f_\alpha]} \to V$. Зауважимо, що ми ніде не використали включення $W_{[g]} \subset V_{[f_\alpha]}$ і довели насправді відкритість відображення $p\colon X \to Y$, з якої, звичайно, випливає відкритість обмеження. Таким чином, доведена гомеоморфність $p\colon V_{[f_\alpha]} \to V$, а отже й те, що (X, Y, p) – накриття.

Щоб показати лінійну зв'язність простору X, нам потрібно навчитися будувати шляхи в ньому, зокрема підняття шляхів простору Y. Нехай $f \in C(I, Y)$ – шлях з початком в y. Для кожного $s \in I$ покладемо $f_s\colon I \to Y\colon t \mapsto f(st)$, тобто f_s – проміжний шлях (вільної) гомотопії $(t, s) \mapsto f(st)$ між e_y і f. Зокрема, $f_s \in C(I, Y)$ – шлях, що з'єднує $f(0) = y$ і $f(s)$. Тоді визначимо $\widetilde{f}\colon I \to X\colon s \mapsto [f_s]$. Це відображення неперервне, тобто є шляхом у просторі X. Дійсно, щоб це показати, достатньо перевірити його неперервність у довільній точці $s_0 \in I$, розглядаючи в якості відкритих околів $\widetilde{f}(s_0)$ елементи бази $\mathcal{B}$. Якщо $U_{[g]}$ – такий окіл, тобто $[f_{s_0}] = \widetilde{f}(s_0) \in U_{[g]}$, то за показаним вище $U_{[g]} = U_{[f_{s_0}]}$. При цьому, зокрема, $f(s_0) = f_{s_0}(1) \in U$. Тоді, оскільки f неперервне, а U відкрита, існує $\delta > 0$ таке, що $f(s) \in U$ для усіх $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Оскільки для будь-якого такого s образ відрізка $[s_0, s]$ (або $[s, s_0]$) під дією f лежить в U, визначений шлях $h\colon I \to U\colon t \mapsto f((1-t)s_0 + ts)$

в U, що з'єднує точки $f(s_0)$ і $f(s)$. При цьому шлях f_s гомотопний добутку $f_{s_0} * h$ (покажіть це), тому $\widetilde{f}(s) = [f_s] = [f_{s_0} * h] \in U_{[f_{s_0}]}$. Отже, $\widetilde{f}((s_0 - \delta, s_0 + \delta)) \subset U_{[f_{s_0}]} = U_{[g]}$, що й дає потрібну неперервність. Побудований таким чином шлях $\widetilde{f}$ має початок у $\widetilde{f}(0) = [f_0] = [e_y] = x$ та кінець у $\widetilde{f}(1) = [f_1] = [f]$. Крім того, $p(\widetilde{f}(s)) = p([f_s]) = f_s(1) = f(s)$ для кожного $s \in I$, тобто $p \circ \widetilde{f} = f$. Це означає, що $\widetilde{f}$ – підняття шляху f у накриваючий простір X з початком у x (єдине за лемою 8.1). З цієї конструкції відразу випливає лінійна зв'язність X: для будь-якого $[f] \in X$ (і будь-якого $f \in [f]$) шлях $\widetilde{f}$ з'єднує x і $[f]$, а отже й будь-які два класи з X можна поєднати шляхом.

Залишилося перевірити умову на образ фундаментальної групи X у точці x. Будь-яка петля $\widetilde{f}$ у x є підняттям петлі $f := p \circ \widetilde{f}$ простору Y у $p(x) = y$ з початком у x, а отже повинна мати описаний вище вигляд, зокрема, закінчуватися у $[f]$. З іншого боку, оскільки це петля, вона закінчується в $x = [e_y]$. Отже, $[f] = [e_y]$, що означає належність гомотопічного класу петлі $f * \overline{e_y}$, тобто f, підгрупі H. Але цей клас є образом гомотопічного класу $\widetilde{f}$ під дією p_*, бо $p \circ \widetilde{f} = f$. Таким чином, $p_*(\pi_1(X, x)) \subset H$. І навпаки, якщо гомотопічний клас петлі f у точці y належить до H, то, як пояснено вище, $[f] = [e_y] = x$. Тоді підняття $\widetilde{f}$ петлі f у простір X з початком у x має описаний вище вигляд і тому закінчується у $[f] = x$, тобто є петлею у x. Згідно з пунктом 2. твердження 9.1, це означає, що гомотопічний клас f належить до $p_*(\pi_1(X, x))$. Тобто ми показали, що $H \subset p_*(\pi_1(X, x))$, а отже $p_*(\pi_1(X, x)) = H$. Це закінчує доведення теореми.

■

Зауваження. В умовах теореми накриваючий простір X є локально лінійно зв'язним за твердженням 10.1 і напівлокально однозв'язним за твердженням 12.3. Тому, якщо підгрупа $H = p_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(Y, y)$ нормальна, то накриття (X, Y, p) регулярне за теоремою 11.1, а отже факторгрупа $\pi_1(Y, y)/H$ ізоморфна групі автоморфізмів (X, Y, p) за наслідком 11.3. Відмітимо також, що H ізоморфна $\pi_1(X, x)$ за пунктом 1. твердження 9.1 і зауваженням після його формулювання. При цьому тривіальній підгрупі H відповідають універсальні накриття (див. також наслідок 12.2 нижче). Зауважимо, що для цього випадку простір X у доведенні попередньої теореми будується з гомотопічних класів шляхів Y з початком у точці y (чому?). Підгрупу $p_*(\pi_1(X, x))$ інколи називають *групою накриття з відміченою точкою*, бо, як демонструє попередня теорема, такі підгрупи знаходяться у бієктивній відповідності з класами ізоморфності накрить з відміченою точкою. Якщо ж розглядати накриття без відміченої точки і "звичайну" ізоморфність із означення 10.1, то замість підгруп треба розглядати класи спряженості підгруп, як демонструє наступна вправа (див. також [7, с. 191-192, 200] і [16, с. 91-92]). Втім, для нормальних підгруп (зокрема тривіальної), а отже для регулярних накрить, цей клас представлений однією підгрупою.

Вправа 12.4. Два накриття (X, Y, p) і (Z, Y, q), де простори X, Y і Z лінійно зв'язні та локально лінійно зв'язні, ізоморфні тоді й тільки тоді, коли існують такі точки $x \in X$ та $z \in Z$, що $p(x) = q(z) = y \in Y$ та підгрупи $p_*(\pi_1(X, x))$ і $q_*(\pi_1(Z, z))$ спряжені у $\pi_1(Y, y)$ (пор. з лемою 11.1).

Вправа 12.5. Використавши теорему 12.1 (а також попередні зауваження і вправу), описати з точністю до ізоморфізма всі накриття кола S^1 з лінійно зв'язними накриваючими просторами. Для цього буде потрібно описати усі підгрупи її фундаментальної групи, що, втім, не дуже складно; див. обговорення у прикладі 11.5.

Наслідок 12.2. *У лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного топологічного простору існує універсальне накриття тоді й тільки тоді, коли він напівлокально однозв'язний. Якщо таке накриття існує, то воно єдине з точністю до ізоморфізма і регулярне, а фундаментальна група простору в кожній точці ізоморфна групі автоморфізмів цього накриття.*

Доведення. Нехай Y – даний топологічний простір. Необхідність випливає з наслідку 12.1, а достатність – з теореми 12.1, якщо її застосувати до тривіальної підгрупи $H = \{[e_y]\}$ (взявши будь-яку $y \in Y$). Оскільки для накриття (X, Y, p), що існує за цією теоремою, X лінійно зв'язний, а група $\pi_1(X, x) \simeq p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\}$ тривіальна для деякої точки $x \in p^{-1}(y)$, X однозв'язний, а отже накриття універсальне. Для будь-яких двох таких накрить (X, Y, p) і (Z, Y, q), обравши довільним чином $x \in p^{-1}(y)$ і $z \in q^{-1}(y)$, маємо $p_*(\pi_1(X, x)) = \{[e_y]\} = q_*(\pi_1(Z, z))$, отже за теоремою 12.1 існує ізоморфізм цих накрить, що однозначно визначений точками x і z (або просто використаємо наслідок 10.2). Нарешті, регулярність цього накриття випливає з теореми 11.1, а твердження про фундаментальну групу – з наслідку 11.3.

■

Приклад 12.5. Будь-який многовид M (насправді будь-який локально евклідовий простір) є локально лінійно зв'язним за пунктом 5. твердження 29.2 курсу топології та напівлокально однозв'язним, як показано у прикладі 12.2. Тому лінійно зв'язні многовиди задовольняють умові теореми 12.1 і мають єдині з точністю до ізоморфізма накриття з відміченими точками для кожної $y \in M$ і $H \subset \pi_1(Y, y)$, зокрема універсальні, як у попередньому наслідку. Такі накриття ми бачили, зокрема, у прикладах 7.4, 7.5 і 7.7 (див. також обговорення у прикладі 11.3). Помітимо, що у цих прикладах, як і у накриттях, які ви повинні отримати, розв'язавши вправу 12.5, накриваючі простори теж є многовидами. Виявляється, що це завжди так: лінійно зв'язний накриваючий простір будь-якого многовида – це многовид тієї ж вимірності. Продемонструємо це, почавши з наступного аналога тверджень 10.1 і 12.3.

Твердження 12.4. *Накриваючий простір X накриття (X, Y, p) є локально евклідовим тоді й тільки тоді, коли такою є база Y. Таким чином, якщо $(\widetilde{M}, M, p)$ – накриття, база M (відповідно, накриваючий простір $\widetilde{M}$) є многовидом, а простір $\widetilde{M}$ (відповідно, M) хаусдорфовий і задовольняє другій аксіомі зліченності, то він теж є многовидом. При цьому $\dim \widetilde{M} = \dim M$ і для кожної точки $x \in \widetilde{M}$ існують карти (U, φ) і (V, ψ) многовидів $\widetilde{M}$ і M відповідно такі, що $x \in U$, $p(U) = V$ і $\psi \circ p \circ \varphi^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$, тобто відображення накриття p локально в околі кожної точки задається рівністю координат.*

Доведення. У першому з цих тверджень перевіримо достатність, яка нам знадобиться далі. Необхідність перевіряється аналогічним чином (зробіть це). Ідея полягає в тому, що, оскільки відображення p є локальним гомеоморфізмом (див. приклад 11.2), воно зберігає локальні властивості, зокрема локальну евклідовість (це відноситься також до доведень тверджень 10.1 і 12.3).

Дійсно, нехай Y локально евклідовий, а $x \in X$ – довільна точка. У точки $y \coloneqq p(x)$ існує правильно накритий відкритий окіл $U \ni y$: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, де U_α правильно накривають U. Нехай $W \ni y$ – відкритий окіл з означення локальної евклідовості, тобто існує гомеоморфізм (відносно індукованої топології W) $\chi \colon W \to \mathbb{R}^n$ для деякого (фіксованого для Y) $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді $U \cap W$ є відкритим околом y в Y і в індукованій топології W, тому $\chi(U \cap W)$ – відкритий окіл $\chi(y)$ у $\mathbb{R}^n$. Оскільки топологія $\mathbb{R}^n$ метрична, існує таке $\varepsilon > 0$, що відкрита евклідова куля $B_\varepsilon(\chi(y))$ міститься у $\chi(U \cap W)$. Покладемо $V \coloneqq \chi^{-1}(B_\varepsilon(\chi(y))) \ni y$. За побудовою $V \subset U \cap W$ і, оскільки χ – гомеоморфізм, це відкритий окіл y у індукованій топології відкритої W, а отже й у Y та в індукованій топології U. Нехай $\omega \colon B_\varepsilon(\chi(y)) \to \mathbb{R}^n$ – який-небудь гомеоморфізм (наведіть приклад; див. вправу 14.2 курсу топології). Тоді й $\psi \coloneqq \omega \circ \chi|_V \colon V \to \mathbb{R}^n$ – гомеоморфізм як композиція гомеоморфізмів. Тут ми фактично показали, що U є локально евклідовим простором, як і кожна відкрита підмножина локально евклідового простору.

Тепер нехай індекс $\alpha \in A$ такий, що $x \in U_\alpha$. Тоді в силу гомеоморфності $p|_{U_\alpha}$ прообраз $(p|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ є відкритим околом x у індукованій топології відкритої U_α, а отже й у X, а $\varphi \coloneqq \psi \circ p|_{(p|_{U_\alpha})^{-1}(V)} \colon (p_{U|_\alpha})^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n$ є гомеоморфізмом як композиція гомеоморфізмів. Це доводить локальну евклідовість X, а також демонструє справедливість решти тверджень з умови для цього випадку: якщо $Y = M$ – многовид, тобто локально евклідовий, хаусдорфовий і задовольняє другій аксіомі зліченності, а $X = \widetilde{M}$ задовольняє двом останнім з цих трьох властивостей, то й $\widetilde{M}$ – многовид, n – спільна вимірність M і $\widetilde{M}$, а $((p|_{U_\alpha})^{-1}(V), \varphi)$ та (V, ψ) – карти цих многовидів, що задовольняють умові.

■

Зауваження. Спостереження щодо локального задання p рівністю координат у цьому твердженні корисне, зокрема, якщо побудувати з таких карт, як у доведенні, атласи M і $\widetilde{M}$, що задають на них структури *гладких многовидів* (див., наприклад, [11, с. 36-40]). Тоді p буде *локальним дифеоморфізмом* у околі кожної точки $\widetilde{M}$.

Твердження 12.5. *Якщо база Y накриття (X, Y, p) хаусдорфова, то таким є й накриваючий простір X.*

Доведення. Нехай $x, z \in X$ та $x \neq z$. Якщо при цьому $p(x) \neq p(z)$, то в силу хаусдорфовості Y існують $V \ni p(x)$ та $W \ni p(z)$ – відкриті й такі, що $V \cap W = \varnothing$. Тоді, оскільки p неперервне, $p^{-1}(V) \ni x$ та $p^{-1}(W) \ni z$ відкриті й $p^{-1}(V) \cap p^{-1}(W) = \varnothing$. Якщо ж $p(x) = p(z)$, то нехай $U \ni p(x)$ – правильно накритий відкритий окіл: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, де відкриті U_α правильно накривають U, а індекси $\alpha, \beta \in A$ такі, що $x \in U_\alpha$, $z \in U_\beta$. Тоді $\alpha \neq \beta$, бо обмеження p на кожну з множин U_α є, зокрема, ін'єктивним, а отже $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$. Разом це й демонструє хаусдорфовість X.

■

Вправа 12.6. Чи вірне твердження, що обернене до попереднього, тобто чи випливає з хаусдорфовості накриваючого простору хаусдорфовість бази накриття?

Твердження 12.6. *Нехай база Y накриття (X, Y, p) задовольняє другій аксіомі зліченності. Тоді його накриваючий простір X задовольняє цій аксіомі тоді й тільки тоді, коли усі шари цього накриття не більш ніж зліченні.*

Доведення. $\underline{\Rightarrow}$ Припустимо, що у накриття існує незліченний шар $p^{-1}(y)$ для деякої точки $y \in Y$. Нехай $U \ni y$ – її правильно накритий відкритий окіл: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ як у означенні накриття. При цьому індексна множина A рівнопотужна шару $p^{-1}(y)$, а отже незліченна (покажіть це; див. також вправу 7.2). Якщо X задовольняє другій аксіомі зліченності, то їй задовольняє й $p^{-1}(U)$ з індукованою топологією. Але в силу диз'юнктності $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – незліченне відкрите покриття $p^{-1}(U)$, у якого не існує нетривіального, зокрема не більш ніж зліченного, підпокриття. Це суперечить теоремі Ліндельофа, звідки й маємо необхідність.

$\underline{\Leftarrow}$ Нехай тепер Y задовольняє другій аксіомі зліченності та відомо, що усі шари накриття не більш ніж зліченні. Нехай $\mathcal{C}$ – не більш ніж зліченна база Y, а $\widehat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ – підсистема усіх правильно накритих елементів цієї бази, що теж є не більш ніж зліченною базою Y. Дійсно, для будь-якої точки $y \in Y$ та відкритої $U \ni y$ існує відкритий правильно накритий окіл $\widehat{U} \ni y$. Оскільки $U \cap \widehat{U}$ теж тоді є відкритим околом y, існує $V \in \mathcal{C}$ така, що $y \in V \subset U \cap \widehat{U}$. Тоді $V \subset \widehat{U}$ правильно накрита, тобто $V \in \widehat{\mathcal{C}}$, в силу зауваження після означення 7.1, і $y \in V \subset U$, тому $\widehat{\mathcal{C}}$ – база. Таким чином, прообраз кожної $V \in \mathcal{C}$ має вигляд $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha \in A_V} V_\alpha$, де V_α правильно накривають V, а індексна множина A_V не більш ніж зліченна за умовою (див. доведення необхідності). Тоді не більш ніж зліченна за побудовою система відкритих множин

$$\mathcal{B} := \left\{ V_\alpha \;\middle|\; V \in \widehat{\mathcal{C}},\ \alpha \in A_V \right\}$$

є базою X. Дійсно, для кожної відкритої $W \subset X$ та будь-якої точки $x \in W$ існує відкрита правильно накриваюча $\widehat{W} \ni x$. Оскільки $p|_{\widehat{W}} : \widehat{W} \to p(\widehat{W})$ – гомеоморфізм (де $p(\widehat{W})$ – відкритий правильно накритий окіл точки $p(x)$), а $W \cap \widehat{W}$ – відкритий окіл x, зокрема, у індукованій топології множини $\widehat{W}$, образ $p(W \cap \widehat{W})$ є відкритим околом $p(x)$ у індукованій топології відкритої $p(\widehat{W})$, а отже в Y. Тоді за показаним вище існує $V \in \widehat{\mathcal{C}}$ така, що $p(x) \in V \subset p(W \cap \widehat{W}) \subset p(\widehat{W})$. Нехай $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha \in A_V} V_\alpha$ і $\alpha \in A_V$ такий, що $x \in V_\alpha$. Оскільки $\widehat{W}$ правильно накриває $p(\widehat{W})$, тоді

$$V_\alpha = (p|_{\widehat{W}})^{-1}(V) = p^{-1}(V) \cap \widehat{W} \subset p^{-1}(p(W \cap \widehat{W})) \cap \widehat{W} = W \cap \widehat{W} \subset W,$$

бо обмеження $p|_{\widehat{W}}$ є, зокрема, ін'єктивним. Отже, $x \in V_\alpha \subset W$ і $V_\alpha \in \mathcal{B}$, що й демонструє, що $\mathcal{B}$ – база, і завершує доведення достатності.

■

Вправа 12.7. Чи випливає з виконання другої аксіомі зліченності для накриваючого простору її виконання для бази накриття (можливо, теж за якихось додаткових умов)?

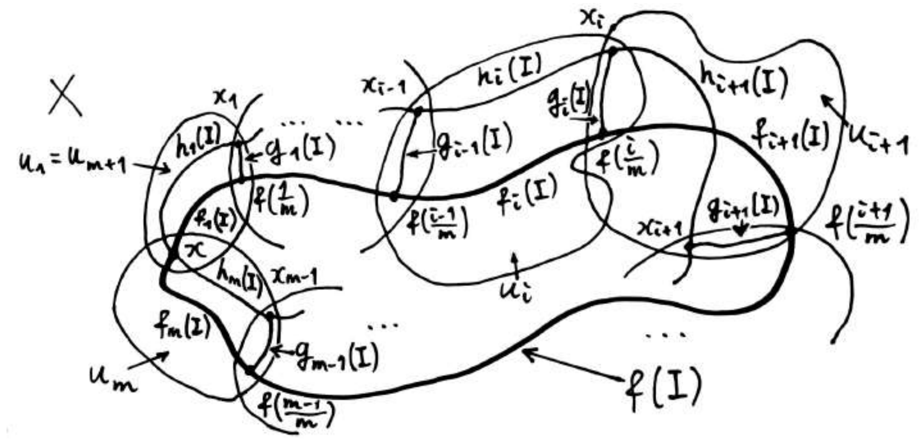
Твердження 12.7. *Фундаментальні групи будь-якого локально лінійно зв'язного та напівлокально однозв'язного топологічного простору, що задовольняє другій аксіомі зліченності, не більш ніж зліченні.*

Доведення. Нехай простір X задовольняє умові. В силу його напівлокальної однозв'язності, у кожної точки $x \in X$ існує такий відкритий окіл $V \ni x$, що будь-яка петля в x підпростору V гомотопна постійній у X. Тоді в силу локальної лінійної зв'язності X існує лінійно зв'язний відкритий окіл $U \ni x$, що міститься у V. Зокрема, будь-яка петля в x підпростору $U \subset V$ гомотопна постійній у X. Оскільки U лінійно зв'язний, це ж вірно і для петель у будь-якій його точці. Щоб це показати, можна повторити конструкцію з твердження 4.1 (зробіть це). Більш того, якщо повторити доведення твердження 6.1 для шляхів у підпросторі U, допускаючи гомотопії зі значеннями у X, можна показати, що будь-які два шляхи в U зі спільними початком та кінцем гомотопні як шляхи в X (перевірте це). За побудовою, множини U з такими властивостями утворюють відкрите покриття X. У нього за другою аксіомою зліченності та теоремою Ліндельофа існує не більш ніж зліченне підпокриття $\mathcal{U}$. Нехай $U, V \in \mathcal{U}$ мають непорожній перетин $U \cap V$. Він задовольняє другій аксіомі зліченності як підпростір X, а його компоненти лінійної зв'язності відкриті в силу локальної лінійної зв'язності: оскільки у кожної точки кожної такої компоненти існує лінійно зв'язний відкритий окіл у X, він повинен повністю міститися у цій компоненті. Тому компоненти лінійної зв'язності утворюють відкрите покриття $U \cap V$, яке є диз'юнктним і тому не має нетривіальних підпокрить. Тоді воно не більш ніж зліченне за теоремою Ліндельофа. У кожній компоненті лінійної зв'язності $U \cap V$ для кожної пари $U, V \in \mathcal{U}$ з $U \cap V \neq \varnothing$ (вони можуть бути й однаковими) оберемо і фіксуємо якусь точку. З міркувань вище випливає, що множина усіх таких точок $\mathcal{X}$ не більш ніж зліченна. Крім того, для будь-яких $x, y \in \mathcal{X}$, що містяться у одній і тій же $U \in \mathcal{U}$, оберемо і фіксуємо якийсь шлях $h \in C(I, U)$, що їх з'єднує. Він існує в силу лінійної зв'язності U. Множина усіх таких шляхів $\mathcal{H}$ теж не більш ніж зліченна, оскільки такою є множина $\mathcal{X}$.

Оскільки у кожній компоненті лінійної зв'язності X є принаймні одна точка з $\mathcal{X}$ (чому?), в силу твердження 4.1 достатньо перевірити, що група $\pi_1(X, x)$ не більш ніж зліченна, для випадку $x \in \mathcal{X}$. Нехай $f \in C(I, X)$ – якась петля у x, тобто $f(0) = f(1) = x$. Застосуємо до відкритого за неперервністю f покриття $f^{-1}(\mathcal{U})$ компактного метричного простору I лему Лебега, знайдемо якесь його число Лебега $\delta > 0$ і оберемо натуральне m таке, що $\frac{1}{m} < \delta$. Тоді $f([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}])$ міститься у деякому елементі $U_i \in \mathcal{U}$ для будь-якого $i = \overline{1, m}$ (вони можуть і повторюватися, тобто $U_i = U_{i+1}$), а отже $f(\frac{i}{m}) \in U_i \cap U_{i+1}$ для $i = \overline{1, m-1}$. При цьому $x = f(0) = f(1) \in U_m \cap U_1$ за побудовою, тому далі U_{m+1} позначатиме U_1. Для кожного $i = \overline{1, m}$ існує точка $x_i \in \mathcal{X}$, що міститься у тій же компоненті лінійної зв'язності $U_i \cap U_{i+1}$, що й $f(\frac{i}{m})$ (зокрема, $x_m = x$ і позначимо також $x_0 = x$). Тоді в силу лінійної зв'язності існує шлях g_i у цій компоненті, що з'єднує $f(\frac{i}{m})$ та x_i (зокрема, $g_m = e_x$ і позначимо $g_0 = e_x$). Крім того, оскільки $x_{i-1}, x_i \in U_i$, існує шлях $h_i \in \mathcal{H}$ в U_i, що їх з'єднує. Таким чином, добуток $(g_{i-1} * h_i) * \overline{g_i} \in C(I, U_i)$ з'єднує $f(\frac{i-1}{m})$ з $f(\frac{i}{m})$. Якщо позначити через

$$f_i \colon I \to U_i \colon t \mapsto f\left((1-t)\,\frac{i-1}{m} + t\,\frac{i}{m}\right)$$

шлях в U_i, що є перепараметризацією обмеження $f|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$, то він теж з'єднує $f(\frac{i-1}{m})$ з $f(\frac{i}{m})$, а отже гомотопний шляху $(g_{i-1} * h_i) * \overline{g_i}$ (в X) за властивістю U_i. Уявлення про ці шляхи дає наступна ілюстрація:



Отже, за лемами 3.1–3.4 маємо гомотопії

$$f \sim f_1 * f_2 * \ldots * f_m \sim g_0 * h_1 * \overline{g_1} * g_1 * h_2 * \overline{g_2} * g_2 * \ldots * \overline{g_{m-1}} * g_{m-1} * h_m * \overline{g_m} \sim$$

$$\sim e_x * h_1 * e_{x_1} * h_2 * e_{x_2} * \ldots * e_{x_{m-1}} * h_m * e_x \sim h_1 * h_2 * \ldots * h_m,$$

тобто $[f] = [h_1 * \ldots * h_m]$ у $\pi_1(X, x)$. Але добутків шляхів $h_i \in \mathcal{H}$, і тим більше їх гомотопічних класів, не більш ніж зліченна кількість, бо $\mathcal{H}$ не більш ніж зліченна. Це й демонструє потрібне.

■

Зауваження. Суттєвість умови напівлокальної однозв'язності для цього твердження демонструє гавайська сережка з прикладу 12.3: виявляється, що фундаментальні групи цього локально лінійно зв'язного простору, що задовольняє другій аксіомі зліченності як підпростір $\mathbb{R}^2$, незліченні (див. обговорення після вправи 13.2).

Наслідок 12.3. *Фундаментальні групи будь-якого многовида не більш ніж зліченні.*

Доведення. Дійсно, з обговорення у прикладі 12.5 та означення многовида випливає, що він має усі необхідні для попереднього твердження властивості.

∎

Приклад 12.6. Хоча букети кіл $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$ і не є многовидами, вони також задовольняють умовам твердження 12.7. Дійсно, вони локально лінійно зв'язні, напівлокально однозв'язні (хоча б за наслідком 12.1, оскільки мають універсальні накриття за природним узагальненням побудови з прикладу 9.5; втім, це нескладно перевірити й безпосередньо) та задовольняють другій аксіомі зліченності, оскільки вкладаються у $\mathbb{R}^2$. І справді, їх фундаментальними групами згідно з вправою 9.2 є вільні групи з n твірними, що є зліченними (чому?).

Наслідок 12.4. *Нехай (X, Y, p) – накриття, де простори X та Y лінійно зв'язні, локально лінійно зв'язні та напівлокально однозв'язні. Якщо до того ж база Y цього накриття (X, Y, p) задовольняє другій аксіомі зліченності, то і його накриваючий простір X задовольняє цій аксіомі.*

Доведення. Згідно з пунктом 1. теореми 9.1, шари (X, Y, p) (що усі рівнопотужні в силу лінійної зв'язності Y та вправи 7.3) знаходяться у бієктивній відповідності з множиною правих класів суміжності фундаментальної групи $\pi_1(Y, p(x))$ за підгрупою $p_*(\pi_1(X, x))$ для довільної $x \in X$. Потужність цієї факторомножини не більша (чому?) за потужність $\pi_1(Y, p(x))$, що не більш ніж злічення за твердженням 12.7. Тому X задовольняє другій аксіомі зліченності в силу твердження 12.6 та справедливості цієї аксіоми для Y.

∎

Зауваження. Тут суттєвими є локальна лінійна зв'язність та напівлокальна однозв'язність Y (і друга аксіома зліченності), а також лінійна зв'язність X, але ми, як завжди, записали ці властивості для обох просторів з міркувань симетрії та в силу тверджень 10.1 і 12.3. Зокрема, умова лінійної зв'язності X тут потрібна для використання теореми 9.1. Приклад 7.2 для незліченного дискретного шару F демонструє, що вона дійсно є суттєвою: добуток $X = Y \times F$ не задовольняє другій аксіомі зліченності для будь-якого Y і не є зв'язним, зокрема лінійно (чому?).

Зауваження. Згадаємо також, що для многовида (і для будь-якої його відкритої підмножини) лінійна зв'язність еквівалентна зв'язності в силу його локальної лінійної зв'язності та теореми 27.1 курсу топології.

Наслідок 12.5. *Нехай M – (лінійно) зв'язний многовид. Тоді для будь-яких точки $y \in M$ та підгрупи $H \subset \pi_1(M, y)$ існує єдине з точністю до ізоморфізма накриття $(\widetilde{M}, M, p)$ таке, що $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, x)) = H$ для деякої точки $x \in \widetilde{M}$ (зокрема, універсальне для $H = \{e_y\}$), а $\widetilde{M}$ є (лінійно) зв'язним многовидом тієї ж вимірності.*

Доведення. Дійсно, як було показано у прикладі 12.5, M локально лінійно зв'язний та напівлокально однозв'язний, тобто задовольняє умовам теореми 12.1. З неї випливає існування та єдиність накриття $(\widetilde{M}, M, p)$, для якого $p(x) = y$ і $p_*(\pi_1(\widetilde{M}, x)) = H$ (де у якості x можна обрати довільну точку з $p^{-1}(y)$), а простір $\widetilde{M}$ лінійно зв'язний (і локально лінійно зв'язний та напівлокально однозв'язний за твердженнями 10.1 і 12.3). Тоді він також локально евклідовий за твердженням 12.4, хаусдорфовий за твердженням 12.5 і задовольняє другій аксіомі зліченності за наслідком 12.4, а отже є многовидом. З урахуванням рівності вимірностей з твердження 12.4 отримаємо потрібне.

■

Зауваження. Зокрема, усі накриваючі многовиди таких накрить для фіксованої підгрупи H (у т. ч. універсальних) гомеоморфні в силу ізоморфності накрить.

13 Теорема Зейферта – ван Кампена та фундаментальні групи поверхонь

У цьому розділі ми познайомимося ще з одним технічним засобом для обчислення фундаментальних груп – теоремою Зейферта – ван Кампена, яку наведемо лише з коротким поясненням ідеї доведення. Алгебраїчні конструкції, що нам для цього знадобляться, наведенні у доповненні (а саме означення A.10, приклади A.15–A.18 та твердження A.3).

Зауваження. Нехай X – топологічний простір, а $\{U, V\}$ – його відкрите покриття, тобто U і V відкриті та $X = U \cup V$. Будемо до того ж вимагати, щоб U і V були лінійно зв'язними, а перетин $U \cap V$ – лінійно зв'язним і непорожнім. Згідно з твердженням 26.1 курсу топології, звідси випливає, зокрема, що X лінійно зв'язний (які з перелічених умов для цього насправді потрібні?). В алгебраїчній топології часто в такій ситуації будують інваріанти простору X за інваріантами підпросторів U, V і $U \cap V$. Теорема Зейферта – ван Кампена буде нашим першим прикладом подібної конструкції.

Оберемо якусь точку $x \in U \cap V$. Розглянемо відображення включення $i_U \colon U \to X$, $i_V \colon V \to X$, $i_{UV} \colon U \cap V \to U$ та $i_{VU} \colon U \cap V \to V$. Індукуємо ними гомоморфізми фундаментальних груп $i_{U*} \colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$, $i_{V*} \colon \pi_1(V, x) \to \pi_1(X, x)$, $i_{UV*} \colon \pi_1(U \cap V, x) \to \pi_1(U, x)$ та $i_{VU*} \colon \pi_1(U \cap V, x) \to \pi_1(V, x)$ відповідно. Оскільки $i_U \circ i_{UV} = i_V \circ i_{VU}$, бо це просто відображення включення $U \cap V$ у X, з пункту <u>2.</u> твердження 5.1 випливає, що $i_{U*} \circ i_{UV*} = i_{V*} \circ i_{VU*}$, тобто діаграми з включень

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "i_U"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "i_{UV}"] \arrow[dr, "i_{VU}"'] & & U \cup V = X \\
 & V \arrow[ur, "i_V"'] &
\end{tikzcd}
$$

та відповідних гомоморфізмів

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x) \arrow[dr, "i_{U*}"] & \\
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[ur, "i_{UV*}"] \arrow[dr, "i_{VU*}"'] & & \pi_1(X, x) \\
 & \pi_1(V, x) \arrow[ur, "i_{V*}"'] &
\end{tikzcd}
$$

комутативні. У формулюванні наступної теореми ми припускаємо, що фундаментальні групи $\pi_1(U, x)$, $\pi_1(V, x)$ та $\pi_1(U \cap V, x)$ мають опис у термінах твірних та співвідношень, тобто ізоморфні відповідним групам класів еквівалентностей слів (див. означення A.10). Для спрощення позначень ми будемо їх ототожнювати і вважати i_{UV*} та i_{VU*} гомоморфізмами саме між такими групами. Тоді, скажімо, $i_{UV*}(c)$ для будь-якого $c \in \pi_1(U \cap V, x)$ має запис у термінах "алфавіта" $\pi_1(U, x)$, тобто твірних цієї групи та обернених до них, і аналогічно для i_{VU*}.

Теорема 13.1 (Зейферт – ван Кампен)**.** *Нехай $\{U, V\}$ – відкрите покриття топологічного простору X таке, що U і V лінійно зв'язні, а перетин $U \cap V$ лінійно зв'язний та непорожній. Нехай фундаментальні* *групи цих підпросторів у деякій точці $x \in U \cap V$ мають наступні описи у термінах твірних та співвідношень:*

$$\pi_1(U,x) = \langle a_1,\dots,a_n \mid r_1,\dots,r_m \rangle,$$

$$\pi_1(V,x) = \langle b_1,\dots,b_k \mid s_1,\dots,s_l \rangle,$$

$$\pi_1(U \cap V,x) = \langle c_1,\dots,c_p \mid t_1,\dots,t_o \rangle.$$

Тоді група $\pi_1(X,x)$ ізоморфна групі

$$\langle a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_k \mid r_1,\dots,r_m,s_1,\dots,s_l,$$

$$i_{UV*}(c_1)(i_{VU*}(c_1))^{-1},\dots,i_{UV*}(c_p)(i_{VU*}(c_p))^{-1}\rangle,$$

де гомоморфізми фундаментальних груп i_{UV*} та i_{VU*} індуковані включеннями $i_{UV}\colon U \cap V \to U$ та $i_{VU}\colon U \cap V \to V$ відповідно.

Доведення. Наведемо тут лише ідею доведення теореми. Спочатку розглянемо т. зв. *вільний добуток* груп $\pi_1(U,x)$ і $\pi_1(V,x)$, визначивши його наступним описом:

$$\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x) \coloneqq \langle a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_k \mid r_1,\dots,r_m,s_1,\dots,s_l \rangle.$$

Отже, елементами вільного добутку є класи еквівалентності слів з літер $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_k$ та обернених до них, де відношення еквівалентності та групова операція описані перед означенням A.10. При цьому еквівалентність тепер використовує співвідношення з обох вихідних груп. Побудуємо тепер відображення $\alpha\colon \pi_1(U,x) * \pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$ наступним чином: клас еквівалентності слова $W = d_1 \dots d_q$ переходить у добуток гомотопічних класів $\alpha(d_1)\dots\alpha(d_q)$, де

$$\alpha(d_i) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} i_{U*}(d_i), & d_i \in \pi_1(U,x); \\ i_{V*}(d_i), & d_i \in \pi_1(V,x). \end{array}\right.$$

для кожного $i = \overline{1,q}$. Тобто ми діємо на d_i гомоморфізмом i_{U*}, якщо це $a_j^{\pm 1}$ для деякого $j = \overline{1,n}$, і гомоморфізмом i_{V*}, якщо це $b_j^{\pm 1}$, де $j = \overline{1,k}$. Перевірте, що тоді α – коректно визначений гомоморфізм груп.

Виявляється, що α – сюр'єкція. Щоб це перевірити, достатньо показати, що будь-який гомотопічний клас петлі $[f] \in \pi_1(X,x)$ має вигляд $[f_1]\dots[f_q]$, де $[f_i] \in i_{U*}(\pi_1(U,x))$ або $[f_i] \in i_{V*}(\pi_1(V,x))$ для кожного $i = \overline{1,q}$ (чому?). Для цього, у свою чергу, достатньо довести, що будь-яка петля f простору X у точці x гомотопна добутку петель f_1, …, f_q, де носій кожної з f_i лежить в U або в V. Щоб це зробити, можна спочатку використати лему Лебега, розділивши f на відрізки, носій кожного з яких лежить в U або в V, а потім перетворити цей добуток відрізків на гомотопний добуток петель аналогічно до доведення твердження 12.7 вище, тільки тепер потрібно використати шляхи, які з'єднують x та кожну з проміжних точок, що існують в силу лінійної зв'язності U і V, та "спрягати" відрізки з цими шляхами, утворюючи петлі. Деталі відтворіть самостійно або див. у [7, с. 209-213] чи [16, с. 63].

Зауважимо, що для однозв'язних U і V (як у наслідку 13.1 далі) доведення завершиться на цьому кроці, бо група $\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)$ буде тривіальною, а отже й $\pi_1(X,x)$.

За зауваженням перед формулюванням теореми, $i_{U*} \circ i_{UV*}(c) = i_{V*} \circ i_{VU*}(c)$ для будь-якого $c \in \pi_1(U \cap V, x)$, тому в силу гомоморфності

$$\alpha\left(i_{UV*}(c)(i_{VU*}(c))^{-1}\right) = \alpha(i_{UV*}(c))\,\alpha(i_{VU*}(c))^{-1} =$$

$$= i_{U*}(i_{UV*}(c))\,(i_{V*}(i_{VU*}(c)))^{-1} = [e_x]$$

за побудовою α, бо $i_{UV*}(c) \in \pi_1(U,x)$, а $i_{VU*}(c) \in \pi_1(V,x)$. Таким чином, ядро гомоморфізма α містить усі елементи вигляду $i_{UV*}(c)(i_{VU*}(c))^{-1}$, зокрема співвідношення $i_{UV*}(c_j)(i_{VU*}(c_j))^{-1}$ для $j = \overline{1,p}$. Найскладнішим (але радше технічно) етапом доведення теореми є демонстрація "оберненого включення", точніше, того, що це ядро *породжене* співвідношеннями $i_{UV*}(c_j)(i_{VU*}(c_j))^{-1}$ для усіх j, тобто є найменшою за включенням нормальною підгрупою N групи $\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)$, що їх містить (див. твердження A.3 та обговореня після нього). Викладення цього етапу див. у [16, с. 63-65], див. також [7, с. 214-218], де використано трохи іншу термінологію, але доводиться фактично те ж саме. Тоді з пункту 3. твердження A.2 і вже показаної сюр'єктивності α випливає, що

$$\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)/N \simeq \alpha(\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)) = \pi_1(X,x).$$

В силу твердження A.3, факторизація за нормальною підгрупою N, що, як ми тепер знаємо, породжена елементами $i_{UV*}(c_j)(i_{VU*}(c_j))^{-1}$ для усіх j, еквівалентна (у сенсі ізоморфності груп) дописуванню їх у список співвідношень $\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)$. Звідси й отримаємо потрібне.

Якщо перетин $U \cap V$ однозв'язний, то останній етап доведення зводиться до демонстрації того, що α ін'єктивний, а отже є ізоморфізмом груп за наслідком A.1, звідки відразу отримуємо наслідок 13.2 (який випливає, звичайно, і з формулювання теореми).

■

Наслідок 13.1. *Якщо у топологічного простору X існує відкрите покриття $\{U,V\}$ таке, що U і V однозв'язні, а непорожній перетин $U \cap V$ лінійно зв'язний, то X однозв'язний.*

Вправа 13.1. Довести цей наслідок, не використовуючи попередню теорему (втім, у її доведенні міститься підказка і для даного випадку).

Наслідок 13.2. *Якщо у топологічного простору X існує відкрите покриття $\{U, V\}$ таке, що U і V лінійно зв'язні, а непорожній перетин $U \cap V$ однозв'язний, то для будь-якої $x \in U \cap V$*

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x).$$

Зауваження. Тут ми припускаємо, що $\pi_1(U, x)$ та $\pi_1(V, x)$ мають (скінченний) опис у термінах твірних та співвідношень, щоб можна було застосувати теорему Зейферта – ван Кампена та її доведення у викладеному вище вигляді. Втім, твердження цього наслідку залишається вірним і для довільних фундаментальних груп, якщо правильно визначити вільний добуток (див. посилання нижче). Зокрема, саме таким, як у наслідку, є покриття з прикладу 13.2 нижче. Якщо ж при цьому групи $\pi_1(U, x)$ та $\pi_1(V, x)$ вільні, то за побудовою їхній вільний добуток, а отже й $\pi_1(X, x)$, теж є вільними групами з відповідною кількістю твірних (як це й буде у згаданому прикладі).

Теорему Зейферта – ван Кампена можна узагальнити й на відкрите покриття з довільної скінченної кількості елементів.

Вправа 13.2. Якими саме повинні бути вимоги до елементів такого покриття? Спробуйте сформулювати таку узагальнену теорему (можливо, простіше буде спочатку сформулювати і довести узагальнення наслідку 13.1 аналогічно до вправи 13.1).

Простіше за все виконати цю вправу, коректно узагальнивши поняття вільного добутку груп, що фігурувало у нашому поясненні ідеї доведення. Зробивши це, можна переформулювати теорему взагалі без згадувань про твірні та співвідношення! Більш того, це поняття узагальнюється на довільну кількість груп, а отже теорему Зейферта – ван Кампена можна узагальнити на покриття з довільної кількості елементів. Всі деталі цього, а також деякі цікаві приклади застосування теореми можна знайти у [16, с. 57-77]. Зокрема, у цій книзі теорема Зейферта – ван Кампена використовується для обчислення деяких *груп вузлів*, тобто фундаментальних груп доповнень до (образів) вузлів у $\mathbb{R}^3$ (див. приклад 1.4), що є їх інваріантами. Див. також більш детальні обговорення цього у [7, с. 242-262] та [8]. Також у [16, с. 69-70] показано, як застосувати (узагальнену) теорему Зейферта – ван Кампена для дослідження фундаментальної групи гавайської сережки (простору з прикладу 12.3; нагадаємо, що цю групу неможливо обчислити за допомогою універсального накриття в силу наслідку 12.1), а саме, показано, що ця фундаментальна група незліченна і неабелева (там же можна знайти посилання на її повний опис). Ще кілька прикладів крім наведених нижче можна знайти у [7, с. 221-238]. У [5, с. 259-263] та [16, с. 70-73] також обговорюється застосування цієї теореми до обчислення фундаментальних груп *клітинних просторів*, з якими ми познайомимося наприкінці цього курсу.

Інші варіанти формулювання, доведення та приклади застосування теореми Зейферта – ван Кампена можна знайти у [8, с. 99-110, 225-232], [10, с. 128-159], [21, с. 251-275] та [22, с. 407-445].

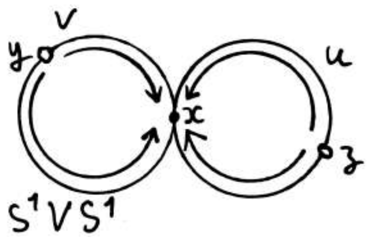
Приклад 13.1. Представимо сферу $X = S^n$ при $n \geqslant 2$ як об'єднання відкритих підмножин $U \coloneqq S^n \setminus \{N\}$ і $V \coloneqq S^n \setminus \{S\}$, де як завжди $N \coloneqq (0, \ldots, 0, 1)$ і $S \coloneqq (0, \ldots, 0, -1)$ позначають відповідно північний і південний полюси сфери (це носії карт її стандартного атласу з прикладу 29.3 курсу топології). Оскільки ці підмножини гомеоморфні $\mathbb{R}^n$ (гомеоморфізми встановлюються стереографічними проєкціями, див. той же приклад), вони однозв'язні. Їхній перетин $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$ лінійно зв'язний (бо при стереографічних проєкціях переходить у лінійно зв'язний $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) і непорожній, отже за наслідком 13.1 ми ще раз отримали однозв'язність S^n при $n \geqslant 2$, як у прикладі 6.2.

Приклад сфер також демонструє важливість деяких умов у формулюванні теореми Зейферта – ван Кампена та її наслідку: при $n = 1$ описане покриття задовольняє усім його умовам крім лінійної зв'язності $U \cap V$, але коло S^1 не є однозв'язним (приклад 9.1). Можна також побудувати покриття кола, де непорожній перетин $U \cap V$ буде лінійно зв'язним, але одна з однозв'язних множин U і V не буде відкритою (зробіть це), демонструючи важливість також і цієї умови.

Приклад 13.2. Нехай $X = S^1 \vee S^1$ – букет двох кіл зі спільною точкою x. Оберемо якісь точки y і z на кожному з цих кіл, що не дорівнюють x. Покладемо $U \coloneqq S^1 \vee S^1 \setminus \{y\}$ і $V \coloneqq S^1 \vee S^1 \setminus \{z\}$. Це відкриті підмножини, об'єднанням яких є $S^1 \vee S^1$. При цьому кожна з них гомотопічно еквівалентна S^1 (перевірте це, побудувавши відповідні деформаційні ретракції, як показано на ілюстрації знизу, та скориставшися твердженням 2.2), а отже лінійно зв'язна за гомотопічною інваріантністю лінійної зв'язності (вправа 2.2; але лінійну зв'язність нескладно перевірити й безпосередньо). Їхній перетин $U \cap V = S^1 \vee S^1 \setminus \{y, z\}$ непорожній (містить x) і стяжний (перевірте це, побудувавши деформаційну ретракцію на $\{x\}$), зокрема лінійно зв'язний за твердженням 2.4 (що теж простіше перевірити безпосередньо). З гомотопічної інваріантності фундаментальної групи та прикладу 9.1 випливає, що $\pi_1(U, x) \simeq \pi_1(V, x) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, тобто у термінах твірних та співвідношень (див. приклад А.15):

$$\pi_1(U,x) = \langle a \rangle, \quad \pi_1(V,x) = \langle b \rangle, \quad \pi_1(U \cap V, x) = \langle \rangle.$$

Тут a і b – це, наприклад, гомотопічні класи петель, що один раз обходять у якихось напрямках кола, які містяться в U і V відповідно. Згідно з теоремою Зейферта – ван Кампена (див. також наслідок 13.2 і зауваження після нього), тоді $\pi_1(X,x) \simeq \langle a,b \rangle$ (бо співвідношень немає), тобто це вільна група з двома твірними, як і повинно бути згідно з прикладом 9.4.



Вправа 13.3. За допомогою теореми Зейферта – ван Кампена обчислити фундаментальну групу букета n кіл $\underbrace{S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$, переконавшися у тому, що це вільна група з n твірними (пор. з вправою 9.2). Це можна зробити індуктивно або використати узагальнення теореми, що обговорювалося у зауваженні після вправи 13.2.

Доповнення. Необхідні відомості з алгебри

У цьому розділі будуть наведені потрібні для цього курсу початкові відомості з теорії груп. Детальніше викладення міститься, наприклад, у главах 4 та 10 книги [4] або частині I книги [20]. Зокрема, там можна знайти доведення викладених тут тверджень, але більшість з них неважко перевірити самостійно, що й рекомендується робити у якості вправ.

Означення A.1. *Групою* зветься множина G разом з бінарною *груповою операцією*, тобто відображенням $G \times G \to G\colon (a, b) \mapsto ab$, що задовольняє наступним умовам:

- $(ab)c = a(bc)$ для будь-яких $a, b, c \in G$ (асоціативність операції);
- існує *нейтральний елемент* (або *одиниця групи*) e такий, що $ae = ea = a$ для будь-якого $a \in G$;
- для будь-якого $a \in G$ існує *обернений елемент* $a^{-1} \in G$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Якщо крім того групова операція комутативна, тобто $ab = ba$ для будь-яких $a, b \in G$, то групу G називають *абелевою*.

Як бачимо, групова операція виглядає як множення чисел. Ці позначення називаються *мультиплікативними*, і саме їх ми й будемо тут використовувати. Як і у цьому означенні, одиницю групи будемо у загальному випадку позначати через e. Натомість, для абелевих груп часто застосовують *адитивні* позначення, тобто групова операція виглядає як додавання ($(a, b) \mapsto a + b$), нейтральний елемент позначається нулем ($a + 0 = a$ для будь-якого $a \in G$), а обернений виглядає як протилежний (для будь-якого $a \in G$ існує $-a \in G$ такий, що $a + (-a) = 0$). Такий вибір позначень мотивується, зокрема, наступними прикладами. Виконайте для них усі необхідні перевірки самостійно.

Приклад A.1. *Тривіальною* зветься група $\{e\}$, що складається лише з одиниці.

Приклад A.2. Усі цілі числа з операцією додавання утворюють абелеву групу $\mathbb{Z}$. Це ж вірно для множини дійсних $\mathbb{R}$ чисел з цією операцією, а також для множин елементів будь-якого поля та будь-якого векторного простору з їх відповідними операціями додавання.

Приклад A.3. Усі ненульові дійсні числа з операцією множення теж утворюють абелеву групу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Це ж вірно для множини ненульових елементів будь-якого поля з його операцією множення (т. зв. *мультиплікативна група поля*). Крім того, абелеву групу утворюють усі додатні дійсні числа з тією ж операцією множення.

Приклад А.4. Для будь-якого натурального n будемо вважати цілі числа k і l еквівалентними, якщо вони рівні за модулем n: $k \equiv l \mod n$, тобто $k-l$ кратне n. Відповідна множина класів еквівалентності позначається $\mathbb{Z}_n$. У якості її елементів зручно розглядати класи еквівалентності перших n цілих невід'ємних чисел: $\mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$, де $[k]$ складається з усіх цілих чисел, що мають залишок k при діленні на n. Тоді коректно визначена операція додавання $[k] + [l] := [k+l]$, що перетворює $\mathbb{Z}_n$ на абелеву групу з n елементів. Вона зветься *групою залишків за модулем* n. Звичайно, група $\mathbb{Z}_1$ тривіальна.

Приклад А.5. Для натурального n усі перестановки множини $\{1, \ldots, n\}$ з операцією композиції утворюють скінченну *симетричну групу* S_n. При $n \geqslant 3$ вона є неабелевою.

Приклад А.6. Ще одним прикладом неабелевої (за умови $n \geqslant 2$) групи є *вільна група з* n *твірними* для натурального n. Так зветься фактор-множина множини скінченних слів, що складаються з символів $a_1, \ldots, a_n$, $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ за відношенням еквівалентності, що задане умовами

$$W_1\, a_i\, a_i^{-1}\, W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1\, a_i^{-1} a_i\, W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого i та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Групова операція визначається за допомогою послідовного записування слів з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 буде клас еквівалентності слова W_1W_2. У подальшому будемо для спрощення позначень замість класів еквівалентності слів записувати самі слова у якості елементів групи (але пам'ятати, що вони представляють відповідний клас, тому, наприклад, $W_1\, a_i\, a_i^{-1}\, W_2 = W_1 W_2$). Групова операція коректно визначена та асоціативна, а нейтральним елементом є порожнє слово (тобто його клас еквівалентності). Також неважко переконатися у тому, що обернений елемент до довільного слова $W = b_1 \ldots b_m$ має вигляд

$$W^{-1} = (b_1 \ldots b_m)^{-1} := (b_m)^{-1} \ldots (b_1)^{-1},$$

де вважаємо $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Тому це дійсно група. Позначатимемо її через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, а елементи $a_1, \ldots, a_n$ (тобто слова з одного символа) будемо звати *твірними* (або *породжуючими елементами*) групи. При $n = 1$ ця група ізоморфна $\mathbb{Z}$ (див. доведення цього у прикладі А.15 нижче), а при $n \geqslant 2$ дійсно є неабелевою, бо, наприклад, $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$ за побудовою.

Означення А.2. Відображення груп $\alpha\colon G \to H$ зветься їх *гомоморфізмом*, якщо зберігає групову операцію: $\alpha(ab) = \alpha(a)\,\alpha(b)$ для будь-яких $a, b \in G$.

З означення також випливає, що гомоморфізм зберігає одиницю групи та обернені елементи: $\alpha(e) = e$ (зауважимо, що тут e зліва й справа позначає, взагалі кажучи, різні елементи: одиниці G і H відповідно), $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ для будь-якого $a \in G$ (перевірте це).

Приклад А.7. *Тривіальний* гомоморфізм $G \to H$ визначений для будь-яких груп G і H як постійне відображення, що переводить кожний елемент G у одиницю $e \in H$. Він очевидним чином задовольняє попередньому означенню.

Означення А.3. Гомоморфізм груп зветься їх *ізоморфізмом*, якщо є бієкцією. Якщо існує ізоморфізм $\alpha\colon G \to H$, то говорять, що група G ізоморфна групі H (або що групи G і H ізоморфні). Ми позначатимемо це $G \simeq H$.

Відображення груп, що обернене до ізоморфізма, теж є ізоморфізмом, зокрема гомоморфізмом, в силу означень. Ізоморфність є відношенням еквівалентності на множині груп (перевірте це) та означає, що їх структури фактично однакові з алгебраїчної точки зору. Зокрема, ізоморфізм зберігає абелевість групи.

Приклад А.8. Відображення $x \mapsto \ln x$ є ізоморфізмом між групами додатних дійсних чисел з операцією множення та усіх дійсних чисел з операцією додавання, що розглядалися у прикладах А.3 і А.2 відповідно (перевірте це).

Означення А.4. *Прямим добутком* груп G_1 і G_2 зветься їх прямий декартовий добуток $G_1 \times G_2$ з почленно визначеною груповою операцією: $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \coloneqq (a_1 b_1, a_2 b_2)$ для будь-яких $a_1, b_1 \in G_1$ і $a_2, b_2 \in G_2$.

Перевірте, що така операція дійсно перетворює $G_1 \times G_2$ на групу і що прямий добуток груп асоціативний, тобто $(G_1 \times G_2) \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3)$ для будь-яких груп G_1, G_2 і G_3, тобто відповідні групові структури на $G_1 \times G_2 \times G_3$ збігаються. Більш того, ця конструкція очевидним чином узагальнюється на довільну скінченну кількість множників (див. також [4, с. 443]). Зауважимо крім того, що добуток будь-якої групи G на тривіальну групу ізоморфний G (запишіть відповідний ізоморфізм), а добуток абелевих груп абелевий в силу означень. Прямий добуток скінченної кількості абелевих груп $G_1, \ldots, G_n$ ще називають їх *прямою сумою* і позначають $G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$.

Приклад A.9. Прямий добуток будь-якого натурального числа n копій групи $\mathbb{Z}$ (відповідно, $\mathbb{R}$) з прикладу A.2 будемо позначати через $\mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{R}^n$). У позначеннях прямої суми це виглядає як $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ та $\underbrace{\mathbb{R} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}}_{n}$ відповідно. Таким чином, $\mathbb{Z}^n$ і $\mathbb{R}^n$ – абелеві групи з операціями покомпонентного додавання: $(x^1, \ldots, x^n) + (y^1, \ldots, y^n) = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$.

Означення A.5. Нехай G – деяка група. Підмножина $H \subset G$ зветься *підгрупою* G, якщо $ab \in H$ і $a^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$.

Будь-яка підгрупа H групи G містить одиницю $e \in G$ (покажіть це) і з обмеженням на H групової операції сама перетворюється на групу, бо для неї виконані умови означення A.1. Дві умови попереднього означення часто записують як одну: $ab^{-1} \in H$ для будь-яких $a, b \in H$, що є еквівалентною до них (чому?).

Означення A.6. Підгрупа H групи G називається *нормальною*, якщо $aba^{-1} \in H$ для будь-яких $a \in G$ і $b \in H$.

Приклад A.10. Будь-яка група G містить *тривіальні* підгрупи $\{e\}$ (див. приклад A.1) та G, що є, очевидно, нормальними.

Усі підгрупи будь-якої абелевої групи є нормальними, бо в цьому випадку $aba^{-1} = b \in H$ для усіх $a \in G$, $b \in H$.

Приклад A.11. Додатні дійсні числа утворюють підгрупу групи ненульових дійсних чисел з прикладу A.3, бо добуток двох додатних чисел і обернене до додатного є додатними. Аналогічним чином підмножина $\mathbb{Z}^n$ у $\mathbb{R}^n$ з прикладу A.9 (зокрема $\mathbb{Z}$ у $\mathbb{R}$) є підгрупою. Усі ці підгрупи нормальні в силу абелевості.

Приклад A.12. Будь-який елемент a довільної групи G визначає *спряження* (*внутрішній автоморфізм*)

$$C_a \colon G \to G \colon b \mapsto aba^{-1},$$

що є ізоморфізмом G на себе (тобто дійсно *автоморфізмом*). Зокрема, він переводить кожну підгрупу $H \subset G$ у *спряжену* до неї підгрупу

$$aHa^{-1} \coloneqq C_a(H) = \{aba^{-1} \mid b \in H\}.$$

Перевірте ці твердження, друге з яких можна вивести з більш загального факту: будь-який ізоморфізм переводить підгрупи у підгрупи. Згідно з попереднім означенням, нормальні підгрупи G – це в точності ті, що зберігаються при усіх внутрішніх автоморфізмах, тобто ті підгрупи $H \subset G$, для яких $aHa^{-1} = H$ для будь-яких $a \in G$. Якщо G абелева, то всі її внутрішні автоморфізми є тотожними відображеннями. Див. також деяку подальшу інформацію у [4, с. 444-445].

Означення А.7. Нехай H – підгрупа групи G. Для кожного елемента $a \in G$ підмножини $aH \coloneqq \{ab \mid b \in H\} \subset G$ та $Ha \coloneqq \{ba \mid b \in H\} \subset G$ звуться відповідно *лівим* та *правим класами суміжності* a за H.

При цьому належність елементів групи до одного лівого або правого класу суміжності є відношенням еквівалентності (перевірте це, а також те, що ліві та праві класи суміжності – це орбіти деяких правої та лівої дій H на G відповідно, див. розділ 18 курсу топології). Таким чином, у загальному випадку виникають дві фактормножини G за цими відношеннями еквівалентності, між якими, втім, існує бієкція (яка саме?). Але якщо H нормальна, то можна говорити про однозначно визначену фактормножину:

Твердження А.1. *Нехай H – нормальна підгрупа групи G. Тоді для кожного $a \in G$ його ліві та праві класи суміжності за H збігаються: $aH = Ha$. При цьому бінарна операція*

$$G/H \times G/H \to G/H \colon (aH, bH) \mapsto aH\, bH \coloneqq ab\, H$$

на множині G/H класів суміжності G за H коректно визначена і задає на цій фактормножині структуру групи.

Означення А.8. Множина G/H (одночасно лівих та правих) класів суміжності групи G за її нормальною підгрупою H з груповою структурою, що описана у попередньому твердженні, зветься *факторгрупою* G за H.

Факторгрупа будь-якої абелевої групи є абелевою за побудовою.

Приклад А.13. Факторгрупа довільної групи G за тривіальною підгрупою $\{e\}$ ізоморфна G, бо кожен клас суміжності складається з одного елемента, а за тривіальною підгрупою G – ізоморфна $\{e\}$, бо єдиним класом суміжності буде сама G (перевірте це, явно записавши відповідні ізоморфізми).

Означення А.9. Нехай G і H – деякі групи, а відображення $\alpha \colon G \to H$ – їх гомоморфізм. Його *ядром* зветься

$$\operatorname{Ker} \alpha \coloneqq \{a \mid \alpha(a) = e\} \subset G,$$

а *образом* –

$$\operatorname{Im} \alpha \coloneqq \alpha(G) = \{\alpha(a) \mid a \in G\} \subset H.$$

Тут і в наступному твердженні через e знову позначаємо одиниці обох цих груп.

Твердження А.2 (Властивості ядра та образу)**.** *Нехай* $\alpha\colon G \to H$ *– деякий гомоморфізм груп.*

1. $\operatorname{Ker}\alpha$ *– нормальна підгрупа* G *і* α *– ін'єкція (мономорфізм) тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Ker}\alpha = \{e\}$*;*

2. $\operatorname{Im}\alpha$ *– підгрупа* H *і* α *– сюр'єкція (епіморфізм) тоді й тільки тоді, коли* $\operatorname{Im}\alpha = H$*;*

3. *Відображення*

$$G/\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Im}\alpha\colon a\operatorname{Ker}\alpha \mapsto \alpha(a)$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Таким чином, пункт 3. цього твердження (що називають ще *першою теоремою Ньотер про ізоморфізм*) означає, що $G/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Im}\alpha$ для будь-якого гомоморфізма $\alpha\colon G \to H$.

Приклад А.14. Для натурального n розглянемо відображення

$$\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n\colon k \mapsto [k]$$

абелевих груп з прикладів А.2 та А.4 відповідно. Оскільки

$$\alpha(k+l) = [k+l] = [k] + [l] = \alpha(k) + \alpha(l)$$

для будь-яких $k, l \in \mathbb{Z}$ за побудовою структури групи на $\mathbb{Z}_n$, α є гомоморфізмом. Він сюр'єктивний, бо $[k] = \alpha(k)$ для будь-якого $[k] \in \mathbb{Z}_n$, тобто $\operatorname{Im}\alpha = \mathbb{Z}_n$. Ядро цього гомоморфізма має вигляд

$$\operatorname{Ker}\alpha = \{k \in \mathbb{Z} \mid [k] = [0]\} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv 0 \mod n\} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\},$$

тобто складається з усіх кратних n цілих чисел. Позначимо цю підмножину через $n\mathbb{Z}$. Неважко безпосередньо перевірити, що це нормальна (хоча б у силу абелевості) підгрупа $\mathbb{Z}$, як і повинно бути за пунктом 1. попереднього твердження. Тоді за його ж пунктом 3. маємо

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n,$$

де ізоморфізм задається умовою $k + n\mathbb{Z} \mapsto \alpha(k) = [k]$ для кожного $k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (де використовуємо адитивні позначення також і для класів суміжності).

Якщо гомоморфізм груп $\alpha\colon G \to H$ ін'єктивний, то з прикладу A.13 і пунктів 1. та 3. твердження A.2 маємо

$$G \simeq G/\{e\} = G/\mathrm{Ker}\,\alpha \simeq \mathrm{Im}\,\alpha = \alpha(G),$$

більш того, відповідним ізоморфізмом $G \to \alpha(G)$ буде саме α (чому?), що неважко перевірити й безпосередньо.

Наслідок A.1. *Будь-який ін'єктивний гомоморфізм груп є ізоморфізмом на свій образ.*

Продовжимо розмову про вільну групу з n твірними $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, що була розпочата у прикладі A.6, використовуючи ті ж позначення, що там. Нехай тепер $\{r_1, \ldots, r_m\}$ – якась скінченна множина слів, що складаються з тих же символів $a_1, \ldots, a_n$, $a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$. Змінимо наше відношення еквівалентності на множині усіх скінченних слів, додавши до перелічених у прикладі A.6 умови

$$W_1\, r_j\, W_2 \sim W_1 W_2, \quad W_1\, r_j^{-1}\, W_2 \sim W_1 W_2$$

для будь-якого $j = \overline{1, m}$ та довільних слів W_1 і W_2 (включно з порожніми). Тут обернене слово r_j^{-1} визначається за звичними правилами: якщо $r_j = b_1 \ldots b_m$, то $r_j^{-1} = (b_m)^{-1} \ldots (b_1)^{-1}$, де $(a_i)^{-1} = a_i^{-1}$ і $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$. Далі розглядаємо фактормножину множини слів саме за цим відношенням еквівалентності й так само у якості елементів цієї множини записуємо самі слова. Введемо на отриманій таким чином фактормножині групову операцію як у випадку вільної групи, послідовно записуючи слова з точністю до відношення еквівалентності: добутком класів еквівалентності слів W_1 і W_2 є клас еквівалентності слова $W_1 W_2$. Перевірте, що введена таким способом операція коректно визначена й асоціативна. Нейтральним елементом є клас еквівалентності порожнього слова, який ми далі позначатимемо через e. Наприклад, $a_i a_i^{-1} = e$ або $r_j = e$ для будь-яких i та j. Обернені елементи можна знаходити так, як вказано вище для r_j (чому?). Тому це дійсно група.

Означення A.10. Описану вище групу будемо називати *групою з твірними* $a_1, \ldots, a_n$ *та співвідношеннями* $r_1, \ldots, r_m$. Вона позначається через $\langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$. Якщо якась група G ізоморфна $\langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$, то будемо говорити, що вона має опис у термінах твірних $a_1, \ldots, a_n$ та співвідношень $r_1, \ldots, r_m$ (або *копредставлення* $\langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$).

Співвідношення часто для наочності записують у вигляді рівностей: $r_j = e$ замість просто r_j. Також часто частину співвідношення переносять вправо: якщо $r_j = c_j\, d_j^{-1}$ для деяких слів c_j і d_j, то пишуть $c_j = d_j$ замість r_j. З опису відношення еквівалентності випливає, що у цьому випадку

$$W_1\, c_j\, W_2 = W_1\, c_j\, d_j^{-1}\, d_j\, W_2 = W_1\, r_j\, d_j\, W_2 = W_1\, d_j\, W_2$$

для будь-яких слів W_1 і W_2. Також у подальшому будемо використовувати очевидні спрощені позначення для степенів: писати a_i^k замість $\underbrace{a_i \ldots a_i}_{k}$ і a_i^{-k} замість $\underbrace{a_i^{-1} \ldots a_i^{-1}}_{k}$ для усіх натуральних k та будь-якого i. Під a_i^0 при цьому будемо розуміти одиницю групи e. Множина співвідношень не визначена групою однозначно: до їх списку без зміни групи можна додавати, наприклад, $a_i a_i^{-1}$ для довільних i та інші вирази, що є одиничними за побудовою. На практиці список співвідношень намагаються зробити мінімальним. Встановлення ізоморфності або неізоморфності двох груп, що задані твірними та співвідношеннями, є у загальному випадку доволі складною комбінаторною задачею (при цьому множина твірних теж не визначена класом ізоморфності групи однозначно).

Приклад A.15. Група з твірними $a_1, \ldots, a_n$ і без співвідношень за побудовою є просто вільною групою $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ з твірними $a_1, \ldots, a_n$. Зокрема, "групою без твірних" вважатимемо тривіальну: $\langle\rangle = \{e\}$.

Тепер розглянемо групу з однією твірною $\langle a \rangle$. Її довільний елемент з урахуванням введених вище позначень однозначно представляється у вигляді a^n для деякого $n \in \mathbb{Z}$, який можна отримати, "приводячи подібні" літери a і a^{-1}, якщо вони стоять поруч (чому таке представлення однозначне?). При цьому $a^n\, a^m = a^{n+m}$ для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$. Перевірте це, розглянувши різні варіанти знаків у цілих чисел n, m і $n + m$. Тому бієктивне відображення $\langle a \rangle \to \mathbb{Z}\colon a^n \to n$ є гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом груп: $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Приклад A.16. Розглянемо групу $\langle a \mid a^n \rangle$, де $n \geqslant 2$ натуральне (при $n = 0$ в силу наших домовленостей про позначення це $\langle a \rangle$, а при $n = 1$ – тривіальна група $\{e\}$). Аналогічним до $\langle a \rangle$ чином встановлюємо, що довільний елемент цієї групи має вигляд a^i для деякого $i = \overline{0, n-1}$. Дійсно, спочатку, як у попередньому прикладі, отримаємо вираз a^j для деякого цілого j, а потім, враховуючи рівність $a^n = e$, перепишемо його як a^i, де i – залишок від ділення j на n. І взагалі, $a^i = a^j$ тоді й тільки тоді, коли $i \equiv j \mod n$. Оскільки при цьому $a^i\, a^j = a^{i+j}$, відображення

$\langle a \mid a^n\rangle \to \mathbb{Z}_n\colon a^i \to [i]$ у групу $\mathbb{Z}_n$ з прикладу A.4 є бієктивним (чому?) гомоморфізмом, тобто ізоморфізмом груп, і $\langle a \mid a^n\rangle \simeq \mathbb{Z}_n$. Групи з однією твірною, що розглядалися у цьому та попередньому прикладах, тобто (з точністю до ізоморфізма) нескінченна $\mathbb{Z}$ та скінченні $\mathbb{Z}_n$, звуться ще *циклічними* (див. також [4, с. 171-173]).

Приклад A.17. Єдине співвідношення групи $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$ згідно з домовленостями вище зручно буде переписати у вигляді $ab = ba$. Звідси, переходячи до обернених елементів, отримаємо $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, а домножаючи зліва і справа на a^{-1} і b^{-1} – $ba^{-1} = a^{-1}b$ і $b^{-1}a = ab^{-1}$ відповідно. Враховуючи ці співвідношення, у довільному слові з символів a, b, a^{-1}, b^{-1} можна їх переставляти, допоки не отримаємо a^nb^m для деяких $n, m \in \mathbb{Z}$, і різні пари n, m відповідають різним елементам групи (чому?). Крім того, в силу тих же співвідношень $a^nb^m\,a^kb^l = a^{n+k}b^{m+l}$ для будь-яких $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$. Тому відображення $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle \to \mathbb{Z}^2\colon a^nb^m \to (n, m)$ у групу $\mathbb{Z}^2$ з прикладу A.9 є бієктивним гомоморфізмом, а отже ізоморфізмом груп: $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle \simeq \mathbb{Z}^2$. Аналогічним способом можна описати у термінах твірних та співвідношень групу $\mathbb{Z}^n$ і для довільного n (зробіть це). Таким чином, додавання співвідношень вигляду $aba^{-1}b^{-1}$ дозволяють перетворити вільну групу на абелеву. Тому $\mathbb{Z}^n$ ще називають *вільною абелевою групою з n твірними.*

Приклад A.18. Для будь-якої скінченної групи G розглянемо групу $\langle a,\, a \in G \mid abc^{-1},\, a, b, c \in G\colon ab = c\rangle$, твірними якої є елементи G, а співвідношення визначені таблицею множення G (тут у рівності $ab = c$ елементи a і b множаться у G). Покажіть, що відображення $a \mapsto a$ задає ізоморфізм G на описану вище групу. Таким чином, будь-яку скінченну групу можна описати у термінах твірних та співвідношень, хоча це буде, взагалі кажучи, доволі неекономний опис. Більш того, якщо у означенні A.10 дозволити довільну кількість твірних та співвідношень, зберігаючи вимогу на скінченну довжину слів, так можна описати взагалі будь-яку групу (перевірте, що ваше доведення залишається вірним і для цього випадку).

Твердження A.3. *Нехай N – найменша за включенням нормальна підгрупа групи $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m\rangle$, що містить її елементи $s_1, \dots, s_l$ (у такому випадку говорять, що N породжена $s_1, \dots, s_l$). Тоді відображення*

$$G/N \to \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_l\rangle\colon W\,N \mapsto W$$

коректно визначене і є ізоморфізмом груп.

Тут нормальна підгрупа N, що породжена $s_1, \ldots, s_l$, завжди існує (чому?) і єдина як найменший елемент частково впорядкованої множини (якої?). Іншими словами, факторизація G за N і дописування $s_1, \ldots, s_l$ у список співвідношень G дають ізоморфні групи. Подальшу інформацію та приклади опису груп у термінах твірних та співвідношень можна знайти, наприклад, у [20, с. 23-28, 215-221].

Література

[1] В.Г. Болтянский, В.А. Ефремович. Наглядная топология. М.: Наука, 1982.

[2] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.

[3] Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. Введение в топологию. М.: Наука, 1995.

[4] Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.

[5] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. Элементарная топология. М.: МЦНМО, 2012.

[6] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.

[7] Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

[8] Р. Кроуэлл, Р. Фокс. Введение в теорию узлов. М.: Мир, 1967.

[9] С.М. Львовский. Лекции по комплексному анализу. М.: МЦНМО, 2009.

[10] У. Масси, Дж. Столлингс. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977.

[11] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.

[12] В.В. Прасолов. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.

[13] В.В. Прасолов. Элементы теории гомологий. М.: МЦНМО, 2004.

[14] В.А. Рохлин, Д.Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.

[15] Н. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. М.: Физматгиз, 1958.

[16] А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

[17] М. Хирш. Дифференциальная топология. М. Мир, 1979.

[18] G. Carlsson. Topology and Data. Bull. Amer. Math. Soc., 46 (2009), p. 255-308.

[19] E.D. Demaine, M.L. Demaine, Y.N. Minsky, J.S.B. Mitchell, R.L. Rivest, M. Pătraşcu. Picture-Hanging Puzzles. Preprint, arXiv:1203.3602, April 26 2014.

[20] D.S. Dummit, R.M. Foote. Abstract Algebra. Third Edition. Wiley, 2004.

[21] J.M. Lee. Introduction to Topological Manifolds. Second Edition. Springer, 2011.

[22] J.R. Munkres. Topology. Second Edition. Prentice Hall, 2000.