37.2. $X \subset \mathbb{R}^n$, $x \in X$. $\varphi \in C(X,Y)$ продовжується до $\overline{\varphi} \in C(\mathbb{R}^n, Y)$ $\Rightarrow \varphi_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$ тривіальний.

Продовження означає, що $\overline{\varphi}|_X = \varphi$, тобто $\varphi = \overline{\varphi} \circ i$, де $i : X \to \mathbb{R}^n$ – включення. Тоді $\varphi_* = \overline{\varphi}_* \circ i_* : \pi_1(X,x) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{R}^n, x) \xrightarrow{\overline{\varphi}_*} \pi_1(Y, \varphi(x))$. Але $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{[e_x]\}$, бо $\mathbb{R}^n$ стягний. Тому $\varphi_*([f]) \underbrace{=}_{= \overline{\varphi}_*([e_x])} [e_{\varphi(x)}]$ $\forall\ [f] \in \pi_1(X,x) \Rightarrow \varphi_*$ трив.

37.4. Показати, що $\pi_1(GL(n,\mathbb{C}), E)$ нескінченна. $\leftarrow \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$

Розглянемо $\varphi : S^1 \to GL(n,\mathbb{C}) : z \mapsto \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ і $\psi : GL(n,\mathbb{C}) \to S^1 : A \mapsto \frac{\det A}{|\det A|}$. $\forall z$ $\psi(\varphi(z)) = \frac{z}{|z|} = z \Rightarrow \psi \circ \varphi = id_{S^1}$.

Тоді $\psi_* \circ \varphi_* = id_{\pi_1(S^1, 1)}$, при цьому $\varphi_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1($ ~~$GL(n,\mathbb{C}), E)$ і $\psi_* : \pi_1(GL(n,\mathbb{C}), E) \to \pi_1(S^1, 1)$.~~ Оскільки $\psi_* \circ \varphi_*$ – ізоморфізм, ψ_* – син (тут просто $[f] = \psi_*(\varphi_*([f]))$ $\forall [f] \in$

$\pi_1(S^1,1)$), а φ_* - ін'. Оскільки $\pi_1(S^1,1) \simeq \mathbb{Z}$ нескінченна,

а $\psi_* : \pi_1(GL(n,\mathbb{C}),E) \to \pi_1(S^1,1)$ - зюр, $\pi_1(GL(n,\mathbb{C}),E)$ нескінченна.

(насправді $GL(n,\mathbb{C})$ лін. зв'язний, тому всі $\pi_1(GL(n,\mathbb{C}),A)$ нескінченні).

<u>34.11.</u> (X,Y,p) - накриття $\Rightarrow$ p - лок. гомеоморфізм.

$\forall x \in X$ $\;y := p(x)$ $\;\exists U \ni y$ - правильно накритий відкр. окіл:

$p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, зокрема, $\exists \alpha : x \in U_\alpha$. Тоді $p : U_\alpha \to U$ - гомеоморфізм.

<u>34.13.</u> Для яких $A \subset \mathbb{R}$ $\;(A, S^1, p|_A)$ є накриттям, де $p(x) = e^{2\pi i x}$?

Лише для $A = \mathbb{R}$. Дійсно, нехай $A \neq \mathbb{R}$. Тоді у нього

$\exists$ межова точка x, $y := p(x)$. $\nearrow$ це накриття. Тоді у

y $\exists$ правильно накр. окіл U. За побудовою топології S^1, $\exists$ дуга (a,b) : $y \in (a,b) \subset U$. Тоді це теж правильно накр. окіл: $(P|_A)^{-1}((a,b)) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. З іншого боку, $(P|_A)^{-1}((a,b)) = P^{-1}((a,b)) \cap A = \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} (c+n, d+n)\right) \cap A$. (де $a = e^{2\pi i c}$, $b = e^{2\pi i d}$).

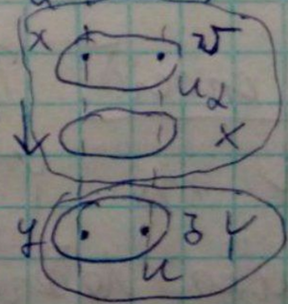
Оскільки $\forall \alpha$ $P|_{U_\alpha} : U_\alpha \to (a,b)$ - гомео-зм, U_α - це інтервали $(c+n_\alpha, d+n_\alpha)$, що повністю містяться в A. $P(x) = y \in (a,b) \Rightarrow \exists n : x \in (c+n, d+n)$. $x \in \partial A \Rightarrow (c+n, d+n) \cap A \neq \varnothing$, тоді $(c+n, d+n) \cap (P|_A)^{-1}((a,b)) \neq \varnothing \Rightarrow (c+n, d+n) = U_\alpha$ для деякого $\alpha \Rightarrow (c+n, d+n) \subset A$. Але тоді $x \notin \partial A$ $\lightning$.

34.М. (Впр. 7.3. лекцій).

(X,Y,p) – накриття, $A\subset Y$ зв'язна $\Rightarrow \forall y,z\in A\ |p^{-1}(y)|=|p^{-1}(z)|$.

Нагадаємо, що $|p^{-1}(y)|=|p^{-1}(z)| \Leftrightarrow \exists$ бієк. $p^{-1}(y)\to p^{-1}(z)$.

Покажемо, що це так, якщо y і z належать до одного правильно накр. околу U: $p^{-1}(U)=\bigsqcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Дійсно $\forall x\in p^{-1}(y)$ $\exists!\,\alpha\in A$: $x\in U_\alpha$, тоді $x\mapsto v$: $\{v\}=p^{-1}(z)\cap U_\alpha$. Обернене будується так само, тому це бієк.



Оберемо якусь $y\in A$ і покладемо

$B:=\{z\in A \mid |p^{-1}(z)|=|p^{-1}(y)|\}$.

$\forall z\in B\ \exists$ правильно накр. відкр. $U\ni z$. Тоді $A\cap U$ – відкр. окіл z у A. $\forall v\in A\cap U$ за доведеним $|p^{-1}(v)|=|p^{-1}(z)|=|p^{-1}(y)| \Rightarrow A\cap U\subset B$. Т.ч., B відкрита в топ. A.

Так само, $\forall z\notin B\ \exists$ пр. накр. відкр. $U\ni z$, $A\cap U$ – відкр. окіл z, і $\forall v\in A\cap U$ $|p^{-1}(v)|=|p^{-1}(z)|\neq|p^{-1}(y)|$, тобто $A\cap U\subset A\setminus B$. Т.ч., $A\setminus B$ відкр. в топ. $A\Rightarrow B$ – відкритозамкнена; $B\neq\emptyset\ (\ni y)$, A зв. $\Rightarrow B=A$, що й означає потр.

Наведено ще 2 доведення для лін. зв'язної A.

Отже, $y, z \in A \Rightarrow \exists$ шлях $f \in C(I, A)$: $f(0) = y$, $f(1) = z$.

<u>I спосіб.</u> Правильно покриті відкр. околи утв. відкрите покр. $\mathcal{U}$ пр. p $\Rightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{U})$ – відкр. покр. I. Нехай δ – його число Лебега, $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \delta$. Тоді $\forall\, i = \overline{1,n}$ $f\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right)$ міститься у деякому правильно покр. околі $\Rightarrow$ за доведеним

$$|p^{-1}(y)| = |p^{-1}(f(0))| = |p^{-1}(f(\tfrac{1}{n}))| = \ldots = |p^{-1}(f(\tfrac{n-1}{n}))| = |p^{-1}(f(1))| = |p^{-1}(z)|.$$

<u>II спосіб.</u> Побудуємо бієкцію $\varphi: p^{-1}(y) \to p^{-1}(z)$ за допомогою f. $\forall\, x \in p^{-1}(y)$ нехай $\tilde{f}_x$ – єдине підняття f з початком x: $\tilde{f}_x \in C(I, X)$, $p \circ \tilde{f}_x = f$, $\tilde{f}_x(0) = x$. Тоді $\tilde{f}_x(1) \in p^{-1}(z)$ визначене однозначно. Покладемо $\varphi(x) := \tilde{f}_x(1)$.

Ан-но будуємо $\psi: p^{-1}(z) \to p^{-1}(x)$ за $\overline{f}$: $\tilde{\overline{f}}_\sigma$ для $\sigma \in p^{-1}(z)$ –

єдине підняття $\overline{f}$ з початком $\tilde{\overline{f}}_v(0) = v$, і покладемо $\psi(v) := \tilde{\overline{f}}_v(1)$. Тоді $\forall x \in p^{-1}(y)$ $\psi(\varphi(x)) = \psi(\tilde{f}_x(1)) = \tilde{\overline{f}}_{\tilde{f}_x(1)}(1)$. При цьому $p \circ \tilde{\overline{f}}_{\tilde{f}_x(1)} = \overline{f}$ і $\tilde{\overline{f}}_{\tilde{f}_x(1)}(0) = \tilde{f}_x(1)$, тому за єдиністю підняття $\tilde{\overline{f}}_{\tilde{f}_x(1)} = \tilde{\overline{f}}_x$ (бо $p \circ \tilde{\overline{f}}_x = \overline{f}$ і $\tilde{\overline{f}}_x(0) = \tilde{f}_x(1)$). Отже, $\psi(\varphi(x)) = \tilde{\overline{f}}_x(1) = \tilde{f}_x(0) = x$. Т.ч. $\psi \circ \varphi = id_{p^{-1}(y)}$, і так само $\varphi \circ \psi = id_{p^{-1}(z)}$, тому φ (і ψ) – біє, а $\psi = \varphi^{-1}$.

34.F. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : z \mapsto e^z$ є накриттям.

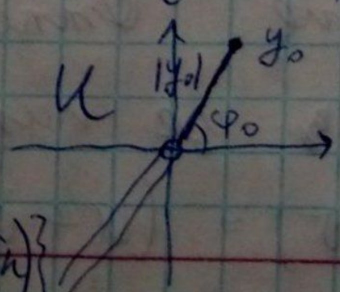
$p(u+iv) = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$ $\forall z = u+iv \in \mathbb{C}$. p – непер. і сюр'є на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$: $e^u\cos v + i e^u \sin v$.

бо задається неперер. ф-ціями

$\forall y \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $y = p(\ln|y| + i \arg y)$.

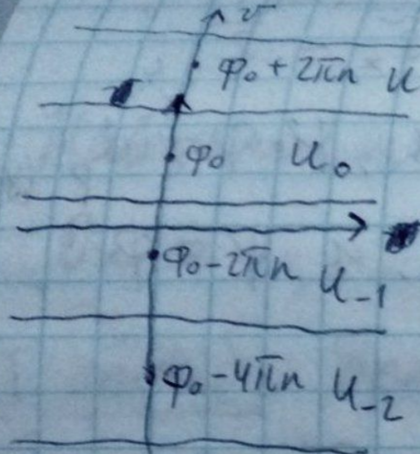
При цьому для $y = |y|e^{i\varphi}$ $p^{-1}(y) = \{\ln|y| + i(\varphi + 2\pi n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

$\forall y_0 = |y_0| e^{i\varphi_0}$ покладемо $U := \{|y|e^{i\varphi} \mid \varphi \in (\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)\}$ – це площина $\mathbb{C}$ з вирізаним променем.



Тоді

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{u+iv \mid u\in\mathbb{R}, v\in(\varphi_0-\pi+2\pi n, \varphi_0+\pi+2\pi n)\}}_{U_n}$$



Це відкриті диз'юнктні підмножини $\mathbb{C}$ (смуги ~~полоски~~). $\forall n$

$$p : u + iv \mapsto e^u e^{iv} \in U \text{ —}$$

$$v \in (\varphi_0 - \pi + 2\pi n, \varphi_0 + \pi + 2\pi n) \qquad e^u e^{iv} = e^u \cos v + i e^u \sin v$$

він, неперервне, бо задається непер. ф-ціями і обернене

$$y \mapsto \begin{cases} \left(\ln|y|, \arccos \dfrac{\operatorname{Re} e^{-i\varphi_0} y}{|y|} + \varphi_0 + 2\pi n\right), & \operatorname{Im} e^{-i\varphi_0} y \geq 0 \\ \left(\ln|y|, -\arccos \dfrac{\operatorname{Re} e^{-i\varphi_0} y}{|y|} + \varphi_0 + 2\pi n\right), & \operatorname{Im} e^{-i\varphi_0} y \leq 0 \end{cases}$$

неперервне. Отже, U — правильно накр., $(\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, p)$ — універсальне накр.

Також це накриття над простором орбіт задією $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}$:

$n \cdot (u + iv) = (u + i(v + 2\pi n))$, непер. і цілком розр.

Порівняємо з накриттям з задачі 37.1:

$$q : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C} \setminus \{0\} : (x, y) \mapsto y e^{2\pi i x}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R}^2_+ \arrow[dl, "q"] \\ & \mathbb{C}\setminus\{0\} & \end{tikzcd}$$

Вони ізоморфні : для гомеоморфізма

$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2_+ \; : \; u + iv \mapsto \left(\frac{v}{2\pi}, e^u\right)$.

Дійсно, $\forall\ u+iv \in \mathbb{C}$ $q(\varphi(u+iv)) = q\left(\frac{v}{2\pi}, e^u\right) =$

$= e^u e^{2\pi i \frac{v}{2\pi}} = e^{u+iv} = p(u+iv)$.