1076. Ан-но 1077.

1085. Ан-но 1083. або 1084. далі

1086. Знайти кут між твірними гіп. $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$, що прох. через $(1,4,8)$, беручи промені, що направлені від даної точки до горлового еліпса.

Рівн. твірних: $\begin{cases}\lambda_1\left(x-\frac{z}{2}\right)=\lambda_2(1-y)\\ \lambda_2\left(x+\frac{z}{2}\right)=\lambda_1(1+y)\end{cases}$ $\begin{cases}\mu_1\left(x-\frac{z}{2}\right)=\mu_2(1+y)\\ \mu_2\left(x+\frac{z}{2}\right)=\mu_1(1-y)\end{cases}$

Підставимо $(1,4,8)$: $\begin{cases}-3\lambda_1=-3\lambda_2\\ 5\lambda_2=5\lambda_1\end{cases}$ $\begin{cases}-3\mu_1=5\mu_2\\ 5\mu_2=-3\mu_1\end{cases}$

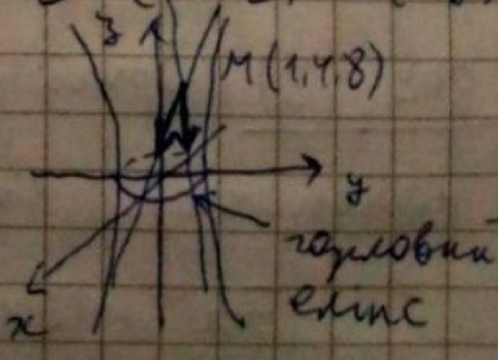
$\lambda_1=\lambda_2$: $\begin{cases}x-\frac{z}{2}=1-y\\ x+\frac{z}{2}=1+y\end{cases}$, $\frac{\mu_1}{\mu_2}=-\frac{5}{3}$, скажімо, $\mu_1=5$, $\mu_2=-3$: $\begin{cases}5\left(x-\frac{z}{2}\right)=-3(1+y)\\ -3\left(x+\frac{z}{2}\right)=5(1-y)\end{cases}$

$\begin{cases}2x+2y-z-2=0\\ 2x-2y+z-2=0\end{cases}$ $\begin{cases}10x+6y-5z+6=0\\ 6x-10y+3z+10=0\end{cases}$

Напрямні:

$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=(0,-4,-8)\sim(0,-1,-2)$; $\begin{vmatrix} i & j & k\\ 10 & 6 & -5\\ 6 & -10 & 3\end{vmatrix}=(-32,-60,-136)\sim(-8,-15,-34)$

$\cos\varphi=\frac{15+68}{\sqrt{5}\sqrt{1445}}=\frac{83}{5\cdot 17}=\frac{83}{85}$ (це потрібні вектори, бо останні коорд. від'ємні)



1087. Через твірну $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ і точку $(0,3,0)$ проведено площину. Знайти другу гіперболоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ пряму її перетину з гіперболоїдом.

Рівняння площини (за 2 точками $(2,0,0)$ і $(0,3,0)$ і вектором $(0,3,4)$):

$$0=\begin{vmatrix}x-2 & y & z\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=12(x-2)+8y-6z$$

$$6x+4y-3z-12=0$$

Це дотична площина до гіперб. у (x_0,y_0,z_0): $\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{9}-\frac{zz_0}{16}-1=0$

$$\frac{x_0}{4\cdot 6}=\frac{y_0}{9\cdot 4}=\frac{z_0}{16\cdot 3}=\frac{1}{12}$$

$x_0=2,\ y_0=3,\ z_0=4$. Виконання умови $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{9}-\frac{z_0^2}{36}=1$ означає, що ця площина дійсно дотична. Твірні за ф-лою:

$$\begin{cases}\lambda_1\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{4}\right)=\lambda_2\left(1-\frac{y}{3}\right)\\ \lambda_2\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)=\lambda_1\left(1+\frac{y}{3}\right)\end{cases}\qquad \begin{cases}\mu_1\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{4}\right)=\mu_2\left(1+\frac{y}{3}\right)\\ \mu_2\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)=\mu_1\left(1-\frac{y}{3}\right)\end{cases}$$

Підставляємо $(2,3,4)$:

$$\begin{cases}0=0\\ 2\lambda_2=2\lambda_1\end{cases}\qquad \begin{cases}0=2\mu_2\\ 2\mu_2=0\end{cases}$$

$$\lambda_1=\lambda_2 \qquad\qquad \mu_2=0$$

$$\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{z}{4}=1-\frac{y}{3}\\ \frac{x}{2}+\frac{z}{4}=1+\frac{y}{3}\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{z}{4}=0\\ 0=1-\frac{y}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x+4y-3z-12=0\\ 6x-4y+3z-12=0\end{cases}\qquad \begin{cases}2x-z=0\\ y-3=0\end{cases}$$

Напрямні вектори:

$$\begin{vmatrix}i & j & k\\ 6 & 4 & -3\\ 6 & -4 & 3\end{vmatrix}=(0,-36,-48)\sim(0,3,4)\qquad \begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,0,2)$$

Твірні: $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{4}$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{2}$. Перша з них збігається з даною. Друга — відповідь.

807. (г) Знайти тип ~~рівняння~~ лінії, канонічне рівняння, канонічну систему координат, перетворення координат.

$$5x^2+12xy-22x-12y-19=0$$

Загальне рівняння $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Матриця квадратичної частини $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

У нас це $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Власні значення: $0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(5-\lambda) - 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0.$$

$\lambda = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{25+4\cdot 36}\right) = \frac{1}{2}(5 \pm 13)$. $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$.

Вектори канонічного базиса – власні вектори A: $(A - \lambda_i E)a_i = 0$, $i = 1, 2$.

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 6 \\ 6 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} -4a_1^1 + 6a_1^2 = 0 \\ 6a_1^1 - 9a_1^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a_1^1 = 3a_1^2.$$

Тобто $a_1 \sim (3,2)$. Оскільки цей вектор одиничний, нормуємо: $a_1 = \frac{(3,2)}{\sqrt{9+4}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Оскільки базис ортонормований, a_2 можна знайти, просто обернувши a_1 на $\frac{\pi}{2}$: $a_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

Або знайдемо як власний: $\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & 6 \\ 6 & -\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 9a_2^1 + 6a_2^2 = 0 \\ 6a_2^1 + 4a_2^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3a_2^1 = -2a_2^2$$

Тобто $a_2 \sim (2,-3)$. Оскільки $\{a_1, a_2\}$ повинен бути додатньо орієнтований, візьмемо $(-2,3)$ і нормуємо: $\frac{(-2,3)}{\sqrt{4+9}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.
$\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 13 > 0\right)$.

Перетворення координат при переході до цього базиса (поки що з тим же початком координат):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{x} - \frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{y} \\ \frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{x} + \frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{y} \end{pmatrix}$$

a_1 a_2

Підставимо у вихідне рівняння:

$$5\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{x}-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{y}\right)^2+12\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{x}-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{y}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{x}+\frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{y}\right)-22\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{x}-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{y}\right)-$$
$$-12\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{x}+\frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{y}\right)-19=0$$

$$\left(5\cdot\frac{9}{13}+12\cdot\frac{6}{13}\right)\tilde{x}^2+\left(5\cdot\frac{-12}{\sqrt{13}}+12\left(\frac{9}{13}-\frac{4}{13}\right)\right)\tilde{x}\tilde{y}+\left(5\cdot\frac{4}{13}+12\cdot-\frac{6}{13}\right)\tilde{y}^2+$$
$$+\left(-22\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}-12\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\tilde{x}+\left(22\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}-12\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\tilde{y}-19=0$$

$$\underset{\lambda_1}{9}\tilde{x}^2-\underset{\lambda_2}{4}\tilde{y}^2-\frac{90}{\sqrt{13}}\tilde{x}+\frac{8}{\sqrt{13}}\tilde{y}-19=0$$

Виділяємо повні квадрати:

$$9\left(\tilde{x}^2-\frac{10}{\sqrt{13}}\tilde{x}\right)-4\left(\tilde{y}^2-\frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{y}\right)-19=0$$

$$9\left(\tilde{x}-\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2-9\cdot\frac{25}{13}-4\left(\tilde{y}-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2+4\cdot\frac{1}{13}-19=0$$

$$9\left(\tilde{x}-\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2-4\left(\tilde{y}-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2-36=0$$

Залишилося покласти $\begin{cases}\tilde{\tilde{x}}:=\tilde{x}-\frac{5}{\sqrt{13}}\\ \tilde{\tilde{y}}:=\tilde{y}-\frac{1}{\sqrt{13}}\end{cases}$ – канонічні координати.

$$9\tilde{\tilde{x}}^2-4\tilde{\tilde{y}}^2=36$$

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{4}-\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{9}=1$$ – канонічне рівняння. Це гіпербола.

Знайдено перетворення координат: $\tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}+\frac{5}{\sqrt{13}}$, $\tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}+\frac{1}{\sqrt{13}}$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}&-\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}}&\frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}}&-\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{2}{\sqrt{13}}&\frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{x}}+\frac{5}{\sqrt{13}}\\\tilde{\tilde{y}}+\frac{1}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3&-2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{x}}\\\tilde{\tilde{y}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{15}{13}-\frac{2}{13}\\\frac{10}{13}+\frac{3}{13}\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3&-2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{x}}\\\tilde{\tilde{y}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Зокрема, для початку канонічної с.к. $\tilde{\tilde{x}}=\tilde{\tilde{y}}=0 \Rightarrow (x,y)=\overset{\text{центр гіперболи}}{(1,1)}$.

Отже, канонічна с.к.: $O(1,1)$, $a_1\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $a_2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

807 (3). $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Власті знач.: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = 0$

$\lambda(\lambda - 5) = 0,$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5.$

Власті вектори: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix} = 0 \quad a_1^1 = 2a_1^2$

Тобто $a_1 \sim (2,1) \Rightarrow a_1 = \left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$.

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a_2^1 = -a_2^2$$

Тобто $a_2 \sim (1,-2) \Rightarrow a_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)$ (з урахуванням орієнт.).

Перетворення: $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 2\tilde{x} - \tilde{y} \\ \tilde{x} + 2\tilde{y} \end{pmatrix}$$

Підставимо:

$$\frac{1}{5}(2\tilde{x}-\tilde{y})^2 - \frac{4}{5}(2\tilde{x}-\tilde{y})(\tilde{x}+2\tilde{y}) + \frac{4}{5}(\tilde{x}+2\tilde{y})^2 + \frac{4}{\sqrt5}(2\tilde{x}-\tilde{y}) - \frac{3}{\sqrt5}(\tilde{x}+2\tilde{y}) - 7 = 0$$

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{5}\right)\tilde{x}^2 + \left(-\frac{4}{5} - \frac{16}{5} + \frac{4}{5} + \frac{16}{5}\right)\tilde{x}\tilde{y} + \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{5} + \frac{16}{5}\right)\tilde{y}^2 + \frac{5}{\sqrt5}\tilde{x} - \frac{10}{\sqrt5}\tilde{y} - 7 = 0$$

$$5\tilde{y}^2 + \sqrt5\,\tilde{x} - 2\sqrt5\,\tilde{y} - 7 = 0$$

Виділяємо повний квадрат:

$$5\left(\tilde{y}^2 - \frac{2}{\sqrt5}\tilde{y}\right) + \sqrt5\,\tilde{x} - 7 = 0$$

$$5\left(\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 - 1 + \sqrt5\,\tilde{x} - 7 = 0$$

$$5\left(\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt5}\right)^2 = -\sqrt5\left(\tilde{x} - \frac{8}{\sqrt5}\right)$$

Канонічні коорд.: $\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = -\left(\tilde{x} - \frac{8}{\sqrt5}\right) \\ \tilde{\tilde{y}} = -\left(\tilde{y} - \frac{1}{\sqrt5}\right) \end{cases}$ (додали "−", щоб у канон. рівнянні був "+"; і так збережено орієнтацію).

$$5\tilde{\tilde{y}}^2 = \sqrt5\,\tilde{\tilde{x}}$$

$$\tilde{\tilde{y}}^2 = \frac{1}{\sqrt5}\tilde{\tilde{x}}$$ — канон. рівн. парабола.

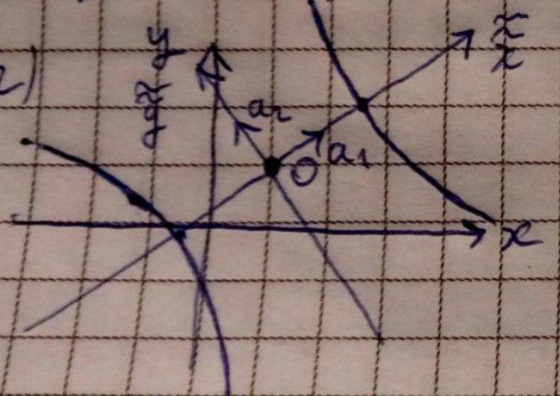
Перетворення: $\tilde{x} = -\tilde{\tilde{x}} + \frac{8}{\sqrt5}$, $\tilde{y} = -\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt5}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\tilde{\tilde{x}} + \frac{8}{\sqrt5} \\ -\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{5} - \frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

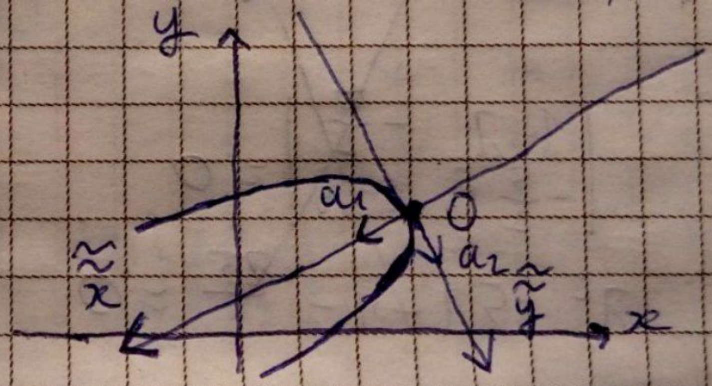
Початок канонічної с.к. – $O(3,2)$ (вершина параболи), базис $\left(-\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right)$.

807(2)



y
$\tilde{\tilde{y}}$
$\tilde{\tilde{x}}$
a_2
a_1
O
x

807(3)



y
a_1
O
a_2
$\tilde{\tilde{x}}$
$\tilde{\tilde{y}}$
x