gorkaviy@ilt.kharkov.ua

# Лекція 10. Регулярна заміна координат. Криві на поверхні. Дотична площина регулярної поверхні

Параметрично задані поверхні: $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ , $(u^1, u^2) \in D$

Явно задані поверхні: $x^3 = \varphi(x^1, x^2)$, $(x^1, x^2) \in \Omega$

Неявно задані поверхні: $\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0$

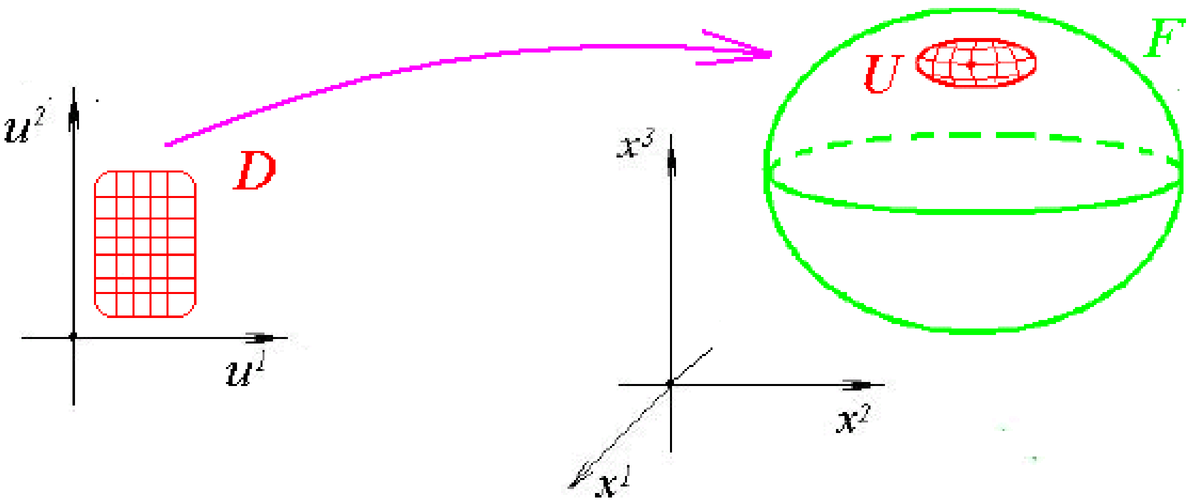
За виконання умов **регулярності**:

1) параметрично задана поверхня локально (з точки зору області $D$) є явно заданою поверхнею – графіком функції двох змінних,

2) неявно задана поверхня локально (з точки зору обхопного простору $I\!R^3$) є явно заданою поверхнею – графіком функції двох змінних.

Розглянемо просту поверхню $F$ в $\mathbb{R}^3$.

За визначенням, для кожної точки $P$ існує окіл $B$ в $\mathbb{R}^3$ такий, що окіл $U=B\cap F$ точки $P$ на поверхні $F$ є елементарною поверхнею, тобто окіл $U$ є гомеоморфним деякій області $D$ в $\mathbb{R}^2$.




Окіл $B$ разом з гомеоморфізмом $\varphi$: $D \to U$ називають *картою* або *параметризацією* навколо точки $P$ на поверхні $F$.

З аналітичної точки зору, відображення $\varphi$ представляється вектор-функцією $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$. Величини $(u^1, u^2)$ називаються *координатами* точок в карті $B$ на поверхні $F$ або *локальними координатами* на поверхні $F$.

Набір карт, що покривають усю поверхню $F$, утворюють *атлас* поверхні $F$.

*Проблема.* Чи можна перевірити, що відображення *φ: D → U* є гомеоморфізмом[1], коли відображення *φ* задано у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1,u^2) \\ x^2 = f^2(u^1,u^2) \\ x^3 = f^3(u^1,u^2) \end{cases},$$

тобто, в термінах вектор-функції $\vec{x} = \vec{f}(u^1,u^2)$?

*Відповідь.* Якщо вектор-функція $\vec{f}(u^1,u^2)$ задовольняє умовам регулярності:

$$\text{(a)}\ \vec{f} \in C^m(D),\ m \geq 1,$$

$$\text{(b)}\ \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right] \neq \vec{0},$$

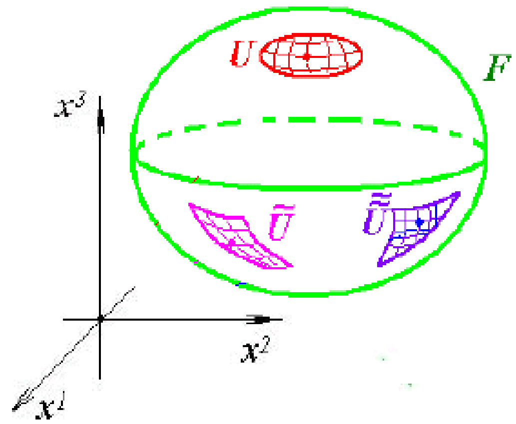
то тоді відображення *φ: D → U* локально є гомеоморфізмом.

*Зауваження.* Умова регулярності є достатньою, але не є необхідною для забезпечення локальної гомеоморфності.

---

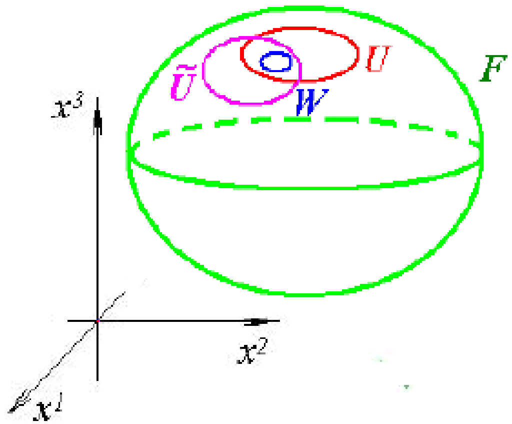
[1] Відображення топологічних просторів є гомеоморфізмом, якщо (a) відображення є неперервним, (b) відображення є бієктивним, (c) обернене відображення є неперервним.

## 10.1. Регулярна заміна координат на поверхні



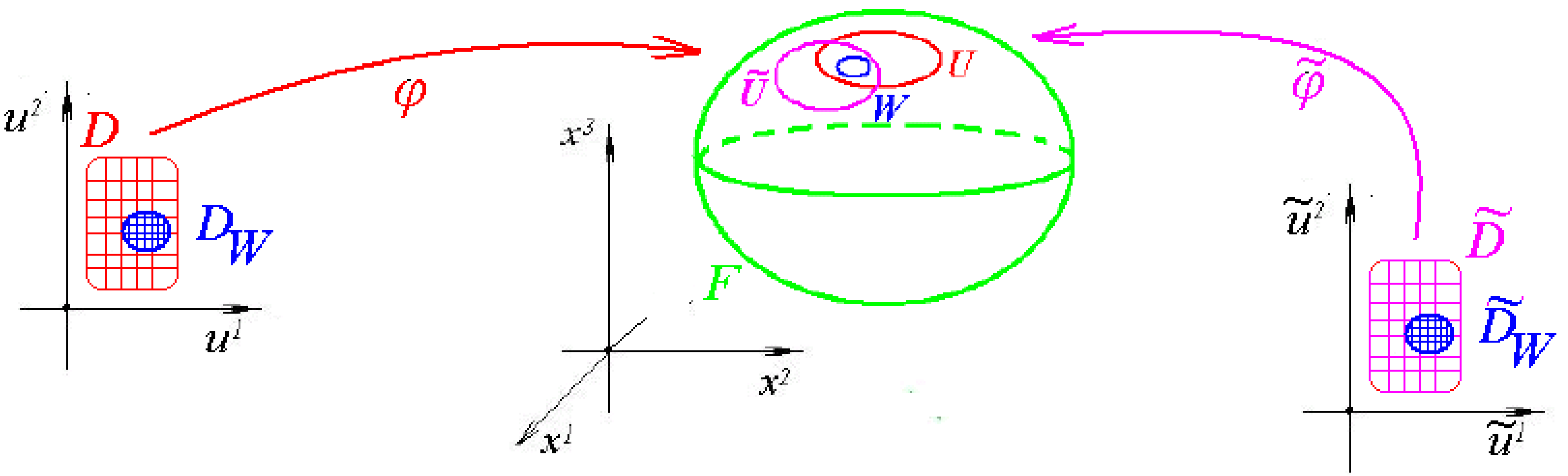

Проста поверхня $F$ покривається сукупністю карт, які утворюють атлас.

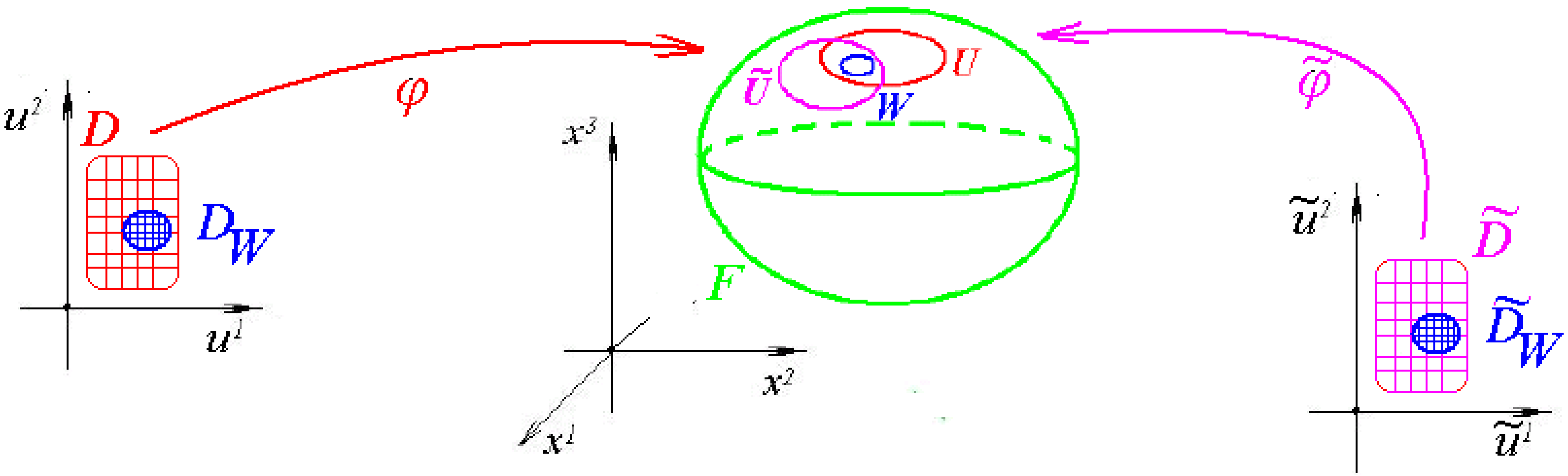
Можлива ситуація, коли якась пара $U$ і $\tilde U$ карт перетинаються.




Візьмемо точку $P \in U \cap \tilde U$ і розглянемо якийсь її окіл $W \in U \cap \tilde U$.

В околі $W$ діють одночасно дві системи локальних координат $(u^1, u^2)$ і $(\tilde u^1, \tilde u^2)$, породжені гомеоморфізмами $\varphi\colon D \to U$ і $\tilde\varphi\colon \tilde D \to \tilde U$ відповідно.






Візьмемо прообрази $D_W$ і $\widetilde{D}_W$ околу $W$ відносно відображень $\varphi{:}D\to U$ і $\varphi{:}\widetilde{D}\to \widetilde{U}$ відповідно і розглянемо відображення $\varphi^{-1}\circ\widetilde{\varphi}:\widetilde{D}_W\to D_W$. Це відображення є гомеоморфізмом. Воно називається заміною локальних координат на поверхні $F$ і представляється у вигляді

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\widetilde{u}^1,\widetilde{u}^2) \end{cases}$$

**Визначення.** Заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \end{cases}$$

назвемо *регулярною*, якщо

1) функції $u^1(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2)$ , $u^2(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \in C^m$, $m \geq 1$;

2) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \widetilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \widetilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

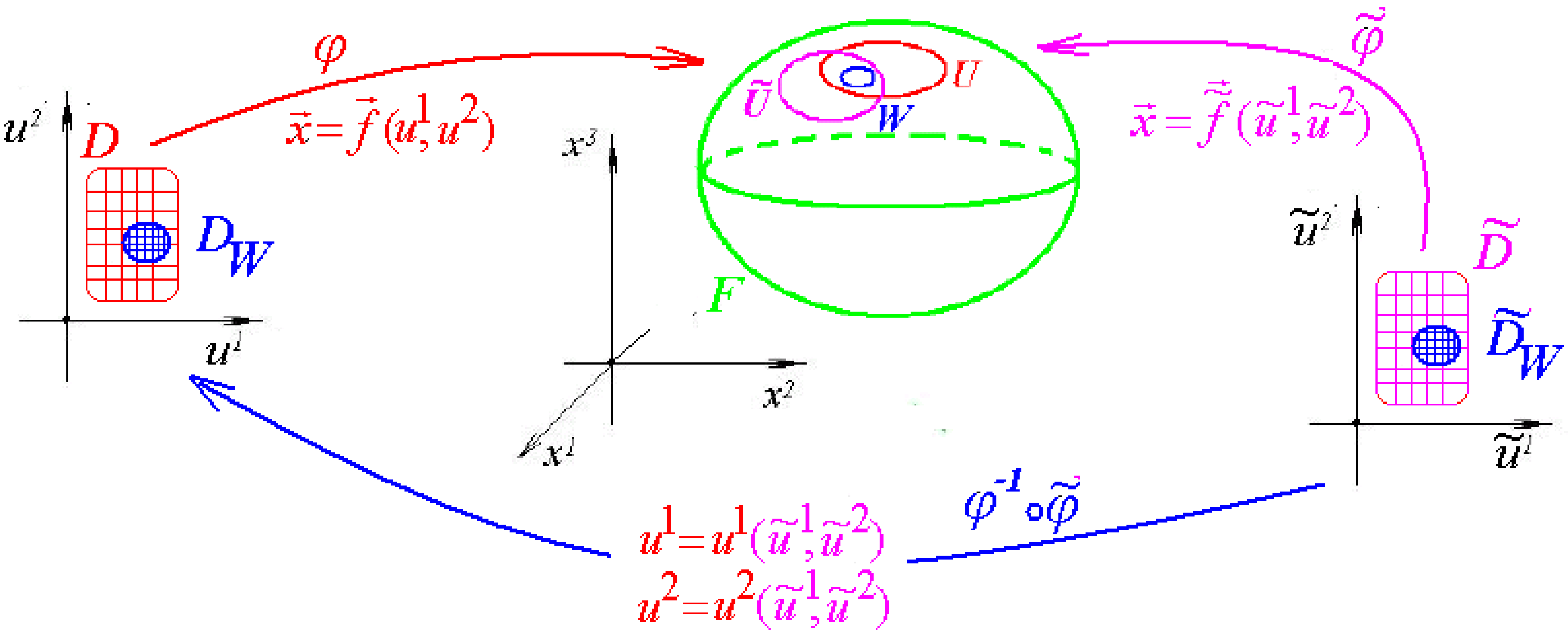
Зауваження. Регулярність є достатньою (але не необхідною) умовою, що забезпечує гомеоморфність відображення заміни координат.

В точках області $W$ поверхня $F$ представляється вектор-функціями

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2) \text{ і } \vec{x} = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2),$$

при цьому маємо

$$\vec{f}(u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)) = \vec{\tilde{f}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$



Продиференціюємо

$$\vec{f}(u^1(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2),u^2(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)) = \tilde{\vec{f}}(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)$$

Маємо:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^1} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^1} = \frac{\partial\tilde{\vec{f}}}{\partial\tilde{u}^1}$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^2} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^2} = \frac{\partial\tilde{\vec{f}}}{\partial\tilde{u}^2}$$

тобто,

$$\left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{f}}{\partial u^2}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^2}\\ \dfrac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^2}\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\tilde{\vec{f}}}{\partial\tilde{u}^1},\frac{\partial\tilde{\vec{f}}}{\partial\tilde{u}^2}\right)$$

**Наслідок.** Якщо вектор-функція $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ задовольняє умовам регулярності

$$\text{(a) } \vec{f} \in C^m,\ m \geq 1, \qquad \text{(b) } \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right] \neq \vec{0},$$

а заміна координат $\begin{cases} u^1 = u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2 = u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{cases}$ задовольняє умовам регулярності

$$\text{(a) } u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2),\ u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in C^m,\ m \geq 1; \qquad \text{(b) } \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то тоді вектор-функція задовольняє умовам регулярності

$$\text{(a) } \vec{\tilde{f}} \in C^m,\ m \geq 1, \qquad \text{(b) } \left[\frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^2}\right] \neq \vec{0}$$

Доведення: Застосувати і довести

$$\left[\frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^1}, \frac{\partial \vec{\tilde{f}}}{\partial \tilde{u}^2}\right] = \left(\frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1}\frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2}\frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1}\right) \cdot \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\right]$$

**Висновок.** Одна й та ж поверхня може задаватись параметрично різними вектор-функціями. Тобто, на одній і тій же поверхні можна вводити різні параметризації (різні локальні системи координат).

При цьому регулярність параметрично заданої поверхні зберігається при регулярних замінах локальних координат.

Зауваження. Для кривих була виділена спеціальна параметризація – натуральний параметр.

Для поверхонь такої виділеної спеціальної системи координат не існує. В кожному окремому випадку, для кожної задачі, обирається своя найбільш підходяща система локальних координат.

*Приклад 1.* Розглянемо лінійну вектор функцію

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2, \qquad (u^1, u^2) \in R^2$$

яка задає площину в $I\!R^3$, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{c}$ і натягнута на пару векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Регулярність цієї параметрично заданої площини означає $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \neq \vec{0}$, тобто, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ є лінійно незалежними.

Зробимо лінійну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = a_1^1 \tilde{u}^1 + a_2^1 \tilde{u}^2 + a_0^1 \\ u^2 = a_1^2 \tilde{u}^1 + a_2^2 \tilde{u}^2 + a_0^2 \end{cases}, \qquad (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in R^2$$

Умова регулярності заміни координат:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Запишемо радіус-вектор площини в нових координатах:

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1(a_1^1\widetilde{u}^1 + a_2^1\widetilde{u}^2 + a_0^1) + \vec{e}_2(a_1^2\widetilde{u}^1 + a_2^2\widetilde{u}^2 + a_0^2) =$$

$$= \vec{c} + a_0^1\vec{e}_1 + a_0^2\vec{e}_2 + (\vec{e}_1 a_1^1 + \vec{e}_2 a_1^2)\widetilde{u}^1 + (\vec{e}_1 a_2^1 + \vec{e}_2 a_2^2)\widetilde{u}^2 =$$

$$= \vec{\widetilde{c}} + \vec{\widetilde{e}}_1\widetilde{u}^1 + \vec{\widetilde{e}}_2\widetilde{u}^2$$

Описана заміна координат на площині відповідає заміні базису в площині і заміні початкової точки.

*Приклад 2.* Розглянемо лінійну вектор функцію

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1 u^1 + \vec{e}_2 u^2, \qquad (u^1, u^2) \in R^2$$

яка задає площину в $I\!R^3$, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{c}$ і натягнута на пару векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Регулярність цієї параметрично заданої площини означає $[\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \neq \vec{0}$, тобто, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ є лінійно незалежними.

Зробимо наступну заміну координат

$$\begin{cases} u^1 = \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \\ u^2 = \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \end{cases}, \qquad \begin{matrix} \tilde{u}^1 > 0 \\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi \end{matrix}$$

Умова регулярності заміни координат:

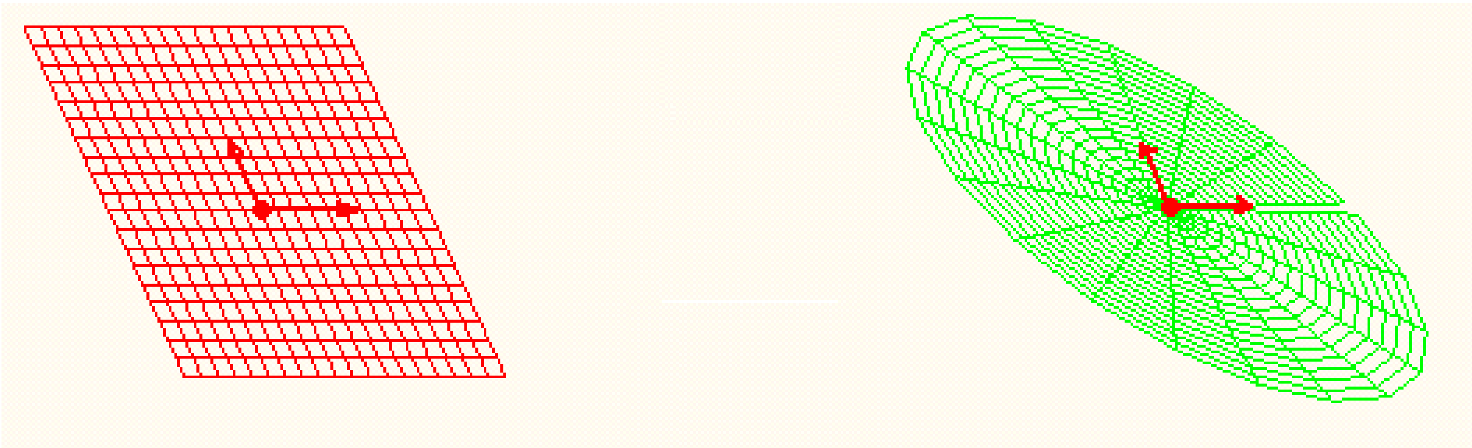
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \tilde{u}^2 & -\tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2 \\ \sin \tilde{u}^2 & \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2 \end{vmatrix} = \tilde{u}^1 \neq 0$$

Запишемо радіус-вектор площини в нових координатах:

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{e}_1\,\tilde{u}^1 \cos\tilde{u}^2 + \vec{e}_2\,\tilde{u}^1 \sin\tilde{u}^2 \quad , \quad \begin{array}{c} \tilde{u}^1 > 0 \\ 0 < \tilde{u}^2 < 2\pi \end{array}$$

Описана заміна координат на площині відповідає переходу від «афінних» координат до «полярних» координат на площині.

Зауваження. Радіус-вектор $\vec{x} = \vec{f}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ в «полярних» координатах задає не всю площину, а площину з розрізом вздовж променя, що йде від початкової точки (полюса) в напрямку вектора $\vec{e}_1$.



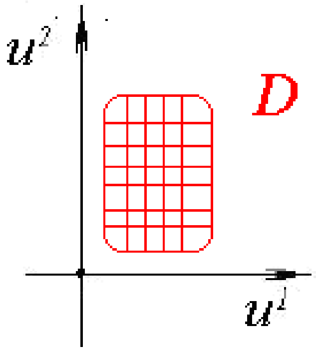
## 10.2. Криві на поверхні

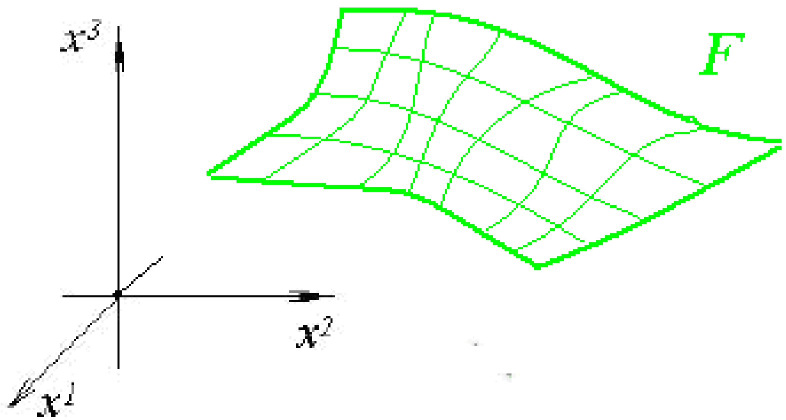
Розглянемо регулярну параметрично задану поверхню $F$ в $\mathbb{R}^3$, представлену радіус-вектором:

$$\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in D,$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1, u^2) \\ x^2 = f^2(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in D. \\ x^3 = f^3(u^1, u^2) \end{cases}$$



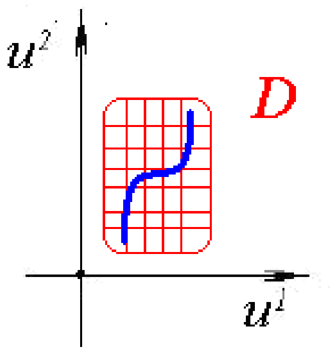
Розглянемо в області $D$ площини параметрів $(u^1, u^2)$ параметрично задану криву

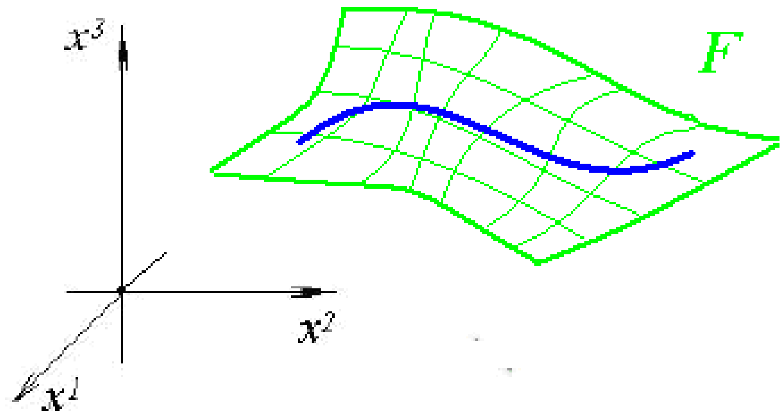
$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \; t \in (a,b)$$

Підставляючи в радіус-вектор поверхні $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$, отримуємо вектор-функцію

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)), \; t \in (a,b).$$

Ця вектор-функція задає криву $\gamma$ в $\mathbb{R}^3$, яка лежить на параметрично заданій поверхні $F$.



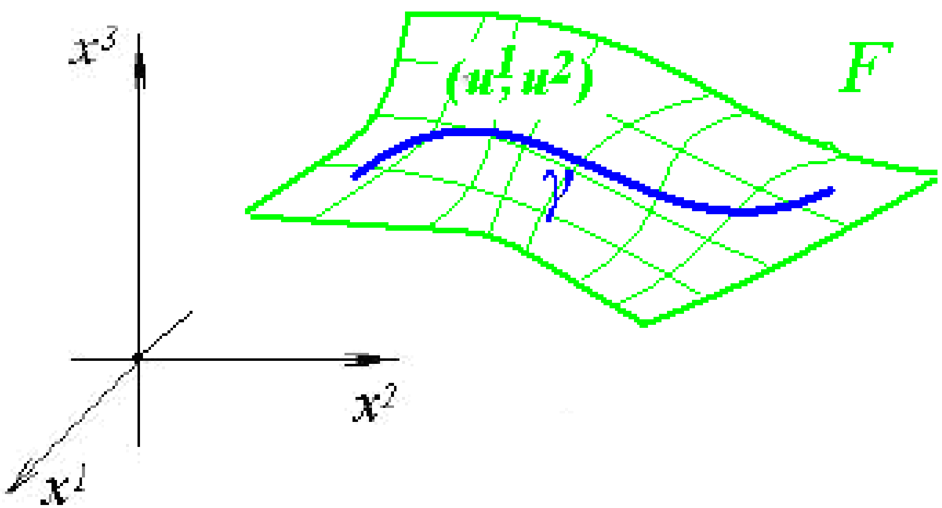
Таким чином, крива $\gamma$ на поверхні $F$ в $\mathbb{R}^3$ представляється в двох видах:

1) у внутрішніх координатах на поверхні $F$:

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \ t \in (a,b);$$

2) у зовнішніх координатах в просторі $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^1 = f^1(h^1(t), h^2(t)) \\ x^2 = f^2(h^1(t), h^2(t)) \\ x^3 = f^3(h^1(t), h^2(t)) \end{cases}$$



**Визначення.** Криві, задані параметрично

$$\begin{cases} u^1 = const \\ u^2 = t \end{cases}, \; t \in (a_2, b_2), \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = const \end{cases}, \; t \in (a_1, b_1);$$

називаються *координатними лініями* на параметрично заданій поверхні *F*.

Маємо два сімейства координатних ліній, які утворюють *координатну сітку* на параметрично заданій поверхні *F*.

*Приклад*. Розглянемо поверхню обертання, отриману обертанням плоскої кривої обертанням кривої $\gamma$

$$\begin{cases} x^1 = r(u^1) \\ x^2 = 0 \quad a < u^1 < b, \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}$$

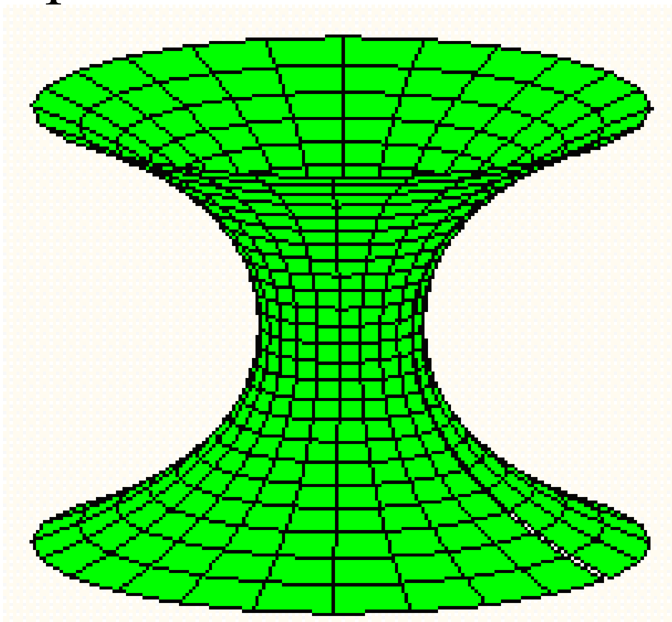
навколо осі $x^3$. Поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(u^1)\cos u^2 \\ x^2 = r(u^1)\sin u^2 \quad , \quad a < u^1 < b,\ 0 < u^2 < 2\pi. \\ x^3 = h(u^1) \end{cases}$$

Координатні лінії $\begin{cases} u^1 = C = const \\ u^2 = t \end{cases}$ задаються в обхопному просторі у вигляді $\begin{cases} x^1 = r(C)\cos t \\ x^2 = r(C)\sin t \\ x^3 = h(C) \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$. Це горизонтальні кола, вони називаються *паралелями* поверхні обертання.

Координатні лінії $\begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = C = const \end{cases}$ задаються в обхопному просторі у вигляді $\begin{cases} x^1 = r(t)\cos C \\ x^2 = r(t)\sin C \\ x^3 = h(t) \end{cases}$, $a < t < b$. Це початкова крива, повернута навколо осі $x^3$ на фіксований кут $C$. Такі криві називаються *меридіанами* поверхні обертання.

Таким чином, на поверхні обертання присутня спеціальна координатна сітка, утворена паралелями і меридіанами.



Розглянемо криву $\gamma$ на поверхні $F$ в $\mathbb{R}^3$, що представляється у внутрішніх координатах на поверхні $F$

$$\begin{cases} u^1 = h^1(t) \\ u^2 = h^2(t) \end{cases}, \ t \in (a,b),$$

та радіус-вектором в $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \vec{f}(h^1(t), h^2(t)), \ t \in (a,b),$$

тут $\vec{x} = \vec{f}(u^1, u^2)$ – радіус-вектор поверхні.

Продиференціювавши, отримаємо: $$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}\frac{\partial h^1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2}\frac{\partial h^2}{\partial t}.$$

**Твердження.** На регулярно параметризованій поверхні $F$ в $\mathbb{R}^3$ регулярність кривої $\gamma$ еквівалентна тому, що функції $h^1(t)$, $h^2(t)$ є неперервно диференційованими і при цьому $\left(\frac{dh^1}{dt}, \frac{dh^2}{dt}\right) \neq 0$.

**Приклад.** На регулярно параметризованій поверхні обертання координатні лінії є регулярними кривими.