Існування і єдиність занурень

Наступна теорема узагальнює теорему Бонне з теорії поверхонь і демонструє значення рівнянь Гаусса і Кодацці. Через $\overline{M}^m_c$ тут і далі будемо позначати стандартний m-вимірний простір постійної секційної кривини c: евклідовий простір E^m для $c = 0$, сферу $S^m_{\frac{1}{\sqrt{c}}}$ (з індукованою з E^{m+1} метрикою) для $c > 0$ та гіперболічний простір (в моделі Пуанкаре)

$$H^m_c := \left(\mathbb{R}^m_+, -\frac{1}{c\,(x^m)^2}\sum_{i=1}^m (dx^i)^2\right)$$

для $c < 0$, де $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^m > 0\}$.

Th. (Основна теорема теорії гіперповерхонь у просторах постійної кривини)

1. Існування. Нехай M – однозв'язний n-вимірний гладкий многовид, g – ріманова метрика на M, а b – симетрична 2-форма на ньому. Нехай ці форми задовольняють рівняння Гаусса і Кодацці для гіперповерхні у $\overline{M}_c^{n+1}$:

$$c(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)) = g(\mathsf{R}(X,Y)Z,W)-$$

$$-(b(X,W)b(Y,Z) - b(X,Z)b(Y,W)),$$

$$(\nabla_X b)(Y,Z) = (\nabla_Y b)(X,Z)$$

(для будь-яких гладких полів X, Y, Z, W на M), де ∇ і R – ріманова зв'язність і тензор кривини g відповідно. Тоді існує занурення $r\colon M \to \overline{M}_c^{n+1}$ таке, що g і b – його перша і друга (відносно деякого глобального одиничного нормального поля) фундаментальні форми відповідно.

2. Єдиність. Нехай M – зв'язний n-вимірний орієнтовний гладкий многовид, $r, \widetilde{r}\colon M \to \overline{M}_c^{n+1}$ – його занурення з першими і другими ф.ф. $g, \widetilde{g}$ і $b, \widetilde{b}$ відповідно. Нехай $g = \widetilde{g}$ і $b = \widetilde{b}$ або $b = -\widetilde{b}$ (тотожно). Тоді існує ізометрія $F\colon \overline{M}_c^{n+1} \to \overline{M}_c^{n+1}$ така, що $\widetilde{r} = F \circ r$.

► Див., наприклад, Dajczer – Tojeiro. ◄

Rem. Тут можна вважати многовиди і занурення k-гладкими, де $k \geqslant 3$, g – $(k-1)$-гладкою, b – $(k-2)$-гладкою. Умова орієнтовності в другій частині несуттєва і потрібна лише для коректної визначеності глобальних скалярних других ф.ф. відносно деяких глобальних одиничних нормальних полів (інакше доведеться говорити про "форми, визначені з точністю до знака" або вводити векторне розшарування ранга 1, що перетвориться на нормальне при зануренні). У першій частині вона не згадується, бо випливає з однозв'язності.

<u>Rem.</u> Справедливою є також версія цієї теореми для довільної ковимірності, що включає вже нормальну зв'язність і рівняння Річчі, див. формулювання і доведення там же.

Існують також теореми єдиності, що включають лише першу ф.ф., наприклад, теорема Кон-Фоссена для опуклих поверхонь у E^3 та її узагальнення Погореловим на негладкі поверхні. Вони ще звуться ''теоремами про жорсткість'': підмноговид не можна нетривіально ізометрично ''згинати'', лише рухати у тому просторі, до якого він занурений.

Основні рівняння у локальних координатах

Використовуємо всі ті ж локальні позначення і домовленості, що й вище. Тензори (поля) R і $\overline{\mathsf{R}}$ локально задаються розкладеннями

$$\mathsf{R}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} = \mathsf{R}^l_{ijk}\ \frac{\partial}{\partial u^l}, \quad \overline{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^c}\right)\frac{\partial}{\partial x^a} = \overline{\mathsf{R}}^d_{abc}\frac{\partial}{\partial x^d}$$

для $i, j, k = \overline{1, n}$, $a, b, c = \overline{1, n+q}$ відповідно з функціональними коефіцієнтами. Згадаємо, що тензор Рімана – це 4-форма, що визначена як $\mathsf{R}(X, Y, Z, W) := g(\mathsf{R}(X, Y)Z, W)$ (аналогічно для $\overline{\mathsf{R}}$) і має локальні коефіцієнти

$$\mathsf{R}_{ijkl} = \mathsf{R}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) =$$

$$= g\left(\mathsf{R}^m_{jkl}\ \frac{\partial}{\partial u^m}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = g_{im}\ \mathsf{R}^m_{jkl}$$

для $i, j, k, l = \overline{1, n}$. І аналогічно

$$\overline{\mathsf{R}}_{abcd} = \overline{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^a}\right) = \overline{g}_{ae}\,\overline{\mathsf{R}}^e_{bcd}$$

для $a, b, c, d = \overline{1, n+q}$.

Запишемо рівняння Гаусса для $X = \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^l}$, $Z = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $W = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $i, j, k, l = \overline{1, n}$. Зліва маємо (згадуючи, що $dr\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = r_i = r_i^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, де $r_i^a = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}$):

$$\overline{\mathsf{R}}\left(dr\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right), dr\left(\frac{\partial}{\partial u^l}\right), dr\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right), dr\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right) =$$

$$= r_i^a\, r_j^b\, r_k^c\, r_l^d\, \overline{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^d}, \frac{\partial}{\partial x^b}, \frac{\partial}{\partial x^a}\right) = r_i^a\, r_j^b\, r_k^c\, r_l^d\, \overline{\mathsf{R}}_{abcd}.$$

У правій частині перший доданок дорівнює, очевидно, R_{ijkl}. Для другого:

$$\overline{g}\left(B\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right), B\left(\frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right) =$$

$$= \overline{g}\left(b^{\alpha}_{ki}\xi_{\alpha}, b^{\beta}_{lj}\xi_{\beta}\right) = \sum_{\alpha=1}^{q} b^{\alpha}_{ik}\, b^{\alpha}_{jl}$$

в силу ортонормованості базиса нормальних полів. І аналогічно для третього.

<u>Cor.</u> (Локальний запис рівнянь Гаусса) Для будь-яких $i, j, k, l = \overline{1, n}$

$$r^a_i\, r^b_j\, r^c_k\, r^d_l\, \overline{\mathsf{R}}_{abcd} = \mathsf{R}_{ijkl} - \sum_{\alpha=1}^{q}\left(b^{\alpha}_{ik}\, b^{\alpha}_{jl} - b^{\alpha}_{il}\, b^{\alpha}_{jk}\right).$$

Rem. Рівняння для загальних полів можна вивести з цих за лінійністю.

Rem. Для гіперповерхні справа буде вираз з коефіцієнтами скалярної другої ф.ф. $\mathsf{R}_{ijkl} - (b_{ik}\, b_{jl} - b_{il}\, b_{jk})$.

Rem. Для $(\overline{M}, \overline{g})$ постійної секційної кривини c зліва буде $c(g_{ik}\, g_{jl} - g_{il}\, g_{jk})$ (з формул вище).

Rem. Згадаємо локальну формулу для секційної кривини у напрямку площини σ, що натягнута на $v = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ і $w = w^i \frac{\partial}{\partial u^i}$:

$$K_{int}(\sigma) = \frac{\mathsf{R}_{ijkl}\ v^i\, w^j\, v^k\, w^l}{(g_{ik}\, g_{jl} - g_{il}\, g_{jk})\, v^i\, w^j\, v^k\, w^l}.$$

Для зовнішньої кривини з виведення локального запису рівняння Гаусса маємо:

$$K_{ext}(\sigma) = \frac{\sum\limits_{\alpha} \left(b^{\alpha}_{ik}\, b^{\alpha}_{jl} - b^{\alpha}_{il}\, b^{\alpha}_{jk} \right) v^i\, w^j\, v^k\, w^l}{(g_{ik}\, g_{jl} - g_{il}\, g_{jk})\, v^i\, w^j\, v^k\, w^l}.$$

Rem. Для гіперповерхні у E^{n+1} маємо звичні рівняння Гаусса:

$$\mathsf{R}_{ijkl} = b_{ik}\, b_{jl} - b_{il}\, b_{jk}.$$

Зокрема, при $n = 2$ єдиним нетривіальним (з точністю до симетрій) буде

$$\mathsf{R}_{1212} = b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2,$$

звідки, записуючи формулу секційної кривини для $v = \frac{\partial}{\partial u^1}$, $w = \frac{\partial}{\partial u^2}$, отримуємо вираз для гауссової (єдиної секційної і єдиної зовнішньої у кожній точці) кривини

$$K = \frac{b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2}.$$

Тепер запишемо рівняння Кодацці для $X = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^k}$, $Z = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $i, j, k = \overline{1, n}$. Домножимо також обидві частини на локальне базисне нормальне поле $\xi_\alpha = \xi_\alpha^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, $\alpha = \overline{1, q}$. Аналогічно до рівнянь Гаусса, зліва маємо

$$\overline{g}\left(\overline{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}, \xi_\alpha\right) =$$

$$= \overline{\mathsf{R}}\left(dr\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right), dr\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right), dr\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), \xi_\alpha\right) = \xi_\alpha^a\, r_i^b\, r_j^c\, r_k^d\, \overline{\mathsf{R}}_{abcd}.$$

Для виразів справа за означенням маємо

$$\left(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^j}} B\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\left(B\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right) -$$

$$-B\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) - B\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\frac{\partial}{\partial u^i}\right) =$$

$$= \nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\left(b^{\beta}_{ki}\xi_{\beta}\right) - B\left(\Gamma^{l}_{jk}\frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) - B\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \Gamma^{l}_{ji}\frac{\partial}{\partial u^l}\right) =$$

$$= \frac{\partial b^{\beta}_{ki}}{\partial u^j}\,\xi_{\beta} + b^{\beta}_{ki}\sum_{\gamma=1}^{q}\mu_{\beta\gamma|j}\,\xi_{\gamma} - \Gamma^{l}_{jk}\,b^{\beta}_{li}\,\xi_{\beta} - \Gamma^{l}_{ji}\,b^{\beta}_{kl}\,\xi_{\beta}.$$

Домножаючи на ξ_{α}, в силу ортонормованості отримаємо

$$\left(\frac{\partial b^{\alpha}_{ik}}{\partial u^j} - \Gamma^{l}_{jk}\,b^{\alpha}_{il} - \Gamma^{l}_{ij}\,b^{\alpha}_{kl}\right) + b^{\beta}_{ik}\mu_{\beta\alpha|j}.$$

Суму перших трьох виразів тут зазвичай позначають через $b^{\alpha}_{ik,j}$ (коваріантна похідна b^{α}_{ik} за u^j).

<u>Cor.</u> (Локальний запис рівнянь Кодацці) Для будь-яких $i, j, k = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, q}$

$$\xi^a_\alpha \, r^b_i \, r^c_j \, r^d_k \, \overline{\mathsf{R}}_{abcd} = b^{\alpha}_{ik,j} - b^{\alpha}_{ij,k} + b^{\beta}_{ik}\mu_{\beta\alpha|j} - b^{\beta}_{ij}\mu_{\beta\alpha|k}.$$

<u>Rem.</u> Знову ж, рівняння для загальних полів можна отримати з цих. Для гіперповерхні справа залишається лише вираз $b_{ik,j} - b_{ij,k}$ з коваріантних похідних коефіцієнтів скалярної другої ф.ф., частина з коефіцієнтами скрута зникає. Для підмноговида у многовиді постійної секційної кривини зліва буде 0. Комбінуючи ці дві умови, отримуємо класичні рівняння Кодацці

$$b_{ik,j} = b_{ij,k}.$$

Нарешті запишемо рівняння Річчі для $X = \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $\xi = \xi_\beta$, $\eta = \xi_\alpha$, $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha, \beta = \overline{1, q}$. Аналогічно до рівнянь Кодацці, зліва маємо

$$\overline{g}\left(\overline{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\xi_\beta, \xi_\alpha\right) = \xi_\alpha^a\,\xi_\beta^b\,r_i^c\,r_j^d\,\overline{\mathsf{R}}_{abcd}.$$

Задамо $\mathsf{R}^\perp$ локально розкладенням

$$\mathsf{R}^\perp\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)\xi_\beta = (\mathsf{R}^\perp)^\alpha_{\beta ij}\,\xi_\alpha.$$

<u>Впр.</u> Аналогічно до формули для локальних коефіцієнтів тензора кривини перевірити, що

$$(\mathsf{R}^\perp)^\alpha_{\beta ij} = \frac{\mu_{\beta\alpha|j}}{\partial u^i} - \frac{\mu_{\beta\alpha|i}}{\partial u^j} + \sum_{\gamma=1}^{q}\left(\mu_{\beta\gamma|j}\,\mu_{\gamma\alpha|i} - \mu_{\beta\gamma|i}\,\mu_{\gamma\alpha|j}\right)$$

для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha, \beta = \overline{1, q}$. Зокрема, цей вираз кососиметричний за парами i, j і α, β.

Виписуючи локальний вираз розкладення Вейнгартена, ми встановили, що

$$A_{\xi_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = b^\alpha_{ik}\, g^{kl}\, \frac{\partial}{\partial u^l},$$

звідки маємо

$$A_{\xi_\beta}\left(A_{\xi_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\right) = b^\alpha_{ik}\, g^{kl}\, A_{\xi_\beta}\left(\frac{\partial}{\partial u^l}\right) = b^\alpha_{ik}\, g^{kl}\, b^\beta_{lm}\, g^{ms}\, \frac{\partial}{\partial u^s}$$

для будь-яких α, β, i. Міняючи тут α і β місцями, отримаємо вираз для комутатора:

$$\left[A_{\xi_\beta}, A_{\xi_\alpha}\right] \frac{\partial}{\partial u^i} = \left(b^\alpha_{ik}\, b^\beta_{lm} - b^\beta_{ik}\, b^\alpha_{lm}\right) g^{kl}\, g^{ms}\, \frac{\partial}{\partial u^s}.$$

Тому в правій частині рівняння Річчі маємо

$$g\left(\left[A_{\xi_\beta}, A_{\xi_\alpha}\right]\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \left(b^\alpha_{ik}\, b^\beta_{lm} - b^\beta_{ik}\, b^\alpha_{lm}\right) g^{kl}\, g^{ms}\, g_{sj} =$$

$$= \left(b^\alpha_{ik}\, b^\beta_{lm} - b^\beta_{ik}\, b^\alpha_{lm}\right) g^{kl}\, \delta^m_j = \left(b^\alpha_{ik}\, b^\beta_{lj} - b^\beta_{ik}\, b^\alpha_{lj}\right) g^{kl}.$$

Cor. (Локальний запис рівнянь Річчі) Для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha, \beta = \overline{1, q}$

$$\xi^a_\alpha\, \xi^b_\beta\, r^c_i\, r^d_j\, \overline{\mathsf{R}}_{abcd} = -g^{kl}\left(b^\alpha_{ik}\, b^\beta_{jl} - b^\beta_{ik}\, b^\alpha_{jl}\right) + (\mathsf{R}^\perp)^\alpha_{\beta ij}.$$

Rem. І знову випадок загальних полів можна отримати з цього. Для гіперповерхні обидві частини нульові. Для підмноговида у многовиді постійної секційної кривини зліва 0, і отримуємо ''зовнішню'' формулу для $(\mathsf{R}^\perp)^\alpha_{\beta ij}$.

Цілком геодезичні підмноговиди

Розглянемо гладкий рімановий многовид (M, g) з рімановою зв'язністю ∇. Тут і далі вважаємо, що гладкість та, що необхідна для конкретної задачі.

Згадаємо, що регулярна (гладка) крива $\gamma\colon (\alpha, \beta) \to M$ є геодезичною (M, g), якщо для її натуральної параметризації (тобто такої, що $g(\gamma', \gamma') = 1$, але достатньо, щоб це була константа) $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Тут, щоб знайти $\nabla_{\gamma'}\gamma'(s_0)$ для $s_0 \in (\alpha, \beta)$, треба продовжити γ' на деяку відкриту $U \ni \gamma(s_0)$ полем X (тобто для будь-якого $s \in \gamma^{-1}(U)$ $\gamma'(s) = X_{\gamma(s)}$), і тоді $\nabla_{\gamma'}\gamma'(s_0) := (\nabla_X X)_{\gamma(s_0)}$ (як у конструкції лівої частини розкладень Гаусса і Вейнгартена, і аналогічно доводиться незалежність від продовження; насправді це окремий випадок тієї конструкції).

Нагадаємо також, що для будь-якої $p \in M$ і для будь-якого $v \in T_pM$ існує і єдина геодезична $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ для деякого $\varepsilon > 0$ така, що $\gamma(0) = p$ і $\gamma'(0) = v$ (тобто випущена з p у напрямку v). Єдиність тут більш точно означає, що для будь-яких двох геодезичних $\gamma, \mu\colon (\alpha, \beta) \to M$ якщо існує $t_0 \in (\alpha, \beta)$ таке, що $\gamma(t_0) = \mu(t_0)$ і $\gamma'(t_0) = \mu'(t_0)$, то $\gamma = \mu$ тотожно. Зауважимо, що постійні криві $\gamma = p$, що випущені у напрямку $v = 0$, теж вважають геодезичними.

Нехай тепер (M, r) – підмноговид у рімановому многовиді $(\overline{M}, \overline{g})$ з першою ф.ф. g, усі інші пов'язані об'єкти теж позначаємо як раніше.

<u>Pr.</u> (Розкладення Гаусса для кривої) Для будь-якої гладкої кривої $\gamma\colon (\alpha,\beta)\to M$ маємо у кожній точці кривої ортогональне розкладення на дотичну і нормальну компоненти:

$$\overline{\nabla}_{(r\circ\gamma)'}(r\circ\gamma)' = dr(\nabla_{\gamma'}\gamma') + B(\gamma',\gamma').$$

<u>Rem.</u> Тобто це рівність полів уздовж кривої γ зі значеннями у $T\overline{M}$. Їх можна визначити як гладкі відображення $\zeta\colon (\alpha,\beta)\to T\overline{M}$ такі, що для усіх $t\in(\alpha,\beta)$ $\zeta(t)\in T_{(r\circ\gamma)(t)}\overline{M}$. Зокрема, справа

$$dr(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t) := d_{\gamma(t)}r\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)\right)\in d_{\gamma(t)}r(T_{\gamma(t)}M)\subset T_{(r\circ\gamma)(t)}\overline{M}$$

і

$$B(\gamma',\gamma')(t) := B_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))\in N_{\gamma(t)}M\subset T_{(r\circ\gamma)(t)}\overline{M}.$$

► Продовжимо γ' полем X на окіл $U \ni \gamma(t_0)$ як вище. У свою чергу, продовжимо $dr(X)$ на окіл $V \ni r(\gamma(t_0))$ полем $\overline{X}$ (де вважаємо $r(U) \subset V$). Тоді для всіх $t \in \gamma^{-1}(U)$

$$\overline{X}_{r(\gamma(t))} = d_{\gamma(t)}r(X_{\gamma(t)}) = d_{\gamma(t)}r(\gamma'(t)) = (r \circ \gamma)'(t),$$

тобто $\overline{X}$ продовжує $(r \circ \gamma)'$. Запишемо розкладення Гаусса:

$$\overline{\nabla}_X X = dr(\nabla_X X) + B(X, X).$$

Для будь-якого $t \in \gamma^{-1}(U)$ тоді за означеннями зліва маємо у $\gamma(t)$

$$(\overline{\nabla}_X X)_{\gamma(t)} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{X})_{r(\gamma(t))} = \overline{\nabla}_{(r\circ\gamma)'}(r \circ \gamma)'(t),$$

а справа –

$$d_{\gamma(t)}r\left((\nabla_X X)_{\gamma(t)}\right) + B(X, X)_{\gamma(t)} =$$

$$= d_{\gamma(t)} r \left(\nabla_{\gamma'} \gamma'(t)\right) + B_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)),$$

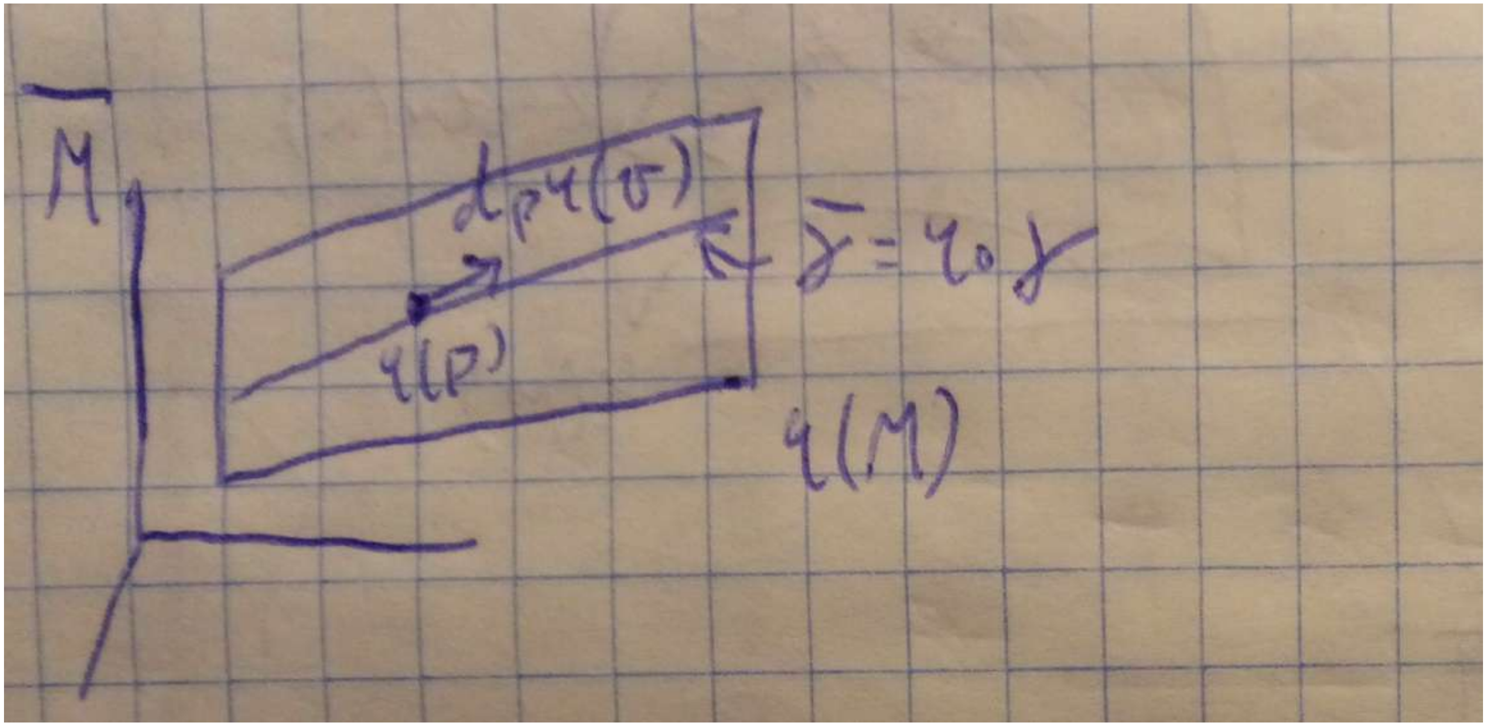
тобто якраз праву частину потрібної формули у t. ◀

<u>Cor.</u> Якщо $r \circ \gamma$ – геодезична $(\overline{M}, \overline{g})$, то γ – геодезична (M, g).

▶ Натурально параметризуємо γ. Тоді

$$\overline{g}((r \circ \gamma)', (r \circ \gamma)') = \overline{g}(dr(\gamma'), dr(\gamma')) = g(\gamma', \gamma') = 1,$$

тобто $r \circ \gamma$ теж натурально параметризована. Оскільки зліва у розкладенні Гаусса маємо $\overline{\nabla}_{(r \circ \gamma)'}(r \circ \gamma)' = 0$, то й справа обидві компоненти нульові, зокрема, $dr(\nabla_{\gamma'} \gamma') = 0$, а тоді й $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, бо r – занурення. ◀



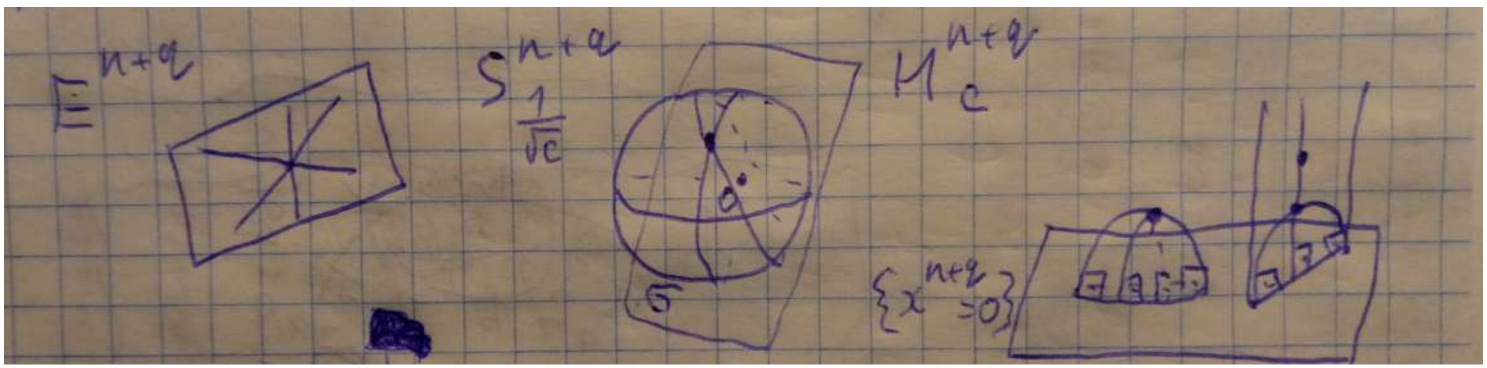
<u>def.</u> Підмноговид (M, r) у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$ називається цілком геодезичним, якщо для будь-яких $p \in M$ і $v \in T_pM$ будь-яка геодезична $\overline{\gamma}$ многовида $(\overline{M}, \overline{g})$, що випущена з $r(p)$ у напрямку $d_p r(v)$, лежить у $r(M)$, тобто існує крива γ в M така, що $\overline{\gamma} = r \circ \gamma$.

Rem. При цьому γ – геодезична в (M, g) з Cor. Іншими словами, цілком геодезичні підмноговиди ''складаються'' з геодезичних $(\overline{M}, \overline{g})$, що у них також є геодезичними. Зокрема, ми можемо побудувати приклади цілком геодезичних підмноговидів у стандартних просторах постійної кривини c, бо маємо опис усіх геодезичних таких просторів.

Ex.1. У $\overline{M}_0^{n+q} = E^{n+q}$ геодезичні – проміжки прямих, тому афінні підпростори (а також їхні відкриті підмножини) цілком геодезичні.

2. При $c > 0$ геодезичні $\overline{M}_c^{n+q} = S^{n+q}_{\frac{1}{\sqrt{c}}}$ (стандартної гіперсфери радіуса $\frac{1}{\sqrt{c}}$ у $\mathbb{R}^{n+q+1}$) – проміжки великих

кіл (тобто перетинів $S^{n+q}_{\frac{1}{\sqrt{c}}} \cap \sigma$, де σ – площина $\mathbb{R}^{n+q+1}$, що проходить через 0). Тому відкриті підмножини великих сфер (перетинів $S^{n+q}_{\frac{1}{\sqrt{c}}} \cap \sigma$, де σ – підпростір $\mathbb{R}^{n+q+1}$, що проходить через 0) цілком геодезичні.



<u>3.</u> При $c < 0$ геодезичні $\overline{M}^{n+q}_c = H^{n+q}_c$ (гіперболічного простору у моделі Пуанкаре) – проміжки напівкіл і напівпрямих у $\mathbb{R}^{n+q}_+$, що ортогональні до абсолюта

(гіперплощини $\{x^{n+q} = 0\}$), тому відкриті підмножини напівсфер і напівпросторів, що ортогональні до абсолюта, – цілком геодезичні.

4. Одновимірні цілком геодезичні підмноговиди у будь-якому рімановому многовиді – це геодезичні.

def. Підмноговид (M, r) у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$ будемо називати геодезичним в $p \in M$, якщо для будь-якого $v \in T_pM$ будь-яка геодезична $\overline{\gamma}$ многовида $(\overline{M}, \overline{g})$, що випущена з $r(p)$ в напрямку $d_pr(v)$, лежить у $r(M)$.

Rem. Звичайно, підмноговид цілком геодезичний тоді й тільки тоді, коли він геодезичний у кожній точці.

Pr. (Аналітичний критерій геодезичності)

1. Якщо $B = 0$, то (M, r) цілком геодезичний.

2. Якщо (M, r) геодезичний у $p \in M$, то $B_p = 0$.

► 1. Отже, маємо якісь $p \in M$, $v \in T_pM$. Випустимо з p геодезичну γ многовида (M, g), що задовольняє рівнянню $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, в напрямку v: $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Тоді її параметр s "майже натуральний": $g(\gamma', \gamma') = g_p(v, v)$ тотожно за властивістю паралельного поля γ' уздовж кривої, тобто постійне. У розкладенні Гаусса маємо

$$\overline{\nabla}_{(r\circ\gamma)'}(r\circ\gamma)'(s) = d_{\gamma(s)}r\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(s)\right) + B_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 0$$

для усіх s, бо γ – геодезична і $B = 0$. Оскільки

$$\overline{g}((r \circ \gamma)', (r \circ \gamma)') = g(\gamma', \gamma') = g_p(v, v)$$

постійне, це означає, що $r \circ \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ – геодезична $(\overline{M}, \overline{g})$, і для неї $(r \circ \gamma)(0) = r(p)$, $(r \circ \gamma)'(0) = d_p r(v)$. В силу єдиності, всі геодезичні $(\overline{M}, \overline{g})$, що випущені з $r(p)$ у напрямку образів векторів T_pM, мають такий вигляд (для значень параметра за межами $(-\varepsilon, \varepsilon)$ просто розглянемо ту ж саму конструкцію у відповідній точці).

2. Для довільного $v \in T_pM$ нехай $\overline{\gamma}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$ – геодезична $(\overline{M}, \overline{g})$ така, що $\overline{\gamma}(0) = r(p)$, $\overline{\gamma}'(0) = d_p r(v)$. За умовою геодезичності у p, тоді $\overline{\gamma} = r \circ \gamma$. Оскільки r – занурення, воно є ін'єкцією на якомусь околі p.

Тоді, вибравши $\varepsilon > 0$ достатньо малим, отримаємо з $r(\gamma(0)) = \overline{\gamma}(0) = r(p)$, що $\gamma(0) = p$. І з

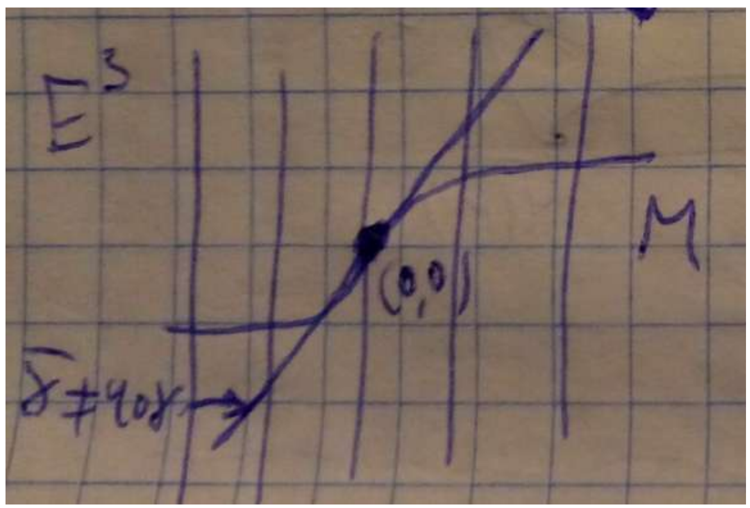
$$d_p r(v) = \overline{\gamma}'(0) = (r \circ \gamma)'(0) = d_p r(\gamma'(0))$$

та ін'єктивності $d_p r$ отримуємо $\gamma'(0) = v$. Отже при $s = 0$ у розкладенні Гаусса маємо:

$$\overline{\nabla}_{\overline{\gamma}'}\overline{\gamma}'(0) = d_p r\left(\nabla_{\gamma'}\gamma'(0)\right) + B_p(\gamma'(0), \gamma'(0)).$$

Ліворуч маємо 0 (знову можемо вважати параметр ''майже натуральним'' для обох кривих з тих же міркувань, що вище), тому праворуч обидва доданки нульові (оскільки це дотична і нормальна компоненти). Тобто для будь-якого $v \in T_pM$ $B_p(v, v) = 0$, а тоді з симетричності $B_p(v, w) = 0$ для будь-яких $v, w \in T_pM$. ◀

Rem. У 2. обернена імплікація, взагалі кажучи, невірна: у циліндра над графіком кубічної функції у E^3, що задається відображенням $r(s,t) = (s, s^3, t)$, у точці $(0,0)$ другі похідні r нульові, тому $b_{(0,0)} = 0$, але геодезичності у цій точці немає: дотична до графіку не лежить у поверхні.



Cor. Підмноговид цілком геодезичний тоді й тільки тоді, коли його друга ф.ф. нульова.

Ex. Для (відкритих підмножин) афінних підпросторів E^{n+q} у афінних координатах другі похідні $r_{ij} = 0$ (бо координатні функції лінійні), тому $B = 0$.

Pr. (Єдиність цілком геодезичних підмноговидів) Нехай (M, r) і $(\widetilde{M}, \widetilde{r})$ – цілком геодезичні повні зв'язні підмноговиди у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$ (тобто многовиди M і $\widetilde{M}$ зв'язні, а рімановi (M, g) і $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ з відповідними першими ф.ф. – повні у сенсі повноти внутрішньої метрики). Якщо існують такі $p \in M$, $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$, що $r(p) = \widetilde{r}(\widetilde{p})$ і $d_p r(T_p M) = d_{\widetilde{p}} \widetilde{r}(T_{\widetilde{p}} \widetilde{M})$, то $r(M) = \widetilde{r}(\widetilde{M})$. Зокрема, якщо ці многовиди вкладені, то вони еквівалентні.

▶ З повноти і зв'язності (M, g) та теореми Хопфа – Рінова випливає, що для будь-якої $q \in M$ точки p і q можна з'єднати найкоротшою. Її, у свою чергу, в силу повноти можна продовжити до натурально параметризованої геодезичної $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ такої, що $\gamma(s_0) = p$ і $\gamma(s_1) = q$. Оскільки (M, r) цілком геодезичний, з розкладення Гаусса аналогічно до доведень вище маємо, що $r \circ \gamma$ – (натурально параметризована) геодезична $(\overline{M}, \overline{g})$. При цьому $(r \circ \gamma)(s_0) = r(p) = \widetilde{r}(\widetilde{p})$, і

$$(r \circ \gamma)'(s_0) = d_p r(\gamma'(s_0)) \in d_p r(T_p M) = d_{\widetilde{p}} \widetilde{r}(T_{\widetilde{p}} \widetilde{M}).$$

Тому з того, що $(\widetilde{M}, \widetilde{r})$ цілком геодезичний, за означенням випливає, що існує $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ така, що $r \circ \gamma = \widetilde{r} \circ \widetilde{\gamma}$. Зокрема,

$$r(q) = r(\gamma(s_1)) = \widetilde{r}(\widetilde{\gamma}(s_1)) \in \widetilde{r}(\widetilde{M}).$$

Отже, $r(M) \subset \tilde{r}(\widetilde{M})$. Аналогічно доводиться $\tilde{r}(\widetilde{M}) \subset r(M)$. ◀

Rem. Це узагальнення теореми про єдиність геодезичних.

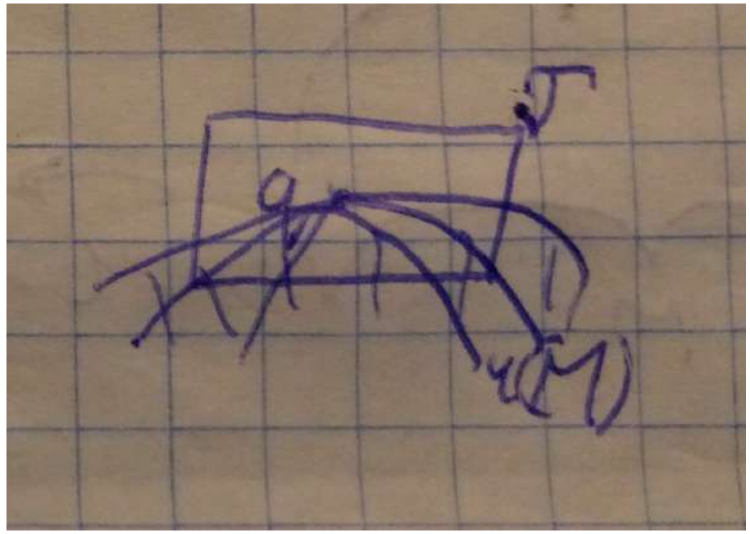
Ex. Зокрема, у прикладах Ex.1.–3. вище через кожну точку у напрямку кожного підпростора дотичного простора можна провести цілком геодезичний повний зв'язний вкладений підмноговид, що належить до описаних там сімейств. (Впр. Перевірити це.) Це означає, що з точністю до еквівалентності усі такі підмноговиди належать до описаних (і є їхніми зв'язними відкритими підмножинами, якщо прибрати вимогу повноти). Довільні повні зв'язні многовиди постійної секційної кривини за теоремою Картана – Кіллінга отримуються з $\overline{M}_c^{n+q}$ факторизацією за дією дискретної групи ізометрій (що зберігає локальні конструкції), тому повний опис цілком геодезичних підмноговидів можна отримати і для них.

<u>Rem.</u> Якщо $B_p = 0$ (зокрема, для геодезичного в p підмноговида), рівняння Гаусса дає для усіх $u, v, w, z \in T_pM$

$$\overline{g}_{r(p)}(\overline{\mathsf{R}}_{r(p)}(d_pr(u), d_pr(v))d_pr(w), d_pr(z)) =$$

$$= g_p(\mathsf{R}_p(u, v), w, z).$$

Зокрема, для будь-якої площини $\sigma \subset T_pM$ маємо $\overline{K}(d_pr(\sigma)) = K_{int}(\sigma)$. З цим пов'язане наступне геометричне визначення секційної кривини.



Для будь-яких $q \in \overline{M}$ і площини $\tau \subset T_q\overline{M}$ випустимо з q різноманітні геодезичні у напрямках векторів із τ. Вони утворюють локально 2-вимірний підмноговид (поверхню) (M, r) (чому?), що за побудовою є геодезичною у $p = r^{-1}(q)$. Тоді $\overline{K}(\tau)$ – це гауссова кривина цієї поверхні у p.

Омбілічність

Тут знову (M, r) – (гладкий) підмноговид вимірності (тут і далі) $\geqslant 2$ у рімановому $(\overline{M}, \overline{g})$. Згадаємо, що у кожній $p \in M$ оператор Вейнгартена A підмноговида визначає білінійне $A_p \colon N_pM \times T_pM \to T_pM$ таке, що для будь-яких поля X і нормального поля ξ (на околі p) $(A_\xi X)_p = (A_p)_{\xi_p} X_p$. Зокрема, для будь-якого $\nu \in N_pM$, фіксуючи його у якості нормального аргумента, визначаємо лінійний оператор $A_\nu := (A_p)_\nu(\cdot) \colon T_pM \to T_pM$ – оператор Вейнгартена у p, що відповідає ν. З властивостей A випливає, що A_ν самоспряжений відносно g_p.

<u>def.</u> (M, r) називають омбілічним у точці $p \in M$ (або говорять, що p – омбілічна точка (M, r)), якщо для будь-якого $\nu \in N_pM$ існує $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що $A_\nu = \lambda\, id_{T_pM}$.

Rem. Тут λ залежить від p і ν.

def. (M,r) називають цілком омбілічним, якщо він омбілічний у будь-якій $p \in M$.

Ex. Якщо (M,r) геодезичний у p, то $B_p = 0$, тому $A_p = 0$, отже $A_\nu = 0$ для будь-якого ν, і (M,r) омбілічний у p. Зокрема, цілком геодезичні підмноговиди є цілком омбілічними. У класичній диференціальній геометрії поверхонь геодезичні точки (точки сплощення) виключають з омбілічних. Наступне твердження вірне для будь-яких підмноговидів:

Lem. Для будь-яких $p \in M$ і $\nu \in N_pM$

$$\overline{g}_{r(p)}(H_p, \nu) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu,$$

де $n = \dim M$, H – поле середньої кривини підмноговида.

▶ Нехай $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормований базис T_pM. Тоді

$$\overline{g}_{r(p)}(H_p, \nu) = \overline{g}_{r(p)}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_p(e_i, e_i), \nu\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i g_p(A_\nu(e_i), e_i) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr} A_\nu$$

за зв'язком другої ф.ф. і оператора Вейнгартена та з означення сліда лінійного оператора. ◀

Pr. (M, r) омбілічний у p тоді й тільки тоді, коли виконана одна з двох еквівалентних умов:

1. $A_\nu = \overline{g}_{r(p)}(H_p, \nu)\, id_{T_pM}$ для будь-якого $\nu \in N_pM$;

2. $B_p(\cdot, \cdot) = g_p(\cdot, \cdot)\, H_p$.

$\blacktriangleright$ Еквівалентність омбілічності і 1. випливає з Lem. і того, що для діагонального оператора $A_\nu = \lambda\, id_{T_pM}$ коефіцієнт $\lambda = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} A_\nu$.

Якщо виконується 1., то для будь-яких $v, w \in T_pM$ маємо за зв'язком між другою ф.ф. і оператором Вейнгартена

$$\overline{g}_{r(p)}(B_p(v, w), \nu) = g_p(A_\nu v, w) = g_p(\overline{g}_{r(p)}(H_p, \nu)v, w) =$$

$$= \overline{g}_{r(p)}(H_p, \nu) g_p(v, w) = \overline{g}_{r(p)}(g_p(v, w) H_p, \nu)$$

для будь-якого $\nu \in N_pM$, звідки випливає 2. Якщо ж виконується 2., то аналогічним способом отримуємо, що для будь-якого ν

$$g_p(A_\nu v, w) = g_p(\overline{g}_{r(p)}(H_p, \nu)v, w)$$

для будь-яких $v, w \in T_pM$, звідки маємо 1. ◀

Cor. (M, r) цілком омбілічний тоді й тільки тоді, коли виконана одна з двох еквівалентних умов:

1. $A_\xi X = \overline{g}(H, \xi)X$ для будь-яких X, ξ;

2. $B(X, Y) = g(X, Y)H$ для будь-яких X, Y.

▶ Застосовуємо Pr. до значень цих полів у кожній точці M. ◀

Rem. Для гіперповерхні з (локальним) одиничним нормальним полем ξ, якому відповідають скалярна друга ф.ф. b ($B = b\,\xi$) і середня кривина H (поле середньої кривини $H\,\xi$), умови з Cor. набувають вигляду відповідно $A_\xi X = H\,X$ і $b(X,Y) = H\,g(X,Y)$ (і так само для кожної точки).

Ex. Для гіперсфери радіуса R у E^{n+1} маємо $b = \pm\frac{1}{R}\,g$ (див. вище), тому вона цілком омбілічна (і з постійною середньою кривиною $H = \pm\frac{1}{R}$).

Lem. Нехай (M,r) – цілком омбілічний. Тоді для будь-яких полів X, Y, ξ

1. $\nabla^\perp_X B = g\,\nabla^\perp_X H$;

2. $(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi)^{\perp} = \mathsf{R}^{\perp}(X,Y)\xi$.

▶ 1. За означенням і попереднім Cor.,

$$(\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) =$$

$$= \nabla^{\perp}_X (g(Y,Z)H) - g(\nabla_X Y, Z)H - g(Y, \nabla_X Z)H =$$

$$= g(Y,Z)\nabla^{\perp}_X H + \underbrace{(X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z))}_{0} H,$$

бо ∇ – ріманова зв'язність g.

2. У правій частині рівнянні Річчі $[A_\xi, A_\eta] = 0$, оскільки за Cor. A_ξ і A_η "діагональні" (точніше, у кожній $p \in M$ оператори $(A_p)_{\xi_p}$ і $(A_p)_{\eta_p}$ пропорційні тотожним), тому там залишається лише оператор кривини нормальної зв'язності. ◀

Pr. Нехай (M,r) – цілком омбілічний підмноговид у многовиді з постійною секційною кривиною. Тоді $\mathrm{R}^{\perp}=0$ і для будь-якого поля X на M $\nabla^{\perp}_{X}H=0$.

► У цьому випадку в лівих частинах рівняня Кодацці та Річчі маємо нулі, зокрема, рівняння Річчі та 2. в Lem. вище тоді дають $\mathrm{R}^{\perp}=0$.

Із рівняння Кодацці та 1. там же маємо для будь-яких X,Y,Z на M

$$g(Y,Z)\nabla^{\perp}_{X}H=g(X,Z)\nabla^{\perp}_{Y}H.$$

У кожній $p\in M$ замість значень Y,Z підставимо (коректність випливає з лінійності) $v,w\in T_pM$ відповідно такі, що $w\perp X_p$ відносно g_p і $v=w\neq 0$ (нагадаємо, що тут всюди вимірність M не менша за 2). Отримаємо $(\nabla^{\perp}_{X}H)_p=0$. ◄