

Задача 1. Розглянемо просту поверхню M^2 в \mathbb{R}^3 . За визначенням, для кожної точки P на поверхні M^2 існує окіл U , який є топологічно еквівалентним (гомеоморфним) відкритому диску D в \mathbb{R}^2 .

Окіл U разом з гомеоморфізмом $\varphi: D \rightarrow U$ утворюють *карту* на поверхні M^2 . Набір карт $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$, який покриває усю поверхню M^2 , тобто $\bigcup_{j \in J} U_j \supset M$, утворює *атлас* поверхні M^2 .

Яку найменшу кількість карт повинен мати атлас, якщо:

- 1) M^2 – це сфера
- 2) M^2 – це сфера з однією ручкою, тобто, M^2 – тор
- * 3) M^2 – це сфера з двома ручками, тобто, M^2 – крендель
- 4) M^2 – це сфера з однією виколотою точкою
- 5) M^2 – це сфера з двома виколотими точками
- ***** 6) M^2 – це сфера з t ручками та n виколотими точками ?

Зауваження. Інтуїтивно, щоб отримати карту, потрібно взяти диск (круг) на площині і про деформувати його – дозволяється розтягувати, стискувати, викривляти, вигинати, закручувати і т.д., але не можна нічого розривати і не можна нічого склеювати...

Побудова простої поверхні схожа на побудову моделі з пап'є-маше: вирізаємо клаптики (топологічно еквівалентні диску/кругу/квадрату) і поступово наклеюємо їх один на інший так, щоб разом вони утворили якусь складну поверхню.

Задача 2.1. Розглянемо поверхню F в \mathbb{R}^3 , задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases}, \quad (u^1)^2 + (u^2)^2 < R^2$$

1) Якою є область задання D поверхні F ?

2) Покажіть, що F є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в \mathbb{R}^3 . Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що F є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні F .

Задача 2.2. Розглянемо поверхню \tilde{F} в \mathbb{R}^3 , задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \frac{\tilde{u}^1}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \frac{\tilde{u}^2}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2}} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} -\infty < \tilde{u}^1 < \infty \\ -\infty < \tilde{u}^2 < \infty \end{array}$$

1) Якою є область задання \tilde{D} поверхні \tilde{F} ?

2) Покажіть, що \tilde{F} є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в \mathbb{R}^3 . Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що \tilde{F} є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні \tilde{F} .

***Задача 2.3.** Розглянемо поверхню \hat{F} в \mathbb{R}^3 , задану параметрично

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \frac{4\hat{u}^1}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} \\ x^2 = R \cdot \frac{4\hat{u}^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2}, & -\infty < \hat{u}^1 < \infty \\ x^3 = R \cdot \frac{4 - (\hat{u}^1)^2 - (\hat{u}^2)^2}{4 + (\hat{u}^1)^2 + (\hat{u}^2)^2} & -\infty < \hat{u}^2 < \infty \end{cases}$$

1) Якою є область задання \hat{D} поверхні \hat{F} ?

2) Покажіть, що \hat{F} є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в \mathbb{R}^3 . Яка саме це частина сфери?

3) Доведіть, що \hat{F} є регулярною параметрично заданою поверхнею.

4) Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні \hat{F} .

Задача 2.4. Розглянемо поверхні F і \tilde{F} із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в \mathbb{R}^3 .

Проаналізуйте область W на сфері, що є перетином областей F і \tilde{F} .

В області W одночасно діють дві системи внутрішніх координат (u^1, u^2) і $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$.

Як пов'язані між собою ці системи координат в області W на сфері?

Чи є перехід від (u^1, u^2) до $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ регулярною заміною координат?

***Задача 2.5.** Розглянемо поверхні \tilde{F} і \hat{F} із задач 2.1 і 2.2. Обидві поверхні представляють собою якісь області на сфері радіуса R з центром в початку координат в \mathbb{R}^3 .

Проаналізуйте область Ω на сфері, що є перетином областей \tilde{F} і \hat{F} .

В області Ω одночасно діють дві системи внутрішніх координат $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ і (\hat{u}^1, \hat{u}^2) .

Як пов'язані між собою ці системи координат в області Ω на сфері?

Чи є перехід від $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ і (\hat{u}^1, \hat{u}^2) регулярною заміною координат?

Задача 3. Розглянемо регулярну криву γ з радіус-вектором

$$\vec{x} = \vec{f}(s), \quad a < s < b,$$

в евклідовому просторі \mathbb{R}^3 .

Запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – головними нормаллями кривої γ . Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.

Аналогічно, запишіть радіус-вектор лінійчатої поверхні, утвореної прямими – бінормаллями кривої γ . Проаналізуйте регулярність цієї поверхні. Опишіть криві, з яких утворюється відповідна координатна сітка на поверхні.