

**Задача 1.0.** Розглянемо площину  $F$ , що проходить через точку  $P(2,0,1)$  і натягнута на вектори  $(1,1,2)$  і  $(0,4,0)$ . Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) площини  $F$ . Перевірте регулярність параметрично заданої площини  $F$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}_P + u^1 \vec{e}_1 + u^2 \vec{e}_2 \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + u^1 \\ u^1 + 4u^2 \\ 1 + 2u^1 \end{pmatrix}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \\ \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Rank} \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2\end{aligned}$$

Відповідь: Параметрично задана площина  $F$  є регулярною поверхнею

**Задача 1.1.** Розглянемо циліндр  $F$ , утворений прямими, що проходять че-

рез точки кривої  $\gamma$ : 
$$\begin{cases} x^1 = \cosh t \\ x^2 = t \\ x^3 = 0 \end{cases}$$
 і мають спільний напрямний вектор  $\vec{a} = (1, 0, 1)$ .

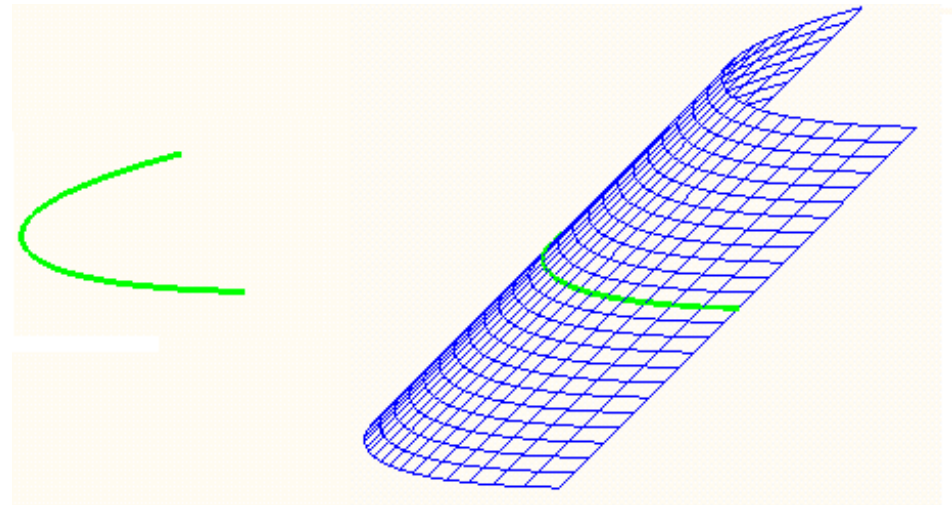
Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) циліндра  $F$ , перевірте регулярність циліндра. \* Знайдіть криву, по якій циліндр  $F$  перетинається з площиною, ортогональною твірним прямим циліндра.

*Розв'язання.*

$$\vec{x} = \vec{f}_\gamma(u^1) + u^2 \vec{e}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 \\ u^1 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u^1 + u^2 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

$$(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$



$$\vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cosh u^1 + u^2 \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

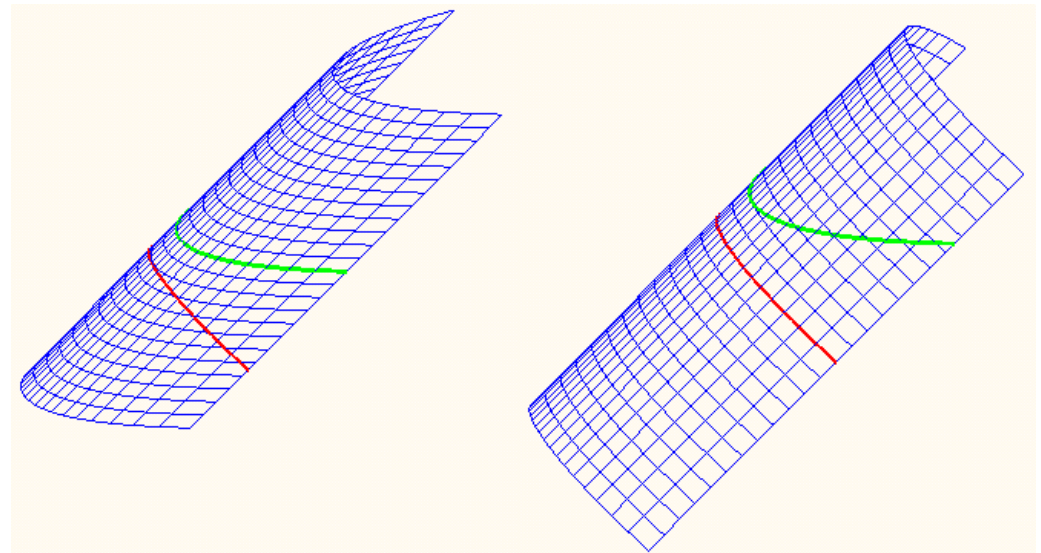
$$\left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) = \begin{pmatrix} \sinh u^1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Rank} \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) = \text{Rank} \begin{pmatrix} \sinh u^1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv 2$$

Відповідь: Заданий циліндр  $F$  є регулярною параметрично заданою поверхнею

\*Додаток: Площина  $x^1 + x^3 = 0$ ,

$$\cosh u^1 + 2u^2 = 0, \quad u^2 = -\frac{1}{2} \cosh u^1$$

$$\vec{f}(u^1, -\frac{1}{2} \cosh u^1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh u^1 \\ 2u^1 \\ -\cosh u^1 \end{pmatrix}$$



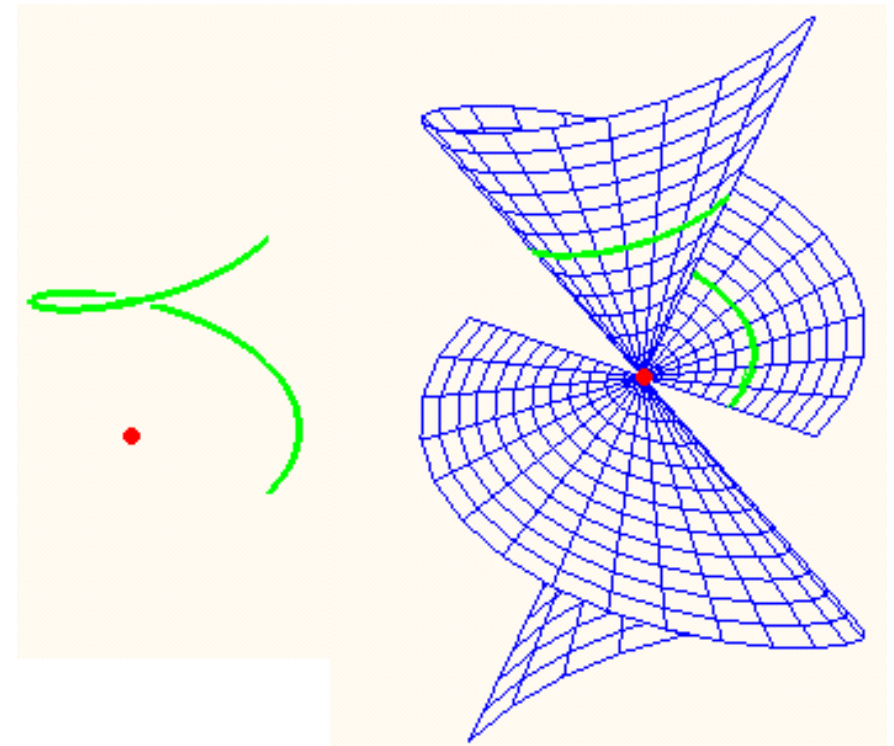
**Задача 1.2.** Розглянемо конус  $F$ , утворений прямими, що проходять через

точку  $O(0,0,0)$  і точки кривої  $\gamma$ : 
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$$
. Запишіть параметричне

рівняння (радіус-вектор) конуса  $F$ , перевірте регулярність конуса. \*Знайдіть криву, по якій конус  $F$  перетинається зі сферою одиничного радіусу з центром в вершині конуса - точці  $O$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (\vec{f}_\gamma(u^1) - \vec{x}_O) \cdot u^2 \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} r \cos u^1 \\ r \sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix} \cdot u^2 = \begin{pmatrix} ru^2 \cos u^1 \\ ru^2 \sin u^1 \\ hu^1 u^2 \end{pmatrix} \\ &(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$



$$\vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} ru^2 \cos u^1 \\ ru^2 \sin u^1 \\ hu^1 u^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ru^2 \sin u^1 & r \cos u^1 \\ ru^2 \cos u^1 & r \sin u^1 \\ hu^2 & hu^1 \end{pmatrix},$$

$$\left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = \begin{pmatrix} hru^2 (u^1 \cos u^1 - \sin u^1) \\ hru^2 (u^1 \sin u^1 + \cos u^1) \\ -r^2 u^2 \end{pmatrix}, \quad \left| \left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] \right| = r \cdot |u^2| \cdot \sqrt{h^2 (u^1)^2 + 1} + r^2$$

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow u^2 \neq 0, \quad \text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \end{pmatrix} < 2 \Leftrightarrow u^2 = 0$$

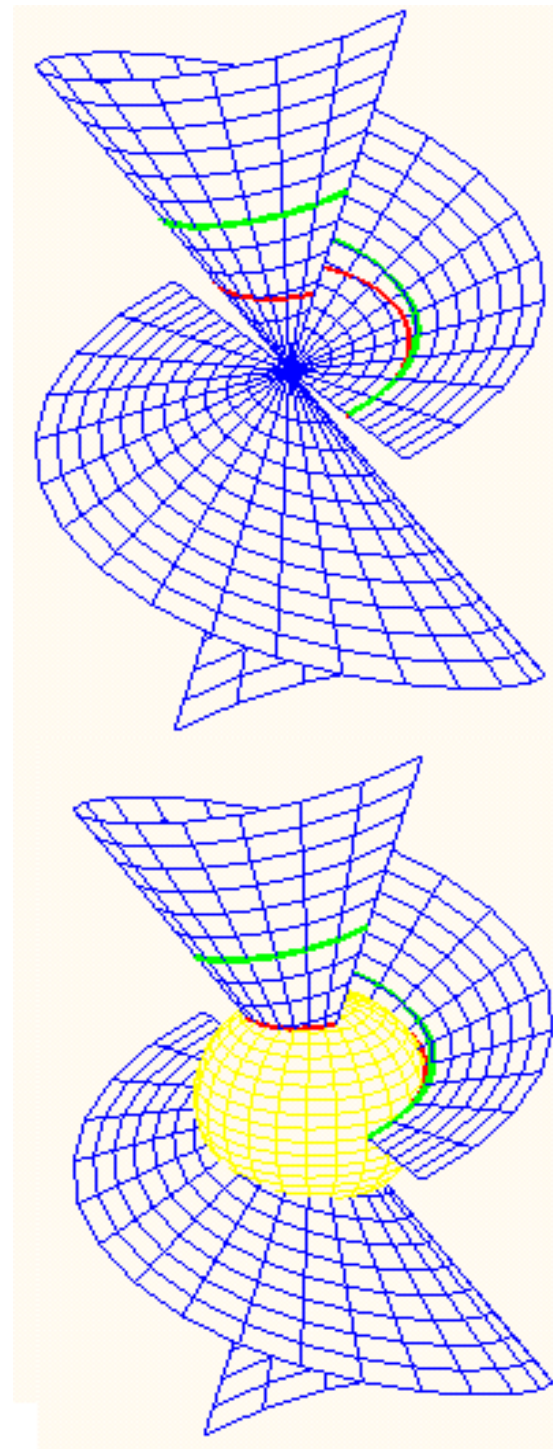
Відповідь: Заданий конус  $F$  є регулярною параметрично заданою поверхнею в усіх своїх точках, за виключенням вершини  $O$

\*Додаток:

Сфера  $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$

$$(r^2 + h^2(u^1)^2)(u^2)^2 = 1, \quad u^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2(u^1)^2}}$$

$$\vec{f}(u^1, \pm \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2(u^1)^2}}) = \pm \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2(u^1)^2}} \cdot \begin{pmatrix} r \cos u^1 \\ r \sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix}$$



**Задача 1.3.** Розглянемо торсову поверхню  $F$ , утворену дотичними прями-

ми гвинтової лінії  $\gamma$ : 
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$$
. Запишіть параметричне рівняння

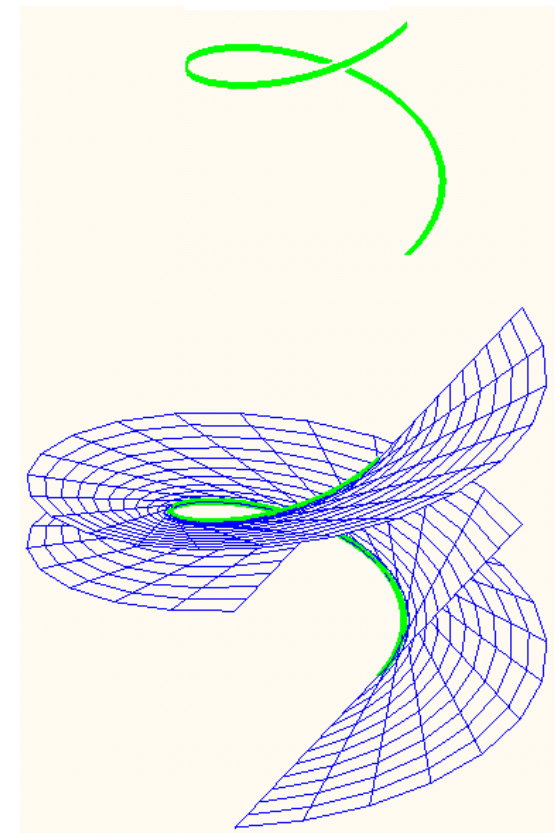
(радіус-вектор) поверхні  $F$ , перевірте регулярність цієї поверхні.

*Розв'язання.*

$$\vec{x} = \vec{f}_\gamma(u^1) + u^2 \cdot \frac{d\vec{f}_\gamma}{dt}(u^1)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos u^1 \\ r \sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} -r \sin u^1 \\ r \cos u^1 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ h(u^1 + u^2) \end{pmatrix}$$

$$0 < u^1 < 2\pi, \quad -\infty < u^2 < \infty$$



$$\vec{f}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) \\ r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) \\ h(u^1 + u^2) \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) = \begin{pmatrix} -r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) & -r \sin u^1 \\ r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) & r \cos u^1 \\ h & h \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} -r(\sin u^1 + u^2 \cos u^1) & -r \sin u^1 \\ r(\cos u^1 - u^2 \sin u^1) & r \cos u^1 \\ h & h \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} -u^2 \cos u^1 & -r \sin u^1 \\ -u^2 \sin u^1 & r \cos u^1 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank} \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) = 2 \Leftrightarrow u^2 \neq 0, \quad \text{Rank} \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right) < 2 \Leftrightarrow u^2 = 0,$$

Відповідь: Задана торсова поверхня  $F$  є регулярною параметрично заданою поверхнею всюди, за виключенням точок початкової гвинтової лінії (де  $u^2 = 0$ )



**\*Задача 2.1.** Проаналізуйте регулярність циліндричної поверхні  $F$  з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{a}$ , утвореної прямими з напрямним вектором  $\vec{a}$ , що проходять через точки кривої  $\gamma$  з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$ .

Розв'язання:

$$\vec{f}(u^1, u^2) = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{a}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \frac{d\vec{\xi}}{du^1}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{a}, \quad \left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = \left[ \frac{d\vec{\xi}}{du^1}, \vec{a} \right]$$

Особливі точки на параметрично заданій циліндричній поверхні,

$$\left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = \vec{0},$$

виникають або якщо  $\frac{d\vec{\xi}}{du^1} = \vec{0}$ , тобто якщо базова крива  $\gamma$  містить сингулярну

точку (і тоді уся твірна пряма циліндра, яка проходить через особливу точку базової кривої, буде особливим ребром на циліндрі), або якщо в якійсь точці на базовій кривій  $\gamma$  її дотичний вектор є колінеарним напрямному вектору  $\vec{a}$  твірних прямих циліндра.

**\*Задача 2.2.** Проаналізуйте регулярність конічної поверхні  $F$  з радіус-вектором  $\vec{x} = u^2 \cdot \vec{a}(u^1)$ , утвореної прямими, що проходять через точку  $O(0,0,0)$  і точки кривої з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{a}(u^1)$ .

Розв'язання:

$$\vec{f}(u^1, u^2) = u^2 \cdot \vec{a}(u^1), \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = u^2 \cdot \frac{d\vec{a}}{du^1}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{a}, \quad \left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = u^2 \cdot \left[ \frac{d\vec{a}}{du^1}, \vec{a} \right]$$

Особливі точки на параметрично заданій конічній поверхні,

$$\left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = \vec{0},$$

виникають або якщо  $u^2 = 0$ , що відповідає вершині конуса, або якщо в якійсь точці на базовій кривій  $\gamma$  виконано  $\left[ \frac{d\vec{a}}{du^1}, \vec{a} \right] = \vec{0}$  і тоді уся твірна пряма конуса, яка проходить через відповідну точку базової кривої, буде особливим ребром на конусі.

**\*Задача 2.3.** Проаналізуйте регулярність торсової поверхні  $F$  з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\tau}(u^1)$ , утвореної дотичними прямими кривої  $\gamma$  з радіус-вектором  $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$ .

Розв'язання:  $\vec{f}(u^1, u^2) = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\tau}(u^1)$ ,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1} = \vec{\tau} + u^2 \cdot k \vec{\nu}, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} = \vec{\tau}, \quad \left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = u^2 \cdot k [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$$

Особливі точки на параметрично заданій торсовій поверхні,

$$\left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^2} \right] = \vec{0},$$

виникають або якщо  $u^2 = 0$ , що відповідає точкам початкової кривої  $\gamma$ , яку є особливим ребром на торсовій поверхні, або якщо в якійсь точці на базовій кривій  $\gamma$  кривина  $k=0$ , і тоді уся твірна пряма торсової поверхні, яка проходить через відповідну точку перегину базової кривої  $\gamma$ , буде особливим ребром на торсовій поверхні.

**\*\*Задача 2.4.** Чи може циліндрична поверхня бути площиною?

**\*\*Задача 2.5.** Чи може конічна поверхня бути площиною?

**\*\*Задача 2.6.** Чи може торсова поверхня бути площиною?

**Задача 3.1.1.** Розглянемо вертикальну пряму  $x^1=r>0$  в площині  $x^1x^3$ . Яка поверхня утворюється в  $\mathbb{R}^3$  обертанням вказаної прямої навколо осі  $x^3$ ? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Розв'язання. Пряма  $\gamma$  задається параметрично

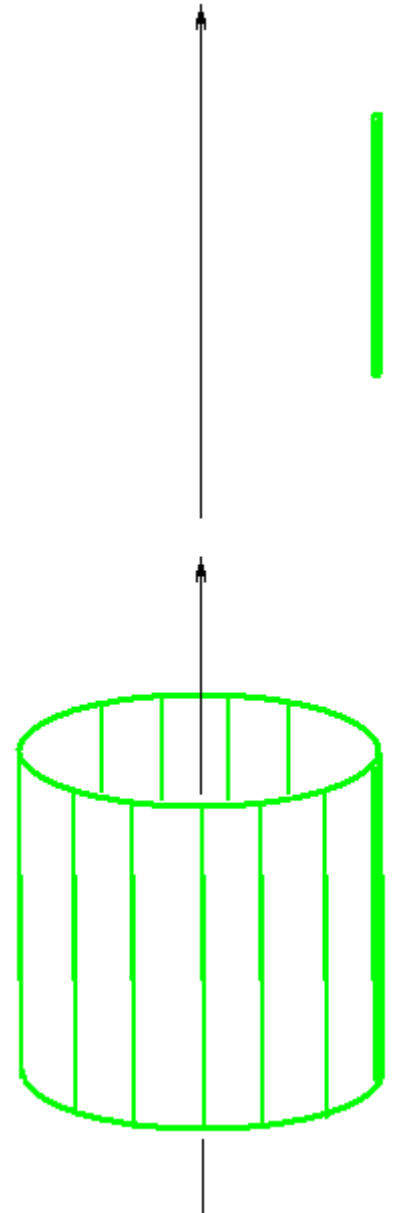
$$\begin{cases} x^1 = r \\ x^2 = 0 \\ x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$

Відповідна поверхня обертання (навколо осі  $x^3$ ) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ t \end{pmatrix},$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \varphi \\ x^2 = r \sin \varphi \\ x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty, \quad \alpha < \varphi < \beta.$$



## Вектор-функція

$$\vec{f}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} 0 & -r \sin \varphi \\ 0 & r \cos \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Таким чином, задана поверхня обертання – це круговий циліндр. Поверхня є регулярною, на ній немає особливих точок.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x^1 = r \cos \varphi \\ x^2 = r \sin \varphi, & -\infty < t < \infty, \quad \alpha < \varphi < \beta. \\ x^3 = t \end{cases}$$

**Задача 3.1.2.** Розглянемо горизонтальну пряму  $x^3=r>0$  в площині  $x^1x^2$ . Яка поверхня утворюється в  $\mathbb{R}^3$  обертанням вказаної прямої навколо осі  $x^3$ ? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Розв'язання. Пряма  $\gamma$  задається параметрично

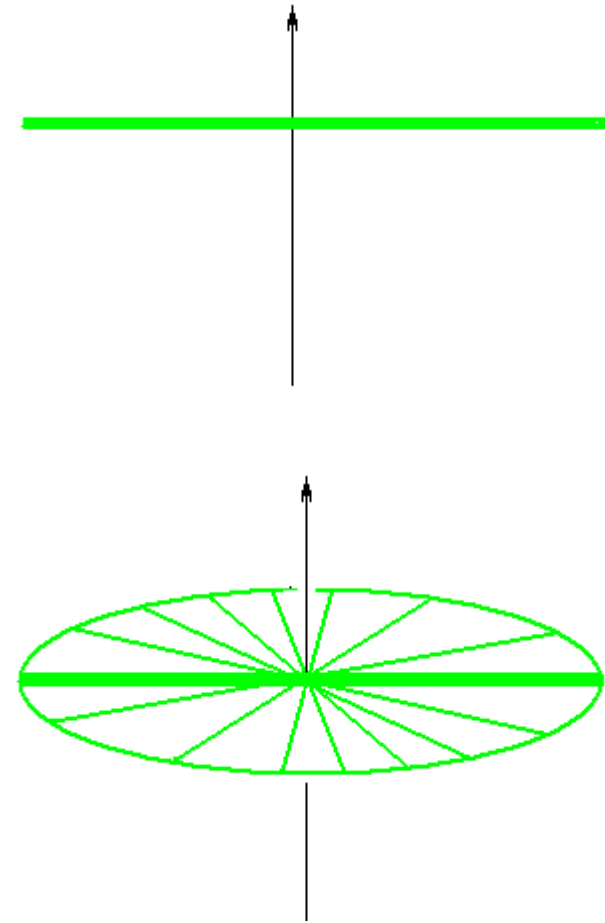
$$\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = 0 \\ x^3 = r \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$

Відповідна поверхня обертання  $F$  (навколо осі  $x^3$ ) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cos \varphi \\ t \sin \varphi \\ r \end{pmatrix},$$

тобто,

$$\begin{cases} x^1 = t \cos \varphi \\ x^2 = t \sin \varphi \\ x^3 = r \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$



## Вектор-функція

$$\vec{f}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} t \cos \varphi \\ t \sin \varphi \\ r \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} \cos \varphi - t \sin \varphi \\ \sin \varphi & t \cos \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В точках з  $t \neq 0$  маємо  $\text{Rank } J = 2$ . В точках з  $t = 0$  маємо  $\text{Rank } J = 1$ .

Отже, задана поверхня обертання  $F$  – горизонтальна площина – має єдину особливу точку  $P(0,0,r)$ , що відповідає значенню  $t=0$ . В усіх інших точках умови регулярності будуть виконані, тому задана поверхня  $F$  з виколотою точкою  $P$  буде регулярною параметрично заданою поверхнею.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x^1 = t \cos \varphi \\ x^2 = t \sin \varphi, & -\infty < t < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \\ x^3 = r \end{cases}$$



### Задача 3.2. Розглянемо ланцюгову лінію

$$\begin{cases} x^1 = r \cosh t \\ x^3 = t \end{cases}$$

Яка поверхня утворюється в  $\mathbb{R}^3$  обертанням цієї лінії навколо осі  $x^3$ ?

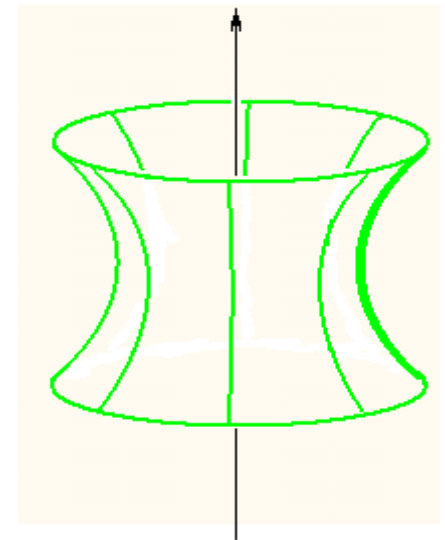
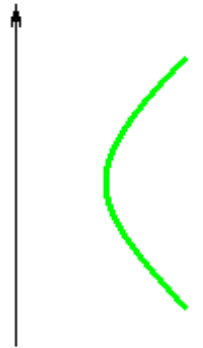
Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Розв'язання. Крива  $\gamma$  задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = r \cosh t \\ x^2 = 0 \\ x^3 = t \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$

Відповідна поверхня обертання  $F$  (навколо осі  $x^3$ ) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cosh t \cos \varphi \\ r \cosh t \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}, \quad \text{тобто,} \quad \begin{cases} x^1 = r \cosh t \cos \varphi \\ x^2 = r \cosh t \sin \varphi \\ x^3 = t \end{cases}$$
$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$



## Вектор-функція

$$\vec{f}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cosh t \cos \varphi \\ r \cosh t \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}$$

є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} r \sinh t \cos \varphi & -r \cosh t \sin \varphi \\ r \sinh t \sin \varphi & r \cosh t \cos \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Отже, задана поверхня обертання  $F$  є регулярною параметрично заданою поверхнею. Вона називається *катеноїд*.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x^1 = r \cosh t \cos \varphi \\ x^2 = r \cosh t \sin \varphi, & -\infty < t < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \\ x^3 = t \end{cases}$$

**Задача 3.3.** Розглянемо трактрису  $\begin{cases} x^1 = \frac{1}{\cosh t} \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases}$

Яка поверхня утворюється в  $\mathbb{R}^3$  обертанням цієї лінії навколо осі  $x^3$ ?

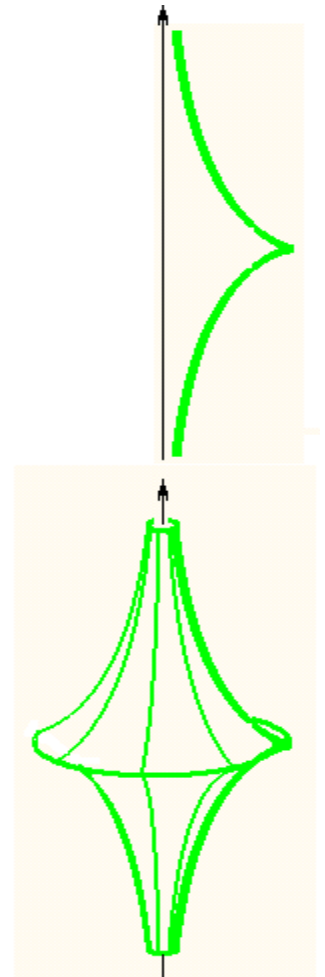
Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

*Розв'язання.* Крива  $\gamma$  задається параметрично

$$\begin{cases} x^1 = \frac{r}{\cosh t} \\ x^2 = 0 \\ x^3 = r(t - \tanh t) \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$$

Відповідна поверхня обертання  $F$  (навколо осі  $x^3$ ) задається радіус-вектором

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \cos \varphi \\ \frac{1}{\cosh t} \sin \varphi \\ t - \tanh t \end{pmatrix}, \quad \text{тобто,} \quad \begin{cases} x^1 = \frac{1}{\cosh t} \cos \varphi \\ x^2 = \frac{1}{\cosh t} \sin \varphi \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases}, \quad \begin{matrix} -\infty < t < \infty \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{matrix}.$$



$$\text{Вектор-функція } \vec{f}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh t} \cos \varphi \\ \frac{1}{\cosh t} \sin \varphi \\ t - \tanh t \end{pmatrix}$$

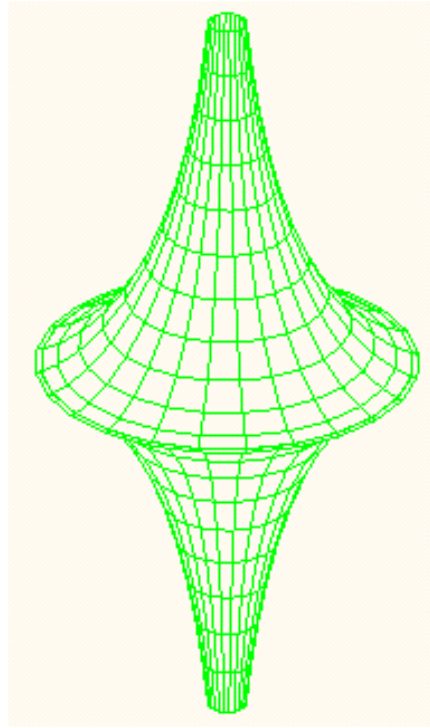
є неперервно диференційовною. Перевіримо умову регулярності:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \text{Rank} \begin{pmatrix} -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \cos \varphi & -\frac{1}{\cosh t} \sin \varphi \\ -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \sin \varphi & \frac{1}{\cosh t} \cos \varphi \\ \tanh^2 t & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо  $t \neq 0$ , то  $\text{Rank } J = 2$  і умова регулярності виконана.

Якщо ж  $t = 0$ , то  $\text{Rank } J < 2$  і умова регулярності порушена. Отже, задана поверхня обертання  $F$  має особливі точки (які утворюють ребро поверхні) і тому не є регулярною параметрично заданою поверхнею.

Поверхня називається *псевдосфера* або *поверхня Бельтрамі*



$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x^1 = \frac{1}{\cosh t} \cos \varphi \\ x^2 = \frac{1}{\cosh t} \sin \varphi, \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases} \quad \begin{array}{l} -\infty < t < \infty \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{array}$$

\***Задача 3.4.** Розглянемо поверхню в  $\mathbb{R}^3$ , утворену обертанням кривої  $\gamma$

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

навколо осі  $x^3$ . Запишіть радіус-вектор цієї поверхні, перевірте її регулярність та зробіть висновок про те, коли на поверхні обертання можуть виникнути особливі точки (де порушується умова регулярності).

Розв'язання. Поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \cos \varphi \\ x^2 = r(t) \sin \varphi, & a < t < b, \quad \alpha < \varphi < \beta. \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

Умова регулярності:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial t} & \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \equiv 2.$$

$$\text{Маємо: } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial t} & \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi & r \cos \varphi \\ \frac{dh}{dt} & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо  $r(t_0)=0$ , тобто, коли меридіан перетинає вісь обертання,  $\text{Rank } J < 2$ . Отже, при  $t=t_0$  умова регулярності порушена, отримуємо особливу точку  $V$  на параметризованій поверхні обертання. Координати цієї особливої точки як точки в просторі  $V(0, 0, h(t_0))$ .

Якщо  $\frac{dr}{dt}(t_0) = 0$ ,  $\frac{dh}{dt}(t_0) = 0$ , тобто, коли на меридіані є особлива точка,

то тоді  $\text{Rank } J < 2$ . Отже, при  $t=t_0$  умова регулярності порушена, також отримуємо особливу точку  $V$  на параметризованій поверхні обертання. Координати цієї особливої точки як точки в просторі  $V(r(t_0)\cos\varphi, r(t_0)\sin\varphi, h(t_0))$  залежать від кута обертання  $\varphi$ . Таким чином, на поверхні обертання виникає коло особливих точок поверхні, утворене обертанням особливої точки меридіана.

Якщо меридіан не перетинає вісь обертання і не має особливих точок, поверхня обертання буде регулярною параметрично заданою поверхнею.

**Задача 4.** Проаналізуйте регулярність наступних неявно заданих поверхонь та, якщо є, вкажіть особливі (сингулярні) точки, де порушуються умови регулярності:

1) площина:  $a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0$

2) еліпсоїд:  $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 = 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

3) гіперболоїд:  $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 - a_3 (x^3)^2 = \pm 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

4) параболоїд:  $x^3 = a_1 (x^1)^2 \pm a_2 (x^2)^2, \quad a_1 > 0, a_2 > 0$

5) лінійчата поверхня:  $\Phi\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right) = 0$

6) циліндрична поверхня:  $\Phi(x^1, x^2) = 0$

7) поверхня обертання:  $\Phi((x^1)^2 + (x^2)^2, x^3) = 0$

8) кубічна поверхня:  $x^1 x^2 x^3 = a_0$



Розв'язання.

1) Функція  $\Phi(x^1, x^2, x^3) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_0 \in C^\infty$ -гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_0 = 0 \\ a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на площині  $F$  немає особливих точок. Це означає, що площина  $F$  є регулярною неявно заданою поверхнею.

2) Функція  $\Phi(x^1, x^2, x^3) = a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 - 1 \in C^\infty$ -гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 - 1 = 0 \\ 2a_1 x^1 = 0, 2a_2 x^2 = 0, 2a_3 x^3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на еліпсоїді  $F$  немає особливих точок. Це означає, що еліпсоїд  $F$  є регулярною неявно заданою поверхнею.

3) Функція  $\Phi(x^1, x^2, x^3) = a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 - a_3(x^3)^2 \mp 1 \in C^\infty$ -гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(x^1)^2 + a_2(x^2)^2 - a_3(x^3)^2 \mp 1 = 0 \\ 2a_1x^1 = 0, 2a_2x^2 = 0, 2a_3x^3 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на гіперболоїді  $F$  немає особливих точок. Це означає, що гіперболоїд  $F$  є регулярною неявно заданою поверхнею.

4) Функція  $\Phi(x^1, x^2, x^3) = a_1(x^1)^2 \pm a_2(x^2)^2 - x^3 \in C^\infty$ -гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(x^1)^2 \pm a_2(x^2)^2 - x^3 = 0 \\ 2a_1x^1 = 0, 2a_2x^2 = 0, 1 = 0 \end{cases}$$

Система не має розв'язків. Значить, на параболоїді  $F$  немає особливих точок. Це означає, що параболоїд  $F$  є регулярною неявно заданою поверхнею.

5) Рівняння  $\Phi\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right) = 0$  задає нам лінійчату поверхню: якщо координати

якоїсь точки  $P(p^1, p^2, p^3)$  задовольняють цьому рівнянню, то тому ж рівнянню будуть задовольняти і координати будь якої точки  $Q(tp^1, tp^2, tp^3)$  прямої  $OP$ . Оскільки всі прямі проходять через точку  $O$ , поверхня  $F$  є конусом з вершиною в точці  $O$ . Саму точку  $O$  вважаємо виколотою, бо там  $x^3 = 0$ .

Проведемо горизонтальну площину  $x^3 = 1$ . Площина перетинає конус  $F$  по деякій кривій  $\gamma$ , що задається в цій площині рівнянням  $\Phi(x^1, x^2) = 0$ . Отже, конус  $F$  утворений прямими, що проходять через точку  $O$  і через точки кривої  $\gamma$ .

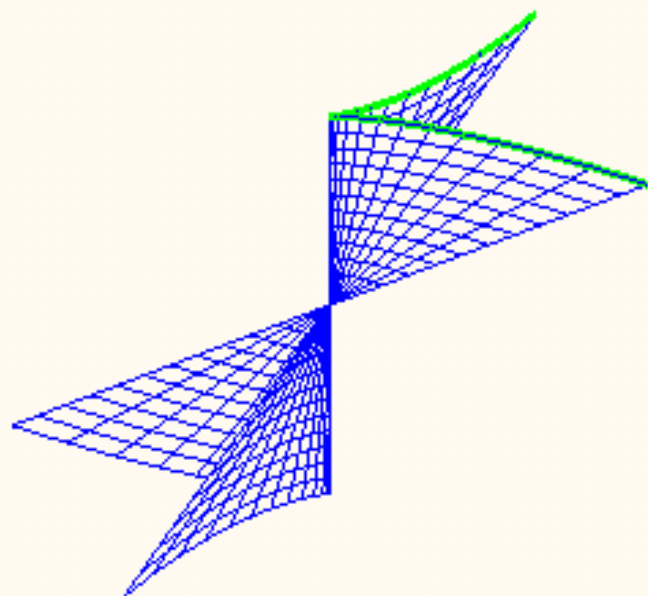
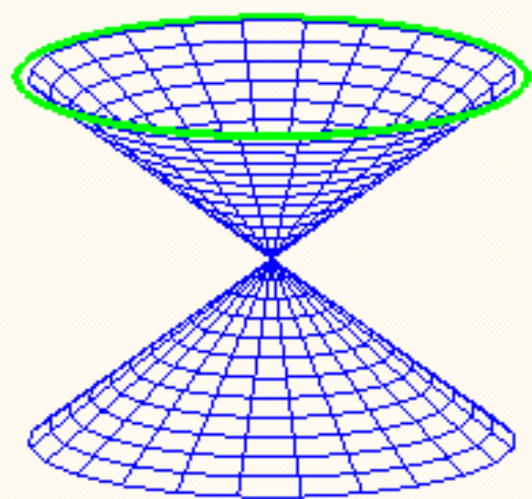
Перевіримо регулярність конуса.

Припустимо, що функція  $\Phi(y^1, y^2) \in C^l$ -гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y^1} \frac{1}{x^3} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y^2} \frac{1}{x^3} = 0, -\frac{\partial \Phi}{\partial y^1} \frac{x^1}{(x^3)^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial y^2} \frac{x^2}{(x^3)^2} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(y^1, y^2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Як наслідок, якщо неявно задана крива  $\gamma \in$  регулярною, то конус  $F$  (з виколотою вершиною  $O$ ) буде регулярною неявно заданою поверхнею. Якщо ж на кривій  $\gamma \in$  особлива точка  $P_0$ , то на конусі  $F$  отримаємо цілу пряму  $OP_0$ , точки якої особливими точками конуса  $F$ . Інакше кажучи, пряма  $OP_0$  буде представляти собою ребро на конусі  $F$ .



б) Рівняння  $\Phi(x^1, x^2) = 0$  задає нам лінійчату поверхню: якщо координати якоїсь точки  $P(p^1, p^2, p^3)$  задовольняють цьому рівнянню, то тому ж рівнянню будуть задовольняти і координати будь якої точки  $Q(p^1, p^2, t)$  вертикальної прямої, що проходить через точку  $P$ . Оскільки всі такі прямі є паралельними (вертикальній координатній осі  $x^3$ ), поверхня  $F$  є циліндром.

Проведемо горизонтальну площину  $x^3 = 0$ . Площина перетинає циліндр  $F$  по деякій кривій  $\gamma$ , що задається в цій площині рівнянням  $\Phi(x^1, x^2) = 0$ . Отже, циліндр  $F$  утворений вертикальними прямими, що проходять через точки кривої  $\gamma$ .

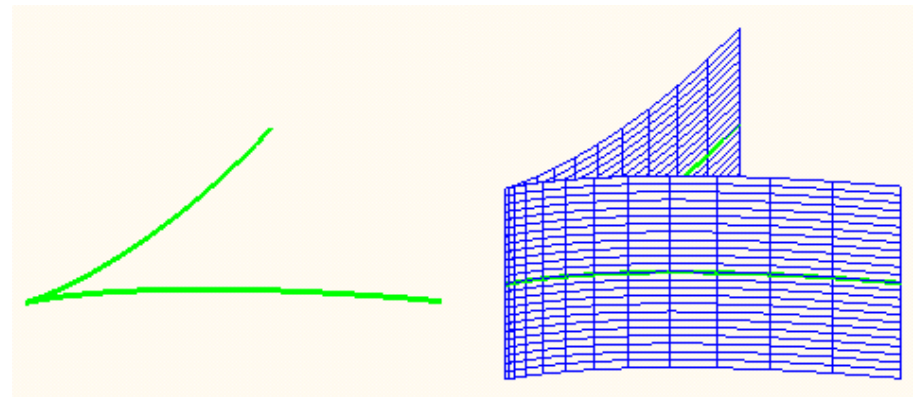
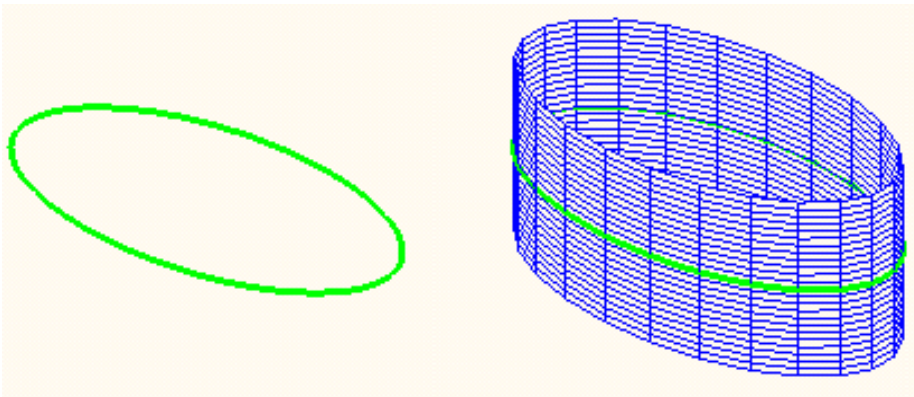
Перевіримо регулярність циліндра.

Припустимо, що функція  $\Phi(x^1, x^2) \in C^1$ -гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x^1, x^2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Як наслідок, якщо неявно задана крива  $\gamma \in$  регулярною, то циліндр  $F$  буде регулярною неявно заданою поверхнею. Якщо ж на кривій  $\gamma \in$  особлива точка  $P_0$ , то на циліндрі  $F$  отримаємо цілу пряму  $OP_0$ , точки якої особливими точками циліндра  $F$ . Інакше кажучи, пряма  $OP_0$  буде представляти собою ребро на циліндрі  $F$ .



7) Рівняння  $\Phi(\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, x^3) = 0$  задає поверхню обертання  $F$ : якщо координати якоїсь точки  $P(p^1, 0, p^3)$  задовольняють цьому рівнянню, то тому ж рівнянню будуть задовольняти і координати будь-якої точки  $Q(p^1 \cos \varphi, p^1 \sin \varphi, p^3)$ , отриманої з точки  $P$  обертанням навколо координатної вертикальної осі  $x^3$ .

Рівняння  $\Phi(x^1, x^3) = 0$  задає в координатній площині  $x^1 x^3$  меридіан  $\gamma$  поверхні обертання  $F$ . Перевіримо регулярність поверхні  $F$ .

Припустимо, що функція  $\Phi(r, x^3) \in C^1$ -гладкою.

Якщо меридіан  $\gamma$  перетинає вісь обертання, тобто, в якійсь точці  $B(0, h)$  виконано  $\Phi(0, h) = 0$ , то функція  $\Phi(\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, x^3)$  може не бути неперервно диференційованою в точці  $B(0, 0, h)$ . Тобто в такій точці може порушуватись умова регулярності поверхні обертання.



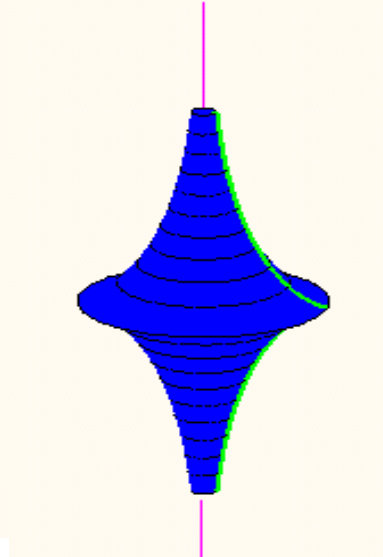
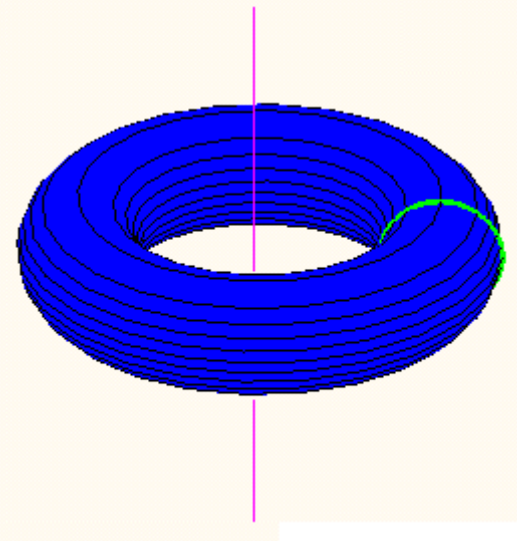
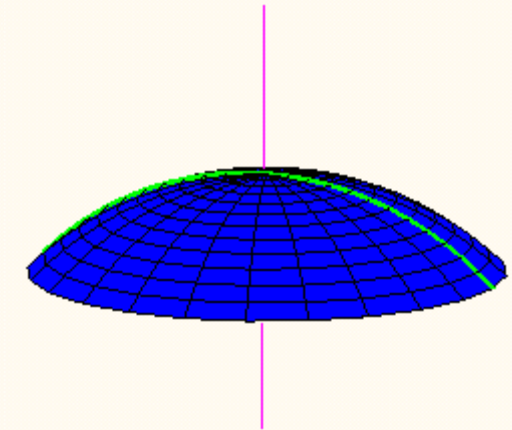
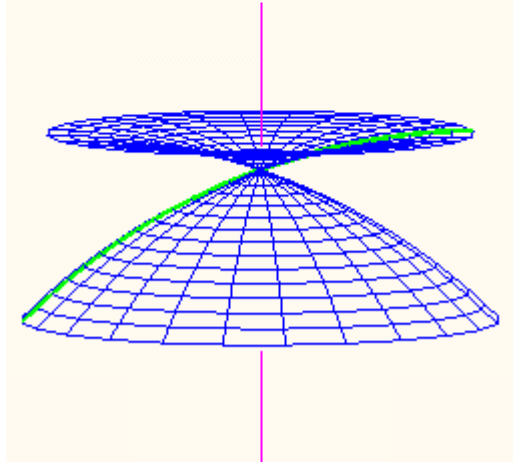
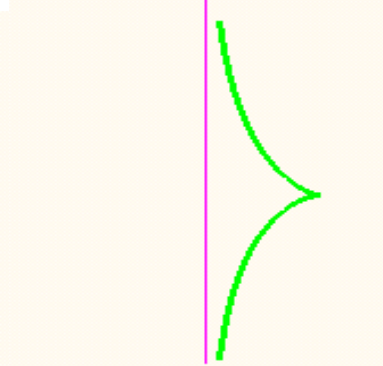
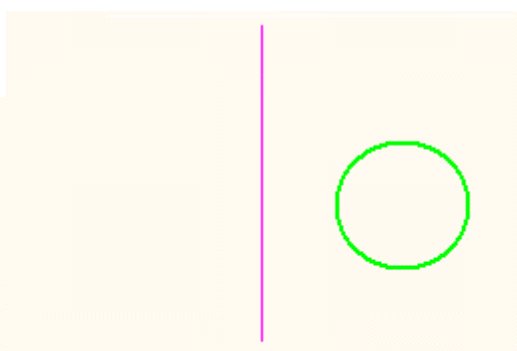
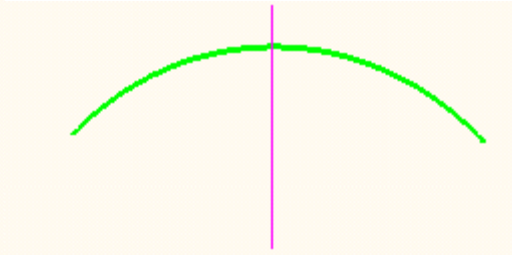
Припустимо, що поверхня обертання  $F$  не містить точок на осі обертання, де  $x^1=0$ ,  $x^2=0$ . Тоді функція  $\Phi(\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, x^3)$  буде  $C^l$ -гладкою\*.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, x^3) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(r, x^3) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{array} \right.$$

Як наслідок, якщо неявно заданий меридіан  $\gamma$  є регулярною кривою, то і поверхня обертання  $F$  буде регулярною неявно заданою поверхнею. Якщо ж на меридіані  $\gamma$  є особлива точка  $P_0$ , то на поверхні  $F$  маємо ціле коло особливих точок поверхні, отримане обертанням точки  $P_0$  навколо осі  $x^3$ . Інакше кажучи, таке коло буде представляти собою ребро на поверхні обертання  $F$ .



8) Функція  $\Phi(x^1, x^2, x^3) = x^1 x^2 x^3 - a_0 \in C^\infty$ -гладкою.

Запишемо систему рівнянь для знаходження особливих точок поверхні:

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 x^2 x^3 - a_0 = 0 \\ x^2 x^3 = 0, x^1 x^3 = 0, x^1 x^2 = 0 \end{cases}$$

Якщо  $a_0 \neq 0$ , то система не має розв'язків. Значить, на поверхні  $F$  немає особливих точок. Це означає, що поверхня  $F$  є регулярною неявно заданою поверхнею.

Якщо ж  $a_0 = 0$ , то система матиме розв'язок  $x^1 = x^2 = 0$ , або  $x^1 = x^3 = 0$ , або  $x^2 = x^3 = 0$ . То ж поверхня  $F$  міститиме три прямих, складених з особливих точок.

