Геометрія груп Лі

Петров Є.В.

15 квітня 2024 р.

Зміст

Курс присвячений теорії Лі та її застосуванню в диференціальній геометрії. Групи Лі – це об'єкти, що поєднують алгебраїчну та гладку структури. Вони природним чином зустрічаються у різних частинах математики та її застосувань і дозволяють ефективно лінеаризувати алгебраїчні та інші задачі. Зокрема, засновник теорії Софус Лі вивчав ці групи у застосуванні до диференціальних рівнянь (див., наприклад, [2], [34] та історичний огляд у [10, с. 453-476]). Сучасного вигляду теорія Лі набула у роботах Елі Картана, який до того ж ефективно застосував її до диференціальної геометрії у своїй теорії симетричних просторів (див. [11]). Виявилося, що численні класи ріманових многовидів дозволяють опис у термінах груп Лі. У цьому курсі ми приділимо увагу, зокрема, рімановим однорідним просторам, що узагальнюють симетричні.

Необхідні попередні знання та джерела: загальна топологія ([6]), лінійна алгебра ([30]), основи теорії груп ([45]), диференціальні рівняння ([1]) гладкі многовиди ([38]), ріманова геометрія ([9]).

У списку літератури книги [9] та [16] покривають майже весь матеріал курсу (і набагато більше), [8], [10] та [36] присвячені викладенню теорії Лі, [5] та [12] – геометричній частині курсу, [2] та [34] – іншим застосуванням, [11] є цікавим історичним першоджерелом.

1 Мотивація: матричні групи

Нехай $\mathbb{F}$ – деяке поле, а n – натуральне число. Множину усіх $(n \times n)$-матриць з коефіцієнтами з поля $\mathbb{F}$ будемо позначати через $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$. Це векторний простір, що ізоморфний простору $\mathrm{End}(V)$ операторів (*лінійних ендоморфізмів*) $V \to V$ для n-вимірного векторного простору V над $\mathbb{F}$. Ці простори розглядаються з операціями додавання матриць (відповідно, операторів) і множення на скаляри з $\mathbb{F}$, а ізоморфізм задається вибором базиса V і записом матриці оператора у цьому базисі. Крім того, очевидним чином будується ізоморфізм $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ і $\mathbb{F}^{n^2}$, що ставить у відповідність матриці $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ набір її компонентів $(A_{11}, \dots, A_{1n}, \dots, A_{n1}, \dots, A_{nn}) \in \mathbb{F}^{n^2}$.

Означення 1.1. Множина $(n \times n)$-матриць з коефіцієнтами з поля $\mathbb{F}$, що мають ненульовий визначник (тобто невироджених), зветься *повною лінійною групою* і позначається $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ (від *general linear*):

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Матриці з $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ відповідають при згаданому вище ізоморфізмі бієктивним операторам $V \to V$ (*лінійним автоморфізмам*), множину яких позначатимемо через $\mathrm{Aut}(V)$ або $\mathrm{GL}(V)$. Ці множини матриць та операторів є групами з операціями добутку матриць та композиції операторів відповідно, а відповідність між ними – ізоморфізмом груп. Дійсно, з $\det A \neq 0$ і $\det B \neq 0$ випливає, що $\det AB = \det A \det B \neq 0$, множення матриць асоціативне: $(AB)C = A(BC)$, одинична матриця I є нейтральним (одиничним) елементом: $AI = IA = A$ для будь-якої A, і умова $\det A \neq 0$ еквівалентна існуванню оберненої матриці A^{-1} такої, що $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (і при цьому $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq 0$). Дослівно те ж саме вірно й для операторів та їх композицій, а відповідність між операторами і матрицями переводить композицію операторів у добуток матриць, тобто є ізоморфізмом груп.

Тепер нехай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Введемо на просторі $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ стандартну топологічну структуру (що відповідає евклідовій метриці), а на $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ – індуковану топологію. Визначимо *відображення добутку* наступним чином:

$$\mu\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\colon (A,B) \mapsto AB.$$

Розглянемо на $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ топологію прямого добутку. Вона збігається з топологією, що індукована на $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ топологією прямого добутку цих просторів (перевірте це). Відображення μ ставить у відповідність матрицям $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ і $B = (B_{ij})_{i,j=1}^n$ матрицю $AB = \left(\sum\limits_{k=1}^n A_{ik}\, B_{kj}\right)_{i,j=1}^n$. Таким чином, воно індуковане на підпросторі $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ відображенням $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, що є неперервним, бо задається поліномальними функціями.

Також розглянемо *відображення взяття оберненого елемента*

$$\iota\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\colon A \mapsto A^{-1}.$$

Вправа 1.1. Виписати відображення ι у компонентах матриць і показати, що воно також неперервне.

Підсумуємо:

Наслідок 1.1. *Множина $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ є групою та топологічним простором, причому відображення множення μ та взяття оберненого елемента ι неперервні.*

Більш того, $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ можна перетворити на ∞-гладкий n^2-вимірний многовид введенням стандартної гладкої структури на $\mathbb{R}^{n^2}$.

Оскільки відображення визначника $\det\colon \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ є неперервним (бо поліноміальне), підмножина $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ відкрита як прообраз відкритої. Ця множина – доповнення до алгебраїчної гіперповерхні, що утворена матрицями з нульовим визначником (і є замкненою підмножиною). Як ми знаємо, відкрита підмножина гладкого многовида – теж многовид тієї ж гладкості та вимірності. Розглянемо цю конструкцію детальніше.

Розглянемо на $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ евклідову норму $\left|A = (A_{ij})_{i,j=1}^n\right| := \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}^2}$. Нехай $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Оскільки $\det$ неперервне, з $\det A \neq 0$ випливає існування $\varepsilon > 0$ такого, що відкрита куля $B_\varepsilon(A) = \{C \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid |A - C| < \varepsilon\}$ радіуса ε з центром A також складається з матриць ненульового визначника, тобто міститься у $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. З іншого боку, ця куля гомеоморфна $\mathbb{R}^{n^2}$, тому тотожне відображення $id\colon B_\varepsilon(A) \to B_\varepsilon(A)$ можна використати у якості координатного відображення карти n^2-вимірного многовида. Локальними координатами тоді будуть компоненти матриці $(A_{ij})_{i,j=1}^n$. При цьому відображення переходу задаються рівністю цих компонент, тому належать класу гладкості C^∞. Нарешті, простір $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ хаусдорфовий і має не більш ніж зліченну базу, бо ці властивості наслідуються з $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Таким чином, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ дійсно є ∞-гладким n^2-вимірним многовидом.

Тепер повернемося до відображення добутку $\mu\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Якщо ввести на $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ структуру прямого добутку гладких многовидів стандартним чином (де локальними координатами пари (A,B) будуть послідовно записані локальні координати A і B), то μ буде ∞-гладким відображенням, бо у локальних координатах задається поліноміальними функціями.

Вправа 1.2. Показати, що $\iota\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ також ∞-гладке.

Таким чином, тепер маємо наступне:

Наслідок 1.2. *Множина $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ є групою та ∞-гладким многовидом, причому відображення множення μ та взяття оберненого ι ∞-гладкі.*

Повернемося поки що до випадку загального поля $\mathbb{F}$.

Означення 1.2. Множина $(n \times n)$-матриць з коефіцієнтами з поля $\mathbb{F}$, що мають одиничний визначник, зветься *спеціальною лінійною групою* і позначається $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ (від *special linear*):

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{F}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F}) \mid \det A = 1\}.$$

Це, очевидно, підмножина $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$. Більш того, це її підгрупа, бо з $\det A = 1$ і $\det B = 1$ випливає, що $\det AB = \det A \det B = 1$ і $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = 1$. Якщо на n-вимірному векторному просторі V над $\mathbb{R}$ ввести евклідовий скалярний добуток так, що координати, у яких ми виписуємо матриці операторів, є декартовими (тобто відповідний базис – ортонормований), то матриці з $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ відповідають операторам, що зберігають орієнтований евклідовий об'єм.

Також при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ми можемо ввести на $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ індуковану топологію і дослівно так само, як для $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, встановити, що ця група є топологічним простором, причому відображення μ та ι неперервні. Виникає природне питання: чи вірно також, що вона є ∞-гладким многовидом з ∞-гладкими μ та ι? Відповідь на нього – так.

Один зі способів зрозуміти це – використати загальні факти алгебраїчної геометрії, адже $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ є алгебраїчною гіперплощиною у $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Більш того, вона (як і решта дійсних та комплексних матричних груп цього розділу) належить до ще одного "комбінованого" класу об'єктів – алгебраїчних груп (див. [20]). Ми не будемо торкатися цих питань у цьому курсі. Інший спосіб – використати теорему про прообраз регулярного значення (один з наслідків теореми про неявну функцію, див. [38, с. 222-228]) та той факт, що обмеження гладких відображень на підмноговиди теж є гладкими.

Вправа 1.3. Показати з використанням теореми про прообраз регулярного значення, що $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ є ∞-гладким многовидом. Чому дорівнює його вимірність?

У подальшому ми будемо використовувати інший підхід, який почнемо розвивати у наступному розділі. А поки що наведемо подальші приклади.

Означення 1.3. *Ортогональною групою* зветься множина ортогональних матриць:

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I\},$$

де A^T позначає матрицю, що транспонована до A.

Дві умови $AA^T = I$ і $A^T A = I$ тут насправді зайві: з кожної з них випливає інша (чому?). Це матриці лінійних ізометрій евклідового скалярного добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на n-вимірному векторному просторі V над $\mathbb{R}$ (за умови, якщо вони виписані в ортонормованому базисі, як у випадку $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ вище). Множину самих цих ізометрій позначатимемо через $\mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Зауважимо, що для ортогональної A

$$1 = \det I = \det AA^T = \det A \det A^T = (\det A)^2,$$

тобто $\det A = \pm 1$, тому $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Виділимо матриці з одиничним визначником:

Означення 1.4. *Спеціальною ортогональною групою* зветься множина ортогональних матриць визначника 1:

$$\mathrm{SO}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I,\ \det A = 1\}.$$

Іншими словами, $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Такі матриці відповідають ізометріям, що зберігають орієнтацію (власним рухам $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$), множину яких будемо позначати через $\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Означення 1.5. *Псевдоортогональною групою* (сигнатури (p, q)) зветься множина матриць

$$\mathrm{O}(p, q) \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid AI_{p,q}A^T = A^T I_{p,q} A = I_{p,q}\},$$

де $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $n = p + q$, $I_{p,q}$ позначає діагональну $(n \times n)$-матрицю, на діагоналі якої послідовно розташовані p чисел 1 і q чисел -1.

Тут також аналогічно до ортогональної групи можна показати, що достатньо лише однієї з умов і що $\mathrm{O}(p, q) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (чому?). З означення також випливає, що $\mathrm{O}(n, 0) = \mathrm{O}(0, n) = \mathrm{O}(n)$. Такі матриці задають у псевдоортонормованому базисі (матрицею попарних скалярних добутків якого є $I_{p,q}$) лінійні ізометрії псевдоевклідового скалярного добутку сигнатури (p, q) на n-вимірному векторному просторі V над $\mathbb{R}$.

Вправа 1.4. Перевірити, що $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ та $\mathrm{O}(p, q)$ дійсно є підгрупами $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Побудувати ізоморфізм між $\mathrm{O}(p, q)$ та $\mathrm{O}(q, p)$.

Топологію на цих підгрупах також будуємо, індукуючи з $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (або $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$). Звичайно, відображення μ та ι залишаються неперервними, бо індуковані неперервними.

Вправа 1.5. Показати з використанням теореми про прообраз регулярного значення, що $\mathrm{O}(n)$ є ∞-гладким многовидом. Чому дорівнює його вимірність (хоча б для $n = 1, 2, 3$)?

Згадані вище множини ізометрій $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ та $\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ утворюють групи, як і множина псевдоевклідових ізометрій, бо композиція ізометрій та відображення, що обернене до ізометрії, є ізометріями, і це ж вірно для збереження орієнтації. Відповідність між операторами та матрицями є ізоморфізмом між цими групами і $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(p, q)$ відповідно.

Тепер нехай $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Простір $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ природно ізоморфний не тільки $\mathbb{C}^{n^2}$, а й $\mathbb{R}^{2n^2}$: щоб побудувати відповідний ізоморфізм, поставимо у відповідність матриці $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ набір дійсних та уявних частин її компонентів:

$$A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n} \mapsto (\Re A_{11}, \Im A_{11}, \ldots, \Re A_{nn}, \Im A_{nn}) \in \mathbb{R}^{2n^2}.$$

Як і у дійсному випадку, розглядаємо стандартні топологію та ∞-гладку структуру на $\mathbb{R}^{2n^2}$ і вводимо індуковану топологію на групі $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Оскільки вона знову ж є відкритою підмножиною $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ за неперервністю визначника, на ній так само вводиться структура многовида. Властивості відображень μ та ι перевірте самостійно:

Вправа 1.6. Показати, що група $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ є ∞-гладким $(2n^2)$-вимірним многовидом, причому відображення множення μ та взяття оберненого ι ∞-гладкі (зокрема неперервні). Показати також, що це n^2-вимірний комплексний многовид (якщо знаєте, що це таке).

Крім підгрупи $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ у $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ зазвичай виділяють наступні:

Означення 1.6. *Унітарною групою* зветься множина унітарних матриць:

$$\mathrm{U}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = I\},$$

де $\overline{A}$ позначає покомпонентно спряжену матрицю до A.

Аналогічно ортогональному випдку, тут достатньо однієї з умов, і $|\det A| = 1$ для унітарної A, тому $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (перевірте). Це матриці унітарних операторів на n-вимірному ермітовому просторі у ермітово ортонормованому базисі.

Означення 1.7. *Спеціальною унітарною групою* зветься множина унітарних матриць визначника 1:

$$\mathrm{SU}(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = I,\ \det A = 1\}.$$

Звичайно, $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.

Вправа 1.7. Перевірити, що $\mathrm{U}(n)$ та $\mathrm{SU}(n)$ дійсно є підгрупами $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Топологія тут також індукована з $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ (або $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$), μ та ι неперервні. Виявляється, що усі наведені вище дійсні та комплексні матричні групи є ∞-гладкими многовидами, а відображення множення μ та взяття оберненого ι – ∞-гладкими. Ми продемонструємо це у подальшому.

У цьому розділі ми розглянули далеко не всі класичні матричні групи, у літературі ви також можете знайти й інші приклади. Але цих цілком достатньо, щоб рухатися далі.

2 Топологічні групи та групи Лі. Підгрупи Лі

Мотивуючись прикладами з попереднього розділу, введемо деякі загальні поняття. Для груп у цьому курсі використовуватимемо мультиплікативні позначення (тобто групова операція буде виглядати як множення), а одиницю (нейтральний елемент) групи позначатимемо через e, якщо не вказане інше (наприклад, для матричних груп нейтральним елементом буде одинична матриця I).

Означення 2.1. Множина G зветься *топологічною групою*, якщо

- G – група;
- G – топологічний простір;
- *відображення добутку* $\mu\colon G \times G \to G\colon (a, b) \mapsto ab$ та *відображення взяття оберненого елемента* $\iota\colon G \to G\colon a \mapsto a^{-1}$ є неперервними (де $G \times G$ розглядається з топологією прямого добутку).

Третя умова тут означає, що структури групи та топологічного простору на G узгоджені.

Приклад 2.1. Розглянуті у попередньому розділі класичні матричні групи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$ та $\mathrm{SU}(n)$ з топологіями, що індуковані з $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ у дійсному випадку і з $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ – у комплексному, є топологічними групами. Це випливає з наведених там міркувань (за необхідності перевірте виконання означення 2.1 у кожному з випадків).

Означення 2.2. Нехай G і H – топологічні групи. Відображення $\Phi\colon G \to H$ зветься *гомоморфізмом топологічних груп*, якщо Φ – гомоморфізм груп (тобто $\Phi(ab) = \Phi(a)\,\Phi(b)$ для усіх $a, b \in G$) і неперервне відображення. Відображення $\Phi\colon G \to H$ зветься *ізоморфізмом топологічних груп*, якщо Φ – бієкція, Φ та Φ^{-1} – гомоморфізми топологічних груп. Якщо існує ізоморфізм топологічних груп $\Phi\colon G \to H$, будемо говорити, що G *ізоморфна* H (або що G і H ізоморфні) і писати $G \cong H$.

Вправа 2.1. Показати, що ізоморфність є відношенням еквівалентності топологічних груп.

Твердження 2.1. *1. Композиція гомоморфізмів топологічних груп є гомоморфізмом топологічних груп.*

2. *Φ є ізоморфізмом топологічних груп тоді й тільки тоді, коли Φ – гомоморфізм груп і гомеоморфізм топологічних просторів.*

Доведення.

1. Випливає з того, що композиція гомоморфізмів груп – гомоморфізмом груп, а композиція неперервних відображень неперервна.

2. Бієктивне Φ є гомоморфізмом груп тоді й тільки тоді, коли ним є Φ^{-1}, тому умову гомоморфності оберненого відображення можна прибрати. Тоді крім гомоморфності Φ залишаються умови його бієктивності та неперервності Φ і Φ^{-1}, що й означає, що Φ – гомеоморфізм.

■

Нехай G – топологічна група, а $H \subset G$ – її підгрупа. Введемо на H індуковану топологію. Тоді відображення добутку $\mu\colon H\times H \to H$ та взяття оберненого $\iota\colon H \to H$ будуть обмеженнями відповідних відображень G, а отже неперервними. Крім того, обмеження гомоморфізма топологічних груп $\Phi\colon G \to K$ на H буде гомоморфізмом груп і неперервним, тобто теж гомоморфізмом топологічних груп $\Phi|_H\colon H \to K$.

Наслідок 2.1. *Будь-яка підгрупа топологічної групи з індукованою топологією є топологічною групою, а обмеження будь-якого гомоморфізма топологічних груп на неї – гомоморфізмом топологічних груп.*

Приклад 2.2. Матричні підгрупи $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ та $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, що перелічені у попередньому прикладі, є очевидною ілюстрацією цього наслідку.

Загальні топологічні групи є важливим окремим предметом дослідження. Крім груп Лі (тобто гладких) інтерес становлять, зокрема, локально компактні абелеві групи, що використовуються у гармонічному аналізі. Подальшу інформацію див, наприклад, у [31] та [35]. А ми тепер перейдемо до гладкого випадку. Тут і надалі в цьому курсі гладкість буде означати ∞-гладкість.

Означення 2.3. Множина G зветься *групою Лі*, якщо

- G – група;
- G – гладкий многовид;
- відображення добутку $\mu\colon G \times G \to G\colon (a,b) \mapsto ab$ та відображення взяття оберненого елемента $\iota\colon G \to G\colon a \mapsto a^{-1}$ є гладкими (де $G \times G$ розглядається зі стандартною гладкою структурою добутку гладких многовидів).

Тобто тепер структури групи та гладкого многовида на G узгоджені. З означень 2.1 і 2.3 випливає, що усі групи Лі є, зокрема, топологічними. Також вірно, наприклад, що будь-яка топологічна група, що є локально евклідовою (тобто у кожної її точки існує відкритий окіл, що гомеоморфний $\mathbb{R}^n$, – це означення топологічного многовида, але без додаткових умов хаусдорфовості та зліченної бази) ізоморфна деякій групі Лі (у сенсі топологічних груп). Це твердження відоме як *п'ята проблема Гільберта.* Див. обговорення цього та аналогічних результатів у [43].

Приклад 2.3. Будь-яка не більш ніж зліченна група введенням дискретної топології перетворюється на 0-вимірний гладкий многовид. Оскільки для таких многовидів будь-яке відображення гладке, вона буде 0-вимірною групою Лі.

Приклад 2.4. Простір $\mathbb{R}^n$ з операцією додавання є абелевою групою (тобто $a + b = b + a$ для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}^n$). Оскільки відображення $\mu\colon ((a^1, \ldots, a^n), (b^1, \ldots, b^n)) \mapsto (a^1 + b^1, \ldots, a^n + b^n)$ та $\iota\colon (a^1, \ldots, a^n) \mapsto (-a^1, \ldots, -a^n)$ є гладкими у його стандартній гладкій структурі, це n-вимірна абелева група Лі.

Приклад 2.5. Коло S^1 можна представити як множину комплексних чисел модуля 1: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in (-\pi, \pi]\}$. Комплексний добуток перетворює його на абелеву групу: $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\psi}e^{i\varphi}$. Якщо розглянути кут φ у якості локальної координати для стандартної гладкої структури S^1, то відображення добутку і взяття оберненого локально виглядають як $\mu\colon (\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi$ та $\iota\colon \varphi \mapsto -\varphi$, тому є гладкими (ця координата не є глобальною – в околі точки $-1 = e^{i\pi}$ доведеться розглянути іншу; зробіть це). Отже, S^1 – 1-вимірна абелева група Лі.

Приклад 2.6. У попередньому розділі було показано, що $GL(n, \mathbb{R})$ – n^2-вимірна група Лі, а $GL(n, \mathbb{C})$ – $(2n^2)$-вимірна група Лі. При $n > 1$ вони, як відомо, не є абелевими.

Означення 2.4. Нехай G і H – групи Лі. Відображення $\Phi\colon G \to H$ зветься *гомоморфізмом груп Лі*, якщо Φ – гомоморфізм груп і гладке відображення. Відображення $\Phi\colon G \to H$ зветься *ізоморфізмом груп Лі*, якщо Φ – бієкція, Φ та Φ^{-1} – гомоморфізми груп Лі. Якщо існує ізоморфізм груп Лі $\Phi\colon G \to H$, будемо говорити, що G *ізоморфна* H (або що G і H ізоморфні) і писати $G \cong H$.

Виявляється, що для того, щоб гомоморфізм груп був гомоморфізмом груп Лі, достатньо його неперервності, тобто того, що це гомоморфізм топологічних груп. Це гарантується теоремою Картана про гомоморфізм (див. далі вправу 14.4).

Вправа 2.2. Показати, що ізоморфність є відношенням еквівалентності груп Лі.

Твердження 2.2. 1. *Композиція гомоморфізмів груп Лі є гомоморфізмом груп Лі.*

2. *Φ є ізоморфізмом груп Лі тоді й тільки тоді, коли Φ – гомоморфізм груп і дифеоморфізм гладких многовидів.*

Доведення. Дослівно повторимо доведення твердження 2.1, замінивши неперервність на гладкість.

■

Нагадаємо, що прямим добутком груп G_1 і G_2 зветься їх декартовий добуток $G_1 \times G_2$ з груповою структурою, що задається множенням $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$ для $a_1, b_1 \in G_1$ і $a_2, b_2 \in G_2$. Якщо G_1 і G_2 – групи Лі, то на $G_1 \times G_2$ введемо також стандартну структуру прямого добутку гладких многовидів.

Вправа 2.3. Показати, що ці структури узгоджені, тобто $G_1 \times G_2$ є групою Лі.

Означення 2.5. Добуток $G_1 \times G_2$ зі структурами прямих добутків груп та гладких многовидів зветься *прямим добутком груп Лі* G_1 і G_2.

За допомогою індукції цю конструкцію можна узагальнити на добуток довільної скінченної кількості груп Лі, причому з асоціативностей прямих добутків груп та гладких многовидів випливає, що розстановка дужок у такому добутку неважлива. Аналогічним чином визначається прямий добуток топологічних груп.

Приклад 2.7. Прямий добуток n копій групи Лі S^1 з прикладу 2.5 – це n-вимірний тор:

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} = \left\{ \left(e^{i\varphi^1}, \ldots, e^{i\varphi^n} \right) \,\middle|\, \varphi^i \in (-\pi, \pi] \; \forall\, i = \overline{1, n} \right\}.$$

У якості локальних координат в околі одиниці $(1, \ldots, 1) = (e^0, \ldots, e^0)$ цієї групи Лі можна взяти $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ (звичайно, потрібні й інші системи локальних координат; які?)

На відміну від топологічних груп, не кожна підгрупа групи Лі буде групою Лі, тому нам знадобиться наступне означення.

Означення 2.6. Нехай G – група Лі. Підмножина $H \subset G$ зветься її *підгрупою Лі*, якщо

- H – підгрупа G;

- H з алгебраїчною структурою підгрупи – група Лі, тобто має структуру гладкого многовида таку, що обмеження відображень μ та ι групи G на $H \times H$ та H відповідно – гладкі;

- H – (занурений) підмноговид у G, тобто відображення включення $i\colon H \to G\colon a \mapsto a$, є зануренням: воно гладке і ранг його диференціала у кожній точці дорівнює вимірності H.

Якщо H – вкладений підмноговид, тобто занурення i є до того ж вкладенням – гомеоморфізмом на свій образ H з топологією, що індукована топологією G, то підгрупа Лі H зветься *вкладеною.*

Оскільки в умовах цього означення $i\colon H \to G$ є гомоморфізмом груп, це гомоморфізм груп Лі. Також зауважимо, що умови гладкості обмежень μ та ι тут насправді зайві, бо випливають із зануреності H. Дійсно, згадаємо, що обмеження гладкого відображення многовида на підмноговид теж гладке (перевірте це, наприклад, за допомогою локальних координат). Звідси ж випливає, що, аналогічно до наслідку 2.1, обмеження довільного гомоморфізма груп Лі $\Phi\colon G \to K$ на H буде гомоморфізмом груп і гладким, а отже гомоморфізмом груп Лі $\Phi|_H\colon H \to K$.

Наслідок 2.2. *Обмеження будь-якого гомоморфізма груп Лі на довільну підгрупу Лі є гомоморфізмом груп Лі.*

Зауважимо, що топологія підгрупи Лі $H \subset G$ (відносно якої вона є гладким многовидом), взагалі кажучи, відмінна від індукованої топологією G (див. приклад 2.9 нижче). При цьому H є вкладеною тоді й тільки тоді, коли ці топології збігаються, тобто коли структура топологічної групи на H та сама, що вводилася у наслідку 2.1. У цьому випадку ми будемо за замовчуванням розглядати на H саме індуковану топологію. Її гладка структура при цьому також визначена однозначно. Дійсно, позначимо через H_1 і H_2 одну й ту ж підгрупу H, але з апріорі різними гладкими структурами такими, що обидві ці підгрупи Лі є вкладеними в G, тобто включення $i_1\colon H_1 \to G$ та $i_2\colon H_2 \to G$ є вкладеннями. Тоді композиція $i_2^{-1} \circ i_1\colon H_1 \to H \to H_2$ є гомеоморфізмом як композиція гомеоморфізмів. Більш того, це дифеоморфізм. Це можна вивести, наприклад, з того, що i_1 та i_2 – занурення, і теореми про ранг відображення, побудувавши локальні координати в околі кожної точки такі, що в них це відображення задається рівністю координат (зробіть це; див. також [38, с. 216-222]). З іншого боку, $i_2^{-1} \circ i_1$ – це просто тотожне відображення H. Те, що воно є дифеоморфізмом, якраз і означає, що гладкі структури груп H_1 і H_2 збігаються.

Наслідок 2.3. *Структура групи Лі на вкладеній підгрупі Лі визначена однозначно.*

Вправа 2.4. Показати, що й у загальному випадку структура групи Лі на підгрупі Лі однозначно визначена її топологією.

Наступна теорема дає корисну достатню умову того, що підгрупа групи Лі є підгрупою Лі. Вона буде доведена у розділі 13.

Теорема 13.3 (Картан)**.** *Нехай G – група Лі. Якщо $H \subset G$ – підгрупа і замкнена підмножина G, то H – вкладена підгрупа Лі G. Зокрема, H є групою Лі.*

Приклад 2.8. Класичні матричні підгрупи $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(p, q)$ у $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ та $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ у $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ з прикладу 2.1 є замкненими. Дійсно, наприклад, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ є замкненою підмножиною $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ за неперервністю відображення визначника, а отже замкнена і в індукованій топології $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Інший спосіб це показати – використати секвенційний критерій: якщо послідовність матриць $\{A_n\}$ лежить у $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ і збігається до матриці A у $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, то знову ж за неперервністю визначника $\det A = \lim\limits_{n\to\infty} \det A_n = 1$, тобто $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Вправа 2.5. Показати, що решта перелічених підгруп також замкнені.

Таким чином, в індукованих топологіях $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$ та $\mathrm{SU}(n)$ дійсно є групами Лі в силу теореми Картана (і вкладеними підгрупами Лі у відповідних повних лінійних групах).

Наступний цікавий приклад демонструє, зокрема, що не кожна підгрупа Лі задовольняє умовам теореми Картана.

Приклад 2.9. Розглянемо двовимірний тор $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\varphi}, e^{i\psi})\}$ з прикладу 2.7 та відображення $\Phi \colon \mathbb{R} \to T^2 \colon t \mapsto (e^{it}, e^{i\lambda t})$, де $\lambda \in \mathbb{R}$ – деяке фіксоване число. Такі відображення (а також їхні образи) інколи називають *обмотуваннями тора.* Локально, якщо розглядати (φ, ψ) у якості координат на торі, Φ задається відображенням $t \mapsto (t, \lambda t)$, що є гладким і має матрицю Якобі $\Phi'(t) = (1, \lambda) \neq 0$, тобто Φ – занурення (регулярна крива). Переконайтеся, що це так і в околах тих точок тора, де ці локальні координати не діють. Оскільки

$$\Phi(t+s) = \left(e^{i(t+s)}, e^{i\lambda(t+s)}\right) = \left(e^{it}, e^{i\lambda t}\right)\left(e^{is}, e^{i\lambda s}\right) = \Phi(t)\,\Phi(s)$$

для будь-яких $t, s \in \mathbb{R}$, Φ є гомоморфізмом груп, а отже гомоморфізмом груп Лі $\mathbb{R}$ (з прикладу 2.4) і T^2. Зокрема, $H \coloneqq \Phi(\mathbb{R})$ є підгрупою у T^2 як образ гомоморфізма груп.

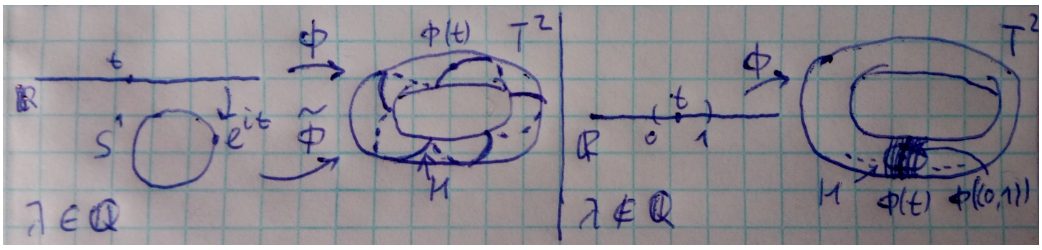
Далі розглянемо два випадки. Якщо коефіцієнт λ раціональний, скажімо, $\lambda = \frac{p}{q}$, де $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, то

$$\Phi(t + 2\pi q) = \left(e^{i(t+2\pi q)}, e^{i\frac{p}{q}(t+2\pi q)}\right) = \left(e^{it}, e^{i\frac{p}{q}t}\right) = \Phi(t)$$

для будь-якого $t \in \mathbb{R}$, тобто Φ – періодичне відображення з періодом $2\pi q$: обмотування тора замикається. Тоді можна задати відображення $\widetilde{\Phi}\colon S^1 \to T^2$ умовою $\widetilde{\Phi}(e^{it}) := \Phi(qt)$, що коректно визначене, є гомоморфізмом груп і зануренням в силу відповідних властивостей Φ (перевірте це). Зокрема, це теж гомоморфізм груп Лі.

Вправа 2.6. Показати, що якщо p і q взаємно прості, то $2\pi q$ – найменший період Φ, а $\widetilde{\Phi}\colon S^1 \to T^2$ – ін'єкція.

Ін'єктивне $\widetilde{\Phi}$ буде вкладенням, бо S^1 – компакт. У цьому випадку обмотування тора $H = \Phi(\mathbb{R}) = \widetilde{\Phi}(S^1)$ є компактною, а отже замкненою (бо многовиди хаусдорфові) підгрупою. Зокрема, вона задовольняє умовам теореми Картана і тому є вкладеною підгрупою Лі, а $\widetilde{\Phi}\colon S^1 \to H$ – ізоморфізмом груп Лі (чому?). В принципі, тут можна було б і не посилатися на теорему Картана, а перенести на H гладку структуру з S^1 за допомогою гомеоморфізма $\widetilde{\Phi}\colon S^1 \to H$. Тоді $i\colon H \to T^2$ – занурення, бо $\widetilde{\Phi}\colon S^1 \to T^2$ – занурення (вони однаково виглядають у локальних координатах). Цей випадок проілюстрований знизу зліва:



Випадок ірраціонального λ суттєво відрізняється в силу наступної вправи.

Вправа 2.7. Нехай $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Показати, що тоді:

1. Якщо $t \neq s$ і $e^{it} = e^{is}$, то $e^{i\lambda t} \neq e^{i\lambda s}$.

2. Для будь-яких φ, ψ, $C > 0$ і $\varepsilon > 0$ існує $t \in \mathbb{R}$ таке, що $t > C$, $e^{it} = e^{i\varphi}$, $|e^{i\lambda t} - e^{i\psi}| < \varepsilon$.

В силу першого з цих тверджень, для ірраціонального λ відображення $\Phi\colon \mathbb{R} \to T^2$ є ін'єкцією, отже встановлює біекцію між $\mathbb{R}$ і обмотуванням H. Перенесемо за її допомогою топологію і структуру гладкого многовида з $\mathbb{R}$ на H, перетворивши H на групу Лі, а $\Phi\colon \mathbb{R} \to H$ – на ізоморфізм груп Лі. Тоді, оскільки Φ – занурення, включення $i\colon H \to T^2$ також буде зануренням (як у раціональному випадку), тобто H – підгрупа Лі. При цьому Φ (а отже й i) – не вкладення, бо, скажімо, образ інтервала $(0, 1) \in \mathbb{R}$ не буде відкритою множиною в індукованій топології H: у будь-якому околі (в топології тора) кожної його точки будуть присутні точки H, що не належать цьому образу, в силу пункта 2. попередньої вправи (див. малюнок зверху справа). Тому топологія групи Лі H (що є топологією прямої) не збігається з індукованою. Більш того, з тих же міркувань випливає, що H з індукованою топологією – взагалі не многовид. Звідти ж отримуємо, що замикання $\overline{H} = T^2$, тому H не є замкнутою підгрупою. Таке обмотування тора називають *ергодичним*.

3 Основні властивості топологічних груп та груп Лі

Конструкції і твердження цього розділу працюють як у загальному випадку топологічних груп, так і в окремому – груп Лі. Там, де формулювання для груп Лі відрізняються, ми будемо робити відповідні обмовки.

Означення 3.1. Нехай G – топологічна група. *Лівим* (відповідно, *правим*) *зсувом* на елемент $a \in G$ зветься відображення $L_a\colon G \to G\colon b \mapsto ab$ ($R_a\colon G \to G\colon b \mapsto ba$). *Спряженням* з елементом $a \in G$ (або *внутрішнім автоморфізмом* G) зветься відображення $C_a\colon G \to G\colon b \mapsto aba^{-1}$.

З цього означення випливає, зокрема, що $C_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$.

Твердження 3.1. *Для будь-якого $a \in G$ відображення L_a та R_a є гомеоморфізмами G на себе (дифеоморфізмами у випадку групи Лі G), а C_a – її ізоморфізмом на себе (тобто автоморфізмом) як топологічної групи (відповідно, групи Лі).*

Доведення. Отже, нехай $a \in G$. Представимо лівий зсув у якості композиції: $L_a = \mu \circ \alpha$, де відображення $\alpha\colon G \to G \times G$ визначене умовою $b \mapsto (a, b)$, а $\mu\colon G \times G \to G\colon (a, b) \mapsto ab$ – відображення добутку. Вони обидва неперервні та гладкі у випадку групи Лі за властивостями топології та гладкої структури прямого добутку і за означеннями 2.1 та 2.3. Отже, L_a теж неперервне (відповідно, гладке). Оскільки

$$L_a(L_{a^{-1}}(b)) = aa^{-1}b = b = a^{-1}ab = L_{a^{-1}}(L_a(b))$$

для будь-якого $b \in G$, відображення L_a і $L_{a^{-1}}$ є взаємно оберненими, що демонструє, зокрема, бієктивність L_a. Нарешті, $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ є неперервним (відповідно, гладким) за тільки що доведеним. Тому $L_a\colon G \to G$ – гомеоморфізм (дифеоморфізм). Так само це доводиться для R_a.

Відображення $C_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$ тоді є гомеоморфізмом (дифеоморфізмом) як композиція гомеоморфізмів (дифеоморфізмів). Крім того, як пам'ятаємо з алгебри, це гомоморфізм G на себе:

$$C_a(bc) = abca^{-1} = aba^{-1}\, aca^{-1} = C_a(b)\, C_a(c)$$

для будь-яких $b, c \in G$.

■

Зауважимо, що, аналогічно до композицій L_a і $L_{a^{-1}}$ у попередньому доведенні, з асоціативності множення випливає $L_a \circ L_b = L_{ab}$ і $R_a \circ R_b = R_{ba}$ для будь-яких $a, b \in G$ (перевірте це).

Означення 3.2. *(Зв'язною) компонентою одиниці* топологічної групи G називають ту компоненту лінійної зв'язності G, якій належить одиниця групи.

Будемо позначати компоненту одиниці топологічної групи верхнім індексом 0: так, для групи G це буде G^0. Зауважимо, що компоненти лінійної зв'язності многовидів (зокрема груп Лі) збігаються з їхніми зв'язними компонентами.

Теорема 3.1 (Властивості компоненти одиниці)**.** *Нехай G – топологічна група.*

1. *Компонента одиниці G^0 – нормальна підгрупа G.*
2. *Якщо G – група Лі, то G^0 – відкритозамкнена вкладена підгрупа Лі G. Її вимірність дорівнює вимірності G.*
3. *Нехай $U \ni e$ – відкритий окіл одиниці в G^0 (відносно її індукованої топології). Тоді $G^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, де степені U можна визначити індуктивно $U^1 \coloneqq U$, $U^2 \coloneqq \mu(U \times U) = \{ab \mid a, b \in U\}$, ...,*

$$U^n \coloneqq \mu(U^{n-1} \times U) = \{a_1 \dots a_n \mid a_1, \dots, a_n \in U\}.$$

4. *Якщо H – компонента лінійної зв'язності G, що містить її елемент a, то $L_a\colon G^0 \to H$ і $R_a\colon G^0 \to H$ є гомеоморфізмами відносно індукованих топологій. Якщо G – група Лі, то це дифеоморфізми відносно стандартних гладких структур відкритих підмножин гладкого многовида G.*

Доведення.

1. Нехай $a, b \in G$. Оскільки G^0 лінійно зв'язна, існують шляхи, що сполучають одиницю e з цими точками, тобто неперервні відображення $\gamma, \nu\colon [0,1] \to G^0$ такі, що $\gamma(0) = \nu(0) = e$, $\gamma(1) = a$, $\nu(1) = b$. Тоді відображення $\mu \circ (\gamma, \nu)\colon [0,1] \to G\colon t \mapsto \gamma(t)\nu(t)$ неперервне як композиція неперервних $(\gamma, \nu)\colon t \mapsto (\gamma(t), \nu(t))$ і μ, отже є шляхом, що сполучає $\gamma(0)\nu(0) = e$ і $\gamma(1)\nu(1) = ab$. Таким чином, $ab \in G^0$. Аналогічно, $\iota \circ \gamma\colon [0,1] \to G\colon t \mapsto \gamma(t)^{-1}$ – шлях, що сполучає $\gamma(0)^{-1} = e$ і $\gamma(1)^{-1} = a^{-1}$, тому $a^{-1} \in G^0$. Ці два факти демонструють, що G^0 – підгрупа. Нарешті, для будь-якого $d \in G$ відображення $C_d \circ \gamma\colon [0,1] \to G\colon t \mapsto d\gamma(t)d^{-1}$ є шляхом і сполучає $d\gamma(0)d^{-1} = ded^{-1} = e$ з $d\gamma(1)d^{-1} = dad^{-1}$, отже $dad^{-1} \in G^0$. Це означає, що підгрупа G^0 є нормальною.

2. Як уже згадувалося вище, G^0 – компонента зв'язності та лінійної зв'язності многовида G. Крім того, у многовидах ці компоненти є відкритозамкненими множинами (чому?). Оскільки G^0 – відкрита підмножина гладкого многовида G, на ній (з індукованою топологією) стандартним чином вводиться структура гладкого многовида тієї ж вимірності так само, як це робилося у розділі 1 для $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Обмеження відображень μ та ι залишаються при цьому гладкими. Відображення включення $i\colon G^0 \to G$ у відповідних локальних координатах задається рівністю координат, і тому є зануренням. Таким чином, G^0 – вкладена підгрупа Лі.

3. Отже, нехай $e \in U \subset G^0$, де U відкрита у G^0. Оскільки відображення добутку μ неперервне, прообраз $\mu^{-1}(U)$ є відкритим околом (e, e). З побудови топології прямого добутку випливає, що тоді існує відкрита $V \ni e$ така, що $V \times V \subset \mu^{-1}(U)$, тобто $\mu(V \times V) \subset U$. Іншими словами, $ab \in U$ для будь-яких $a, b \in V$. При $b = e$ отримаємо $a \in U$, отже $V \subset U$. Аналогічно, з неперервності відображення взяття оберненого ι випливає існування відкритої $W \ni e$ такої, що $\iota(W) \subset V$, тобто $a^{-1} \in V$ для будь-якого $a \in W$. Також можемо вважати, що $W \subset V$: за необхідності просто замінимо W на $W \cap V$.

   Для будь-якого $a \in G^0$ знову побудуємо шлях $\gamma\colon [0,1] \to G^0$ такий, що $\gamma(0) = e$ і $\gamma(1) = a$. Оскільки усі ліві зсуви є гомеоморфізмами за попереднім твердженням, для будь-якого $t \in [0,1]$ множина $L_{\gamma(t)}(W)$ відкрита, тобто $\left\{L_{\gamma(t)}(W)\right\}_{t\in[0,1]}$ є відкритим покриттям $\gamma([0,1])$, а $\left\{\gamma^{-1}\left(L_{\gamma(t)}(W)\right)\right\}_{t\in[0,1]}$ – відкритим покриттям метричного компакта $[0,1]$. Застосуємо до нього лему Лебега. Нехай $\delta > 0$ – число Лебега цього покриття. Виберемо натуральне n таке, що $\frac{1}{n} < \delta$. За лемою Лебега тоді для кожного $i = \overline{1, n}$ відрізок $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ міститься у деякій множині покриття, тобто існує елемент $t_i \in [0, 1]$ такий, що $\gamma\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \subset L_{\gamma(t_i)}(W)$. Зокрема, існують $b_i, c_i \in W$, такі, що $\gamma\left(\frac{i-1}{n}\right) = L_{\gamma(t_i)}b_i = \gamma(t_i)b_i$ і $\gamma\left(\frac{i}{n}\right) = L_{\gamma(t_i)}c_i = \gamma(t_i)c_i$. Тоді $\gamma\left(\frac{i}{n}\right) = \gamma\left(\frac{i-1}{n}\right) b_i^{-1}c_i$. За побудовою V і W, оскільки $b_i \in W$ та $c_i \in W \subset V$, $b_i^{-1} \in V$ й тому $a_i \coloneqq b_i^{-1}c_i \in U$. Таким чином,

$$a = \gamma(1) = \gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) a_n = \gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) a_{n-1}a_n = \dots$$

$$\dots = \gamma(0)a_1 \dots a_n = ea_1 \dots a_n = a_1 \dots a_n,$$

тобто $a \in U^n$ для деякого n, що й потрібно було показати.

4. Оскільки $L_a \colon G \to G$ – гомеоморфізм за твердженням 3.1, він переводить компоненти лінійної зв'язності у (взагалі кажучи, інші) компоненти лінійної зв'язності, тому $L_a(G^0) = H$. Дійсно, оскільки $L_a(G^0)$ – лінійно зв'язна в силу неперервності L_a множина, що містить $L_a(e) = a \in H$, $L_a(G^0) \subset H$. З аналогічних міркувань, $(L_a)^{-1}(H) = L_{a^{-1}}(H) \subset G^0$, тобто $H \subset L_a(G^0)$. Тоді $L_a \colon G^0 \to H$ – гомеоморфізм як обмеження гомеоморфізма. Оскільки у випадку групи Лі G^0 і H – вкладені підмноговиди (для H це перевіряється так само, як для G^0 у пункті 2.), а в силу твердження 3.1 зсув $L_a \colon G \to G$ є дифеоморфізмом, його обмеження $L_a \colon G^0 \to H$ – також дифеоморфізм. Для правого зсуву R_a доведення дослівно таке ж саме.

$\blacksquare$

У доведенні пункта 2., звичайно, можна було послатися і на теорему Картана, але у таких простих випадках краще розуміти гладку структуру безпосередньо. Пункт 3. теореми можна неформально інтерпретувати наступним чином: структура лінійно зв'язної групи визначається як завгодно малим околом її одиниці. Це спостереження виявиться дуже корисним у подальшому. Пункт 4. означає, що усі компоненти лінійної зв'язності топологічної групи (відповідно, групи Лі) гомеоморфні (дифеоморфні) її компоненті одиниці. При цьому інші компоненти підгрупами не є (хоча б тому, що не містять одиницю).

Інваріантні структури будуть посідати центральне місце у цьому курсі. Познайомимося з першою з них.

Означення 3.3. Борелівська міра μ на топологічній групі G зветься *лівоінваріантною* (відповідно, *правоінваріантною*), якщо $\mu(A) = \mu\left(L_a(A)\right)$

$(\mu(A) = \mu\left(R_a(A)\right))$ для будь-якої борелівської підмножини $A \subset G$ і кожного $a \in G$.

Борелівська лівоінваріантна (відповідно, правоінваріантна) міра μ на локально компактній хаусдорфовій топологічній групі G зветься її *лівою* (*правою*) *мірою Хаара*, якщо вона є мірою Радона, тобто:

- $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U$ відкрита$\}$ для будь-якої борелівської $A \subset G$ (зовнішня регулярність);
- $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U, K$ компактна$\}$ для будь-якої відкритої $U \subset G$ (внутрішня регулярність);
- $\mu(K) < \infty$ для будь-якої компактної $K \subset G$.

Теорема 3.2 (Хаар)**.** *На будь-якій локально компактній хаусдорфовій топологічній групі G існують ненульові ліва і права міри Хаара, що є єдиними з точністю до множення на константу.*

Доведення. Див. [31, с. 145-150].

■

Групи Лі задовольняють умовам цієї теореми, бо є многовидами. Для них ми в подальшому наведемо явну конструкцію міри Хаара методами ріманової геометрії (див. розділ 17).

Приклад 3.1. На абелевій групі $\mathbb{R}^n$ з прикладу 2.4 міра Лебега є лівою та правою мірою Хаара, бо є мірою Радона й інваріантна відносно паралельних перенесень.

4 Структура найпростіших матричних груп Лі

Повернемося до матричних груп і спробуємо з'ясувати їх будову (як топологічних просторів і гладких многовидів) у найпростіших випадках. Тут і далі під ізоморфізмом будемо розуміти ізоморфізм груп Лі, якщо не вказане інше.

Приклад 4.1. Групи $\mathrm{SL}(1,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(1,\mathbb{C}) = \mathrm{SO}(1) = \mathrm{SU}(1) = \{(1)\}$ складаються з одного (нейтрального) елемента і є 0-вимірними та зв'язними.

Приклад 4.2. Група $\mathrm{O}(1) = \{(1), (-1)\}$ з двох елементів (що є її одноточковими зв'язними компонентами) теж 0-вимірна та ізоморфна групі $\mathbb{Z}_2$ з дискретною структурою. Також її можна ототожнити з 0-вимірною сферою $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$. Компонентою одиниці цієї групи є $\mathrm{O}(1)^0 = \{(1)\} = \mathrm{SO}(1)$.

Приклад 4.3. Група $\mathrm{GL}(1,\mathbb{R}) = \{(a) \in \mathrm{Mat}(1,\mathbb{R}) \mid a \neq 0\}$ очевидним чином ізоморфна множині $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ з операцією множення і гладкою структурою відкритої підмножини прямої $\mathbb{R}$ (мультиплікативній групі поля $\mathbb{R}$) і є, таким чином, одновимірною. Вона складається з двох зв'язних компонент, зокрема, $GL(1,\mathbb{R})^0 = \{(a) \mid a > 0\}$ ізоморфна групі додатних дійсних чисел з операцією множення або всій прямій $\mathbb{R}$ з операцією додавання (приклад 2.4). Ізоморфізм тут має вигляд $(a) \mapsto \ln a$.

Вправа 4.1. Показати, що $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ складається з двох (дифеоморфних за пунктом 4. теореми 3.1) зв'язних компонент і для довільного n. Як охарактеризувати матриці, що належать цим компонентам? Розв'язок можна знайти у [37, с. 165-166]. Пор. також із твердженням 4.1 нижче.

Приклад 4.4. З курсів аналітичної геометрії та лінійної алгебри добре відомо, що

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Це матриці обертань евклідової площини навколо початку координат на кут φ (в ортонормованому базисі). У чотиривимірному просторі $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ ці матриці утворюють одиничне коло, що лежить у деякій двовимірній площині (якій?). Відображення

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mapsto e^{i\varphi}$$

є дифеоморфізмом на S^1, бо кут φ (або його зсув на константу $\varphi + C$) можна взяти у якості локальної координати й на $\mathrm{SO}(2)$. Більш того, оскільки множення таких матриць теж відповідає додаванню кутів (що випливає з геометричних міркувань або перевіряється безпосередньо), це ізоморфізм (на групу S^1 з прикладу 2.5). Це означає, зокрема, що $\mathrm{SO}(2)$ є одновимірною зв'язною групою Лі.

Приклад 4.5. Група $\mathrm{U}(1) = \{(z) \in \mathrm{Mat}(1,\mathbb{C}) \mid |z|^2 = z\overline{z} = 1\}$ зрозумілим чином ізоморфна $S^1 \subset \mathbb{C}$. Зокрема, $\mathrm{U}(1) \cong S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ в силу попереднього прикладу.

Приклад 4.6. Знову ж, з відомих геометричних фактів випливає, що

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \bigsqcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$$

(диз'юнктне об'єднання), де матриці з другої підмножини (яку ми позначатимемо $\mathrm{O}^-(2)$) відповідають симетріям площини відносно прямих, що проходять через початок координат (яких саме?). Хоча $\mathrm{O}^-(2)$ й не є підгрупою, вона так само є одиничним колом, що лежить у двовимірній площині (якій?) чотиривимірного простору $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ і дифеоморфне S^1. Група ж $\mathrm{O}(2)$, таким чином, одновимірна і є незв'язним об'єднанням (топологічною сумою) двох кіл, які є його зв'язними компонентами, і одне з яких є підгрупою $\mathrm{O}(2)^0 = \mathrm{SO}(2)$. Аналогічна ситуація має місце й для довільного n, як побачимо у наступному твердженні.

Розглянемо випадок довільного натурального n. Раніше ми встановили (див. обговорення після означення 1.3), що будь-яка ортогональна матриця має визначник 1 або -1, тобто $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \sqcup \mathrm{O}^-(n)$, де $\mathrm{O}^-(n) \coloneqq \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = -1\}$.

Твердження 4.1. *Зв'язними компонентами* $\mathrm{O}(n)$ *є* $\mathrm{SO}(n)$ *і* $\mathrm{O}^-(n)$*, що дифеоморфні. Зокрема,* $\mathrm{O}(n)^0 = \mathrm{SO}(n)$ *є компонентою одиниці.*

Доведення. Покажемо, що ці дві підмножини є лінійно зв'язними. Як відомо з лінійної алгебри (див., наприклад, [30, с. 136-137]), для будь-якої $A \in \mathrm{SO}(n)$ існує $B \in \mathrm{O}(n)$ така, що

$$A = B \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & & \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & & & \\ & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} B^T.$$

Покладемо для $t \in [0,1]$

$$\gamma(t) \coloneqq B \begin{pmatrix} \cos t\varphi_1 & -\sin t\varphi_1 & & & & & & \\ \sin t\varphi_1 & \cos t\varphi_1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos t\varphi_k & -\sin t\varphi_k & & & \\ & & & \sin t\varphi_k & \cos t\varphi_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} B^T.$$

Тоді $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{SO}(n)$ – шлях (відображення неперервне, бо задається неперервними функціями, і діє в $\mathrm{SO}(n)$, бо для будь-якого t матриця $\gamma(t)$ ортогональна як добуток ортогональних, а її визначник дорівнює добутку $(\det B)^2 = 1$ на визначник середньої матриці, що теж дорівнює 1), $\gamma(0) = BIB^T = BB^T = I$, $\gamma(1) = A$. Отже, $\mathrm{SO}(n)$ лінійно зв'язна. Для $\mathrm{O}^-(n)$ лінійна зв'язність встановлюється аналогічно (зробіть це).

З іншого боку, $\mathrm{O}(n)$ не є зв'язною, оскільки неперервна функція det переводить $\mathrm{O}(n)$ у незв'язну множину $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$. Тобто $\mathrm{SO}(n)$ і $\mathrm{O}^-(n)$ є компонентами зв'язності та лінійної зв'язності $\mathrm{O}(n)$ (нагадаємо ще раз, що у многовидів компоненти зв'язності та лінійної зв'язності збігаються завжди). Їх дифеоморфність випливає тоді з пункта 4. теореми 3.1.

∎

Вправа 4.2. 1. Показати, що $\mathrm{U}(n)$ і $\mathrm{SU}(n)$ зв'язні (також використати факти з [30, с. 136-137]).

2. Показати, що $\mathrm{O}(p,q)$ при $p, q > 0$ складається з чотирьох дифеоморфних зв'язних компонент (див. [37, с. 166-177], а також [30, с. 171-180] для розуміння контекста).

Вправа 4.3. Описати групу $\mathrm{O}(1,1)$. Показати, що вона абелева та одновимірна. Як виглядають її чотири зв'язні компоненти?

Приклад 4.7. Аналогічно до дійсного випадку, група $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \{(a) \in \mathrm{Mat}(1,\mathbb{C}) \mid a \neq 0\}$ ізоморфна множині $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ з операцією множення і гладкою структурою відкритої підмножини комплексної площини $\mathbb{C}$ (мультиплікативній групі поля $\mathbb{C}$). Вона двовимірна і зв'язна.

Вправа 4.4. Чи можна щось сказати про зв'язність $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ для довільного n?

Приклад 4.8. Згідно з означенням,

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} z & w \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; A\overline{A}^T = I,\, \det A = 1 \right\}.$$

Перепишемо умову унітарності:

$$\begin{pmatrix} \overline{z} & \overline{u} \\ \overline{w} & \overline{v} \end{pmatrix} = \overline{A}^T = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} v & -w \\ -u & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & -w \\ -u & z \end{pmatrix}.$$

Ці рівності зводяться до $u = -\overline{w}$ та $v = \overline{z}$. Крім того, маємо умову одиничного визначника:

$$1 = \det A = zv - uw = z\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2.$$

Таким чином,

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \colon \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 \right\}.$$

Це означає, що SU(2) утворює тривимірну сферу у чотиривимірному підпросторі (що визначений умовами $u = -\overline{w}$, $v = \overline{z}$) 8-вимірного простору $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$. Співставивши кожній такій матриці точку $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, отримаємо бієкцію SU(2) на стандартну сферу $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, що буде дифеоморфізмом (чому?). Зокрема, група SU(2) є тривимірною і зв'язною.

Для опису групової структури SU(2) корисно буде згадати про *кватерніони*, що є чотиривимірним узагальненням комплексних чисел (див., наприклад, [4, с. 230-232]). Вони визначаються як множина формальних лінійних комбінацій

$$\mathbb{H} \coloneqq \{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

з операціями покомпонентного додавання

$$(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)+(\alpha'+\beta' i+\gamma' j+\delta' k) \coloneqq (\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')i+(\gamma+\gamma')j+(\delta+\delta')k$$

(відносно якого є абелевою групою), множення на скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) \coloneqq \lambda\alpha + \lambda\beta i + \lambda\gamma j + \lambda\delta k$$

і множення кватерніонів між собою. Цей кватерніонний добуток однозначно визначений умовами білінійності

$$(\lambda q + \mu q')r = \lambda qr + \mu q'r, \quad q(\lambda r + \mu r') = \lambda qr + \mu qr'$$

для будь-яких $q, q', r, r' \in \mathbb{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ та рівностями

$$\begin{aligned}
&1q = q1 \; \forall\, q \in \mathbb{H}, \\
&ij = -ji = k, \\
&jk = -kj = i, \\
&ki = -ik = j, \\
&i^2 = j^2 = k^2 = -1
\end{aligned}$$

("таблицею множення"). Тут використовуються очевидні спрощені позначення, коли у виразі для кватерніона ми не записуємо доданки, коефіцієнти біля яких дорівнюють нулю (наприклад, $\alpha = \alpha + 0i + 0j + 0k$ або $i = 0 + 1i + 0j + 0k$). Зокрема, i, j та k є "уявними одиницями" в силу останньої з умов. Зауважимо, що дійсні числа можна тоді інтерпретувати як кватерніони вигляду $\alpha + 0i + 0j + 0k$, а операцію множення на скаляр – як окремий випадок кватерніонного добутку. Також зрозуміло, що цей добуток некомутативний, а 1 є його одиницею.

Вправа 4.5. Виписати формулу кватерніонного добутку явно, тим самим остаточно пересвідчившися у коректності його конструкції. Перевірити також, що він асоціативний.

Наслідок 4.1. *Кватерніони утворюють чотиривимірний векторний простір* $\mathbb{H}$ *над* $\mathbb{R}$ *з додатковою білінійною операцією добутку* $\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{H}$.

Такі об'єкти називають *алгебрами* (див. далі означення 10.1). Зрозуміло, що $\{1, i, j, k\}$ утворюють базис $\mathbb{H}$. Введемо на $\mathbb{H}$ евклідовий скалярний добуток, для якого цей базис ортонормований.

Продовжимо аналогію з комплексними числами. Нехай $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$. Його *дійсною частиною* будемо називати $\Re q := \alpha$, а *уявною* – $\Im q := \beta i+\gamma j+\delta k$. Тоді кватерніоном, що *спряжений* до q, назвемо $\overline{q} := \Re q - \Im q = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$. Ключовим спостереженням є те, що, аналогічно комплексним числам, $q\overline{q} = \overline{q}q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ (перевірте це). Це невід'ємне дійсне число, а *модуль* кватерніона $|q| := \sqrt{q\overline{q}}$ є, звичайно, його евклідовою нормою. Оскільки тоді $q\frac{\overline{q}}{|q|^2} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}q = 1$ для будь-якого $q \neq 0$, кватерніон $q^{-1} := \frac{\overline{q}}{|q|^2}$ є оберненим до q відносно операції добутку. Таким чином, на кватерніони можна ділити! З перелічених властивостей випливає, що $\mathbb{H}$ з операціями додавання та кватерніонного добутку задовольняє всім аксіомам поля крім комутативності добутку. Такі алгебраїчні структури називають *тілами* (а також це *асоціативна алгебра з діленням*; ми повернемося до алгебр у розділі 10).

Наслідок 4.2. *Кватерніони з операціями додавання та кватерніонного добутку утворюють тіло.*

Також помітимо, що $\overline{qr} = \overline{r}\,\overline{q}$ (перевірте), тому

$$|qr| = \sqrt{qr\overline{qr}} = \sqrt{q(r\overline{r})\overline{q}} = \sqrt{|r|^2 q\overline{q}} = |q||r|,$$

де ми використали те, що дійсні (тобто з нульовою уявною частиною) кватерніони комутують з іншими. Зокрема, з $|q| = |r| = 1$ випливає $|qr| = 1$, тому підмножина $\{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ з операцією множення утворює групу. З іншого боку, якщо ототожнити $\mathbb{H}$ з $\mathbb{R}^4$, поставивши у відповідність кватерніону $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ точку $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, ця множина відповідає стандартній тривимірній сфері. Відображення добутку та взяття оберненого в ній тоді є гладкими як обмеження гладких (перевірте).

Наслідок 4.3. *Множина одиничних кватерніонів* $S^3 := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ *з операцією кватерніонного добутку та стандартною гладкою структурою тривимірної сфери є групою Лі.*

Таким чином, кватерніонний добуток індукує структуру групи Лі на S^3 аналогічно до того, як комплексний добуток індукує її на S^1 у прикладі 2.5. Повернемося тепер до нашої спеціальної унітарної групи.

Твердження 4.2. *Відображення*

$$\mathrm{SU}(2) \to S^3 \colon \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix} \mapsto \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

є ізоморфізмом груп Лі.

Доведення. Це відображення є дифеоморфізмом, оскільки за побудовою фактично є тотожним відображенням стандартних тривимірних сфер. Тому достатньо перевірити, що це ізоморфізм груп. Оскільки його продовження до відображення чотиривимірного підпростору $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ на $\mathbb{H}$ (з тією ж формулою) є лінійним ізоморфізмом, зокрема, зберігає додавання і множення на скаляр, достатньо перевірити збереження попарних добутків між базисними кватерніонами та базисними матрицями, що в них переходять (тобто те, що це продовження є ізоморфізмом алгебр, див. означення 10.2 далі):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 1,\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \mapsto i,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto j,\ \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \mapsto k.$$

Це дійсно так, наприклад,

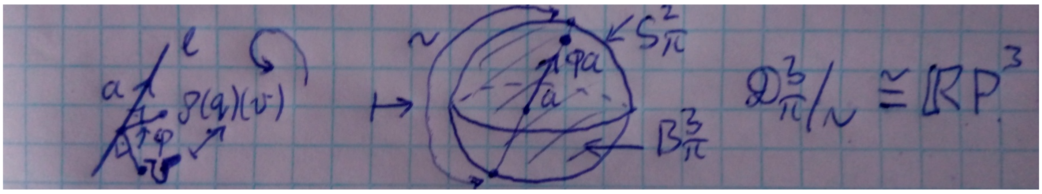
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

що відповідає $ij = -ji = k$. Перевірте це для інших добутків самостійно. ■

Зауважимо також, що це перший у цьому списку приклад неабелевої групи Лі.

Приклад 4.9. Матриці з групи $\mathrm{SO}(3)$ представляють у ортонормованому базисі лінійні ізометрії тривимірного евклідового простору, що зберігають орієнтацію (у подальшому будемо їх називати просто рухами; зауважимо, що тут йдеться лише про рухи, що зберігають початок координат). Оскільки такі рухи описуються трьома числами (кутами Ейлера з кінематики або кутами крену, тангажу і никання, що використовуються в авіоніці та інших застосуваннях), інтуїтивно зрозуміло, що ця група Лі тривимірна. Але як точно описати її топологічну та гладку структури?

Будемо позначати через E^3 простір $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ зі стандартною евклідовою структурою, для якої координати (x, y, z) – декартові. Згадаємо теорему Шаля (див, наприклад, [30, с. 204]): будь-який рух E^3, що зберігає початок координат 0, є обертанням навколо орієнтованої (тобто з обраним напрямком) прямої l, що проходить через 0 і однозначно визначена одиничним напрямним вектором a, на кут $\varphi \in [-\pi, \pi]$. При цьому обертання здійснюється, скажімо, проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця a. Обертання на кути π та $-\pi$ є одним й тим самим рухом – симетрією відносно l, а обертання на кут 0 – тотожним відображенням. Поставимо у відповідність цьому обертанню (і його матриці з SO(3)) точку $\varphi a \in \mathbb{R}^3$. Тоді ці точки заповнять замкнену кулю D^3_π з центром у 0 радіуса π (бо $|a| = 1$). При цьому симетрії відносно l відповідатимуть діаметрально протилежні точки πa та $-\pi a$ на межі D^3_π, тобто на сфері S^2_π, а між рештою відображень і точками відкритої кулі B^3_π встановиться взаємно однозначна відповідність (зокрема, тотожному відображенню відповідатиме 0). Таким чином, ми сконструювали бієкцію між SO(3) та факторизацією $D^3_\pi/_\sim$ замкненої кулі за відношенням еквівалентності $\sim$, що ототожнює діаметрально протилежні точки її межі S^2_π і зберігає всі інші, як проілюстровано знизу. Як відомо, ця фактормножина з фактортопологією гомеоморфна тривимірному проєктивному простору $\mathbb{R}P^3$, більш того, це тривимірний гладкий многовид. Можна показати, що побудована бієкція є тоді дифеоморфізмом. Але його доволі складно буде виписати аналітично, до того ж, незрозуміло, який сенс має перенесення групової структури на $\mathbb{R}P^3$.



Натомість дамо опис SO(3), що базується на класичному представленні рухів E^3 у термінах кватерніонів. Воно викладене, наприклад, у [4, с. 232-234] або [42, с. 14-16]. Трохи інший, але еквівалентний підхід, що використовує спінори, описаний у [30, с. 163-171].

Наділимо підпростір *чисто уявних* кватерніонів

$$\Im\mathbb{H} := \{q \in \mathbb{H} \mid \Re q = 0\} = \{\beta i + \gamma j + \delta k \mid \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

евклідовим скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle$ та орієнтацією, для яких $\{i, j, k\}$ є додатно орієнтованим ортонормованим базисом. Тоді на ньому визначений і векторний добуток $[\cdot, \cdot]$. Якщо ототожнити $\Im\mathbb{H}$ з $\mathbb{R}^3$, поставивши у відповідність кватерніону $\beta i + \gamma j + \delta k$ точку (β, γ, δ), то це буде ізометрія на E^3. Зокрема, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ і $[\cdot, \cdot]$ виглядають "стандартним чином":

$$\langle \beta i + \gamma j + \delta k, \beta' i + \gamma' j + \delta' k \rangle = \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta',$$

і аналогічно для векторного добутку.

Вправа 4.6. Перевірити, що кватерніонний добуток чисто уявних кватерніонів виражається через скалярний і векторний:

$$vw = -\langle v, w\rangle + [v, w]$$

для будь-яких $v, w \in \Im\mathbb{H}$. Тут сума $-\langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ і $[v, w] \in \Im\mathbb{H}$ інтерпретується як кватерніон з $\mathbb{H}$.

Нехай тепер $q \in \mathbb{H}$ – деякий одиничний кватерніон, тобто $q \in S^3$ у позначеннях прикладу 4.8. Розглянемо відображення

$$\rho(q)\colon \Im\mathbb{H} \to \mathbb{H}\colon v \mapsto qvq^{-1} = qv\overline{q},$$

тобто спряження з q. Тут $q^{-1} = \overline{q}$, бо $|q| = 1$ (див. формулу оберненого кватерніона у прикладі 4.8). Перш за все, зауважимо, що $qv\overline{q}$ – теж чисто уявний, тобто це відображення не виводить за межі $\Im\mathbb{H}$:

$$\Re\, qv\overline{q} = \Re\, \overline{q}qv = \Re\, |q|^2 v = \Re\, v = 0,$$

де використали властивість $\Re\, qr = \Re\, rq$ (для будь-яких $q, r \in \mathbb{H}$), що випливає із загальної формули кватерніонного добутку або легко перевіряється безпосередньо. Крім того, з властивостей кватерніонного добутку випливає, що відображення $\rho(q)\colon \Im\mathbb{H} \to \Im\mathbb{H}$ є лінійним:

$$\rho(q)(\lambda v + \mu w) = q(\lambda v + \mu w)\overline{q} = \lambda qv\overline{q} + \mu qw\overline{q} = \lambda\rho(q)(v) + \mu\rho(q)(w)$$

для будь-яких $v, w \in \Im\mathbb{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Нарешті, воно зберігає скалярний добуток, тобто є ізометрією. Дійсно, в силу формули з вправи 4.6 маємо для будь-яких $v, w \in \Im\mathbb{H}$

$$\langle \rho(q)(v), \rho(q)(w)\rangle = \langle qv\overline{q}, qw\overline{q}\rangle = -\Re\, qv\overline{q}qw\overline{q} = -\Re\, qv|q|^2 w\overline{q} =$$

$$= -\Re\, qvw\overline{q} = -\Re\, \overline{q}qvw = -\Re\, |q|^2 vw = -\Re\, vw = \langle v, w\rangle,$$

де знову використали комутативність під знаком дійсної частини. Підсумуємо доведене.

Наслідок 4.4. *Для будь-якого $q \in S^3$ відображення $\rho(q)\colon \Im\mathbb{H} \to \Im\mathbb{H}$ є лінійною ізометрією тривимірного евклідового простору $\Im\mathbb{H}$.*

Тепер розглянемо саме відображення ρ, що ставить у відповідність одиничному кватерніону q ізометрію $\rho(q)$. Ототожнивши ці ізометрії з їхніми матрицями у базисі $\{i, j, k\}$, ми можемо вважати ρ відображенням з S^3 в групу $\mathrm{O}(3)$. Оскільки компоненти матриці $\rho(q)$ є тоді поліноміальними функціями від коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ кватерніона $q = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ (чому?), це відображення індукується неперервним $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$, а отже є неперервним. Тоді образ зв'язної S^3 зв'язний і тому повинен лежати у зв'язній компоненті $\mathrm{O}(3)$. Оскільки $\rho(1)$ є, очевидно, тотожним відображенням, що відповідає матриці $I \in \mathrm{SO}(3)$, і в силу твердження 4.1, цією компонентою є $\mathrm{SO}(3)$. Більш того, згадане вище поліноміальне відображення $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ є гладким, а тому індукує гладке відображення вкладених підмноговидів $\rho\colon S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ (де група Лі $\mathrm{SO}(3)$ є вкладеною в силу теореми Картана, див. приклад 2.8).

Крім того, ρ – гомоморфізм груп. Дійсно, для будь-яких $q, r \in S^3$ і для кожного $v \in \Im\mathbb{H}$

$$\rho(qr)(v) = qrv\overline{qr} = q(rv\overline{r})\overline{q} = \rho(q) \circ \rho(r)(v).$$

Оскільки композиція операторів відповідає добутку матриць, звідси маємо $\rho(qr) = \rho(q)\,\rho(r)$

Наслідок 4.5. *Відображення $\rho\colon S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ є гомоморфізмом груп Лі.*

Тут на S^3 розглядаємо структуру групи Лі з прикладу 4.8. Дві важливі властивості цього гомоморфізма випливають з наступної вправи.

Вправа 4.7. 1. Показати, що обертання навколо прямої з одиничним напрямним вектором $\beta i + \gamma j + \delta k \in \Im\mathbb{H}$, $\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, що проходить через 0, на кут φ задається відображенням $\rho(q)$, де $q = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}(\beta i + \gamma j + \delta k) \in S^3$.

2. Показати, що відображення $\rho(q)$ тотожне тоді й тільки тоді, коли $q = 1$ або $q = -1$.

Перший пункт разом зі згаданою вище теоремою Шаля означає, що образ нашого гомоморфізма $\rho(S^3) = \mathrm{SO}(3)$, тобто це сюр'єкція (епіморфізм). Другий – що його ядро $\operatorname{Ker}\rho = \{1, -1\}$. Це підгрупа з дискретною індукованою топологією, що, звичайно, є вкладеною підгрупою Лі та ізоморфна $\mathbb{Z}_2$ (пор. з прикладом 4.2). Як відомо, тоді ρ факторизується у ізоморфізм $\widetilde{\rho}$ факторгрупи області визначення за ядром і образу:

$$\widetilde{\rho}\colon S^3/\{1, -1\} \to \mathrm{SO}(3).$$

Нагадаємо, що при цьому ізоморфізмі кожний лівий (він же правий) суміжний клас за підгрупою $\{1, -1\}$, що має вигляд $\{q, -q\}$, тобто є парою діаметрально протилежних точок сфери, переходить у $\rho(q) = \rho(-q)$. Тобто областю визначення $\widetilde{\rho}$ є фактормножина S^3 за відношенням еквівалентності, що ототожнює діаметрально протилежні точки. Це – ще один опис тривимірного проєктивного простору $\mathbb{R}P^3$. Ототожнимо $S^3/\{1,-1\}$ з ним і наділимо стандартною гладкою структурою цього тривимірного многовида.

Вправа 4.8. Показати, що бієкція $\widetilde{\rho}\colon \mathbb{R}P^3 \to \mathrm{SO}(3)$ є дифеоморфізмом.

Отже, група Лі $\mathrm{SO}(3)$ дійсно дифеоморфна $\mathbb{R}P^3$ і тому є тривимірною.

Вправа 4.9. Дослідити, як у термінах кватерніонів виглядає розкладення довільного руху $\Im\mathbb{H}$ у композицію обертань на кути Ейлера (див. також [30, с. 170-171]).

Крім згаданих у двох останніх прикладах, тривимірними є групи Лі $\mathrm{O}(3)$, $\mathrm{O}(2,1) \cong \mathrm{O}(1,2)$ та $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Як і $\mathrm{SU}(2)$ та $\mathrm{SO}(3)$, вони всі неабелеві.

Вправа 4.10. Спробувати дослідити структуру цих груп.

Вправа 4.11. Використавши опис рухів чотиривимірного евклідового простору за допомогою кватерніонів, що наведений у [4, с. 235], показати, що $\mathrm{SO}(4)$ ізоморфна факторгрупі $S^3 \times S^3$ за підгрупою, що ізоморфна $\mathbb{Z}_2$, і що цей ізоморфізм є дифеоморфізмом на 6-вимірний гладкий многовид, а отже група Лі $\mathrm{SO}(4)$ є 6-вимірною.

Виявляється, що й для довільного n група Лі $\mathrm{SO}(n)$ ізоморфна факторгрупі деякої іншої групи Лі за підгрупою, що ізоморфна $\mathbb{Z}_2$, при цьому ця інша група Лі визначена однозначно з точністю до ізоморфізма. Вона зветься *спінорною групою* і позначається $\mathrm{Spin}(n)$. Див. [22, с. 67-87]. Спробуйте показати, що $\mathrm{Spin}(1) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{O}(1)$ і $\mathrm{Spin}(2) \cong S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$. З міркувань прикладу 4.9 (а також з прикладу 4.8) випливає, що $\mathrm{Spin}(3) \cong S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$, а з попередньої вправи – що $\mathrm{Spin}(4) \cong S^3 \times S^3 \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$. Також відомо, що відображення факторизації (канонічна проєкція) $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ є дволистовим накриттям і що при $n \geqslant 3$ група Лі $\mathrm{Spin}(n)$ однозв'язна (як ми й бачимо при $n = 3$ і $n = 4$), тобто це накриття універсальне. Накриття нам ще знадобляться у подальшому, і у розділі 14 будуть нагадані потрібні означення.

Зауважимо, що дослідження окремих груп винахідливими, але характерними лише для них методами є цікавою і корисною задачею, але не дуже продуктивною з точки зору побудови теорії. Тому ми повернемося до більш загальних випадків, але спочатку розглянемо ще одну тему, що пов'язана з матричними групами.

5 Дотичні простори матричних груп Лі

Описавши дотичні простори класичних матричних груп, ми, зокрема, з'ясуємо їх вимірності, а також познайомимося з кількома конструкціями та фактами, що виявляться корисними в подальшому. Традиційно для теорії Лі позначатимемо дотичні простори в одиницях груп Лі відповідними малими готичними літерами: $T_eG = \mathfrak{g}$, і аналогічно $T_I\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $T_I\mathrm{SO}(n) = \mathfrak{so}(n)$ тощо. Зауважимо, що дотичний підпростір у довільній точці $a \in G$ групи Лі можна отримати з дотичного простору в одиниці дією диференціала лівого зсуву d_eL_a, бо цей зсув є дифеоморфізмом згідно з твердженням 3.1, а отже $d_eL_a\colon \mathfrak{g} \to T_aG$ – лінійний ізоморфізм (і аналогічно для правого зсуву).

Тут і в подальшому *матричними групами Лі* будемо називати підгрупи Лі в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ або $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Будь-яка така підгрупа G є (зануреним) підмноговидом у просторі матриць $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ або $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ відповідно, а вкладена підгрупа – вкладеним підмноговидом (зокрема, будь-яка замкнена, що є вкладеною за теоремою Картана, див. приклад 2.8). Дійсно, самі групи $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ і $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ є вкладеними підмноговидами як відкриті підмножини цих просторів (див. міркування розділу 1), а композиція занурень (відповідно, вкладень) є зануренням (вкладенням). Тому дотичний простір $\mathfrak{g}$ такої групи в її одиниці I можна ототожнити з підпростором $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ або $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, розглянувши його як простір усіх дотичних векторів до матричних кривих, що проходять через I:

$$\mathfrak{g} = T_IG = \{A'(t_0) \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid A \in C^\infty((\alpha,\beta),G)\colon A(t_0) = I\} \qquad (5.1)$$

у дійсному випадку і так само у комплексному. Тут $A'(t_0)$ більш точно означає $(i \circ A)'(t_0)$ для гладкої матричної кривої $A\colon (\alpha,\beta) \to G$ і включення $i\colon G \to \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, а диференціювання здійснюється покомпонентно: якщо $A(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, то $A'(t_0) = \left(A'_{ij}(t_0)\right)_{i,j=1}^n$ для $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Дотичні простори G в інших точках можуть бути описані так само. Далі обговорюватимемо дійсний випадок, на комплексний подальші міркування переносяться за аналогією, і ми повернемося до нього наприкінці розділу.

Оскільки $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ є відкритою підмножиною $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, її дотичні підпростори збігаються з усім простором матриць. Перевіримо це безпосередньо, використавши опис (5.1). Оскільки $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, достатньо перевірити обернене включення. Нехай $x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$. З неперервності $\det\colon \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ і того, що $\det I = 1$, випливає існування $\varepsilon > 0$ такого, що $\det(I + tx) \neq 0$ для будь-якого $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Таким чином, $A(t) \coloneqq I + tx$ визначає гладку матричну криву (точніше, інтервал прямої) $A\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, і для неї, зрозуміло, $A(0) = I$ і $A'(0) = x$.

Наслідок 5.1. *Дотичний простір групи* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *в одиниці дорівнює*

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}).$$

Тепер перейдемо до групи $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Керуючись (5.1), розглянемо довільну гладку матричну криву $A\colon (\alpha, \beta) \to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ таку, що $A(t_0) = I$. Якщо $A(t) = \{A_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$, то ця умова означає $A_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$, де δ_{ij} позначає, як зазвичай, символ Кронекера, тобто дорівнює 0 при $i \neq j$ і 1 – при $i = j$. Позначимо $A'(t_0) = x = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^n$, тобто $A'_{ij}(t_0) = x_{ij}$ для будь-яких i та j. Для кожного $t \in (\alpha, \beta)$, оскільки $A(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, маємо за означенням визначника

$$1 = \det A(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; A_{1\sigma(1)}(t) \ldots A_{n\sigma(n)}(t),$$

де сума береться за усіма перестановками σ з n елементів. Продиференціюємо цю рівність за t і підставимо $t = t_0$:

$$0 = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \; \sum_{i=1}^{n} A_{1\sigma(1)}(t_0) \ldots A'_{i\sigma(i)}(t_0) \ldots A_{n\sigma(n)}(t_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A'_{ii}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \operatorname{Tr} x,$$

де друга рівність випливає з умови $A_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$. Дійсно, для будь-якої нетривіальної перестановки σ принаймні два вирази вигляду $A_{i\sigma(i)}(t_0)$ нульові, отже й усі доданки у відповідній внутрішній сумі. Для тотожної ж σ всі ці вирази одиничні (і $\operatorname{sign} \sigma = 1$). Отже, всі матриці з даного дотичного простору мають нульовий слід: $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \{x \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} x = 0\}$. Покажемо, що насправді ці простори рівні, довівши обернене включення. Нехай слід матриці $x \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ дорівнює нулю. Нам, таким чином, потрібно побудувати гладку матричну криву в $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, що проходить через I у напрямку x.

Згадаємо (наприклад, з курсу диференціальних рівнянь), що *матричною експонентою* довільної матриці $x \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ зветься сума ряда

$$e^x \coloneqq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i, \tag{5.2}$$

де $x^0 \coloneqq I$. Відомо, що цей ряд завжди покомпонентно сходиться, тобто визначена $e^x \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Більш того, $e^x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ в силу твердження 5.1 нижче. *Операторна експонента* для операторів на n-вимірному просторі V над $\mathbb{R}$ визначається так само та відповідає матричній у будь-якому базисі. Також ці конструкції переносяться на комплексний випадок. Див. [30, с. 74-76] або детальніше у [1, с. 160-184].

Твердження 5.1. $\det e^x = e^{\operatorname{Tr} x}$ *для будь-якої* $x \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$.

Доведення. Див. [1, с. 174-175] або [30, с. 75-76]. Чи доведіть самостійно, використавши відому граничну формулу $e^x = \lim\limits_{m\to\infty} \left(I + \frac{1}{m}x\right)^m$ для числової експоненти, дослівно таку ж саму формулу для матричної експоненти, що випливає з (5.2) (як само?), та формулу Тейлора для виразу $\det(I + tx)$ при $t \to 0$.

∎

Інші властивості матричної експоненти встановимо, коли вони нам знадобляться. Отже, нехай $\operatorname{Tr} x = 0$. Покладемо $A(t) := e^{tx}$. За попереднім твердженням, $\det A(t) = e^{\operatorname{Tr} tx} = e^{t \operatorname{Tr} x} = e^0 = 1$ для будь-якого дійсного t. Таким чином, визначене $A\colon \mathbb{R} \to \operatorname{SL}(n, \mathbb{R})$. Тоді з властивостей функціональних рядів (тут є рівномірна збіжність, див. посилання вище) випливає, що A є гладким відображенням у $\operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$, а отже й у $\operatorname{SL}(n, \mathbb{R})$, тобто гладкою матричною кривою у цій групі. За формулою (5.2), $A(0) = e^0 = I$. З неї ж легко вивести (зробіть це), що $A'(t) = A(t)x$ для будь-якого t, зокрема, $A'(0) = A(0)x = x$. З (5.1) тоді випливає, що $x \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Наслідок 5.2. *Дотичний простір групи* $\operatorname{SL}(n, \mathbb{R})$ *в одиниці дорівнює*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{x \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} x = 0\}.$$

Так само дослідимо групу $\operatorname{O}(n)$. Нехай $A\colon (\alpha, \beta) \to \operatorname{O}(n)$ – гладка матрична крива, $A(t_0) = I$. Таким чином,

$$I = A(t)\, A(t)^T$$

для будь-якого t. Продиференціюємо за t і підставимо $t = t_0$:

$$0 = A'(t_0)\, A(t_0)^T + A(t_0)\, A'(t_0)^T = x + x^T,$$

де знову позначили $A'(t_0) = x$, використали очевидну комутативність операцій транспонування та покомпонентного диференціювання, а також наступну вправу.

Вправа 5.1. Показати, що операція покомпонентного диференціювання матричних функцій задовольняє правилу диференціювання добутку (правилу Лейбніца): $(AB)' = A'B + AB'$.

Отже, $\mathfrak{o}(n) \subset \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid x + x^T = 0\}$. Цей простір складається з усіх матриць $x = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ таких, що $x_{ij} = -x_{ji}$ для будь-яких $i, j = \overline{1,n}$, тобто *кососиметричних*. Зокрема, для таких матриць $x_{ii} = 0$ для будь-якого i, отже вони мають нульову діагональ.

І навпаки, нехай $x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ кососиметрична, тобто $x + x^T = 0$. Тоді розглянемо ту ж матричну криву, що й для спеціальної лінійної групи: $A(t) := e^{tx}$. Для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ маємо:

$$A(t)\,A(t)^T = e^{tx}\,\left(e^{tx}\right)^T = e^{tx}\,e^{tx^T} = e^{tx}\,e^{-tx} = e^{tx-tx} = e^0 = I.$$

Тут можливість занесення транспонування в показник експоненти випливає безпосередньо з (5.1), а ось звична за числовим експонуванням рівність $e^{tx}\,e^{-tx} = e^{tx-tx}$ потребує особливої уваги. Виявляється, що, взагалі кажучи, $e^x\,e^y \neq e^{x+y}$. Більш того, як побачимо далі у розділі 8, відмінність між цими виразами грає ключову роль у побудові центральної конструкції теорії Лі для матричних груп Лі. Але у нашому випадку так перемножати можна в силу наступної вправи.

Вправа 5.2. Показати, що, якщо матриці x і y комутують, тобто $xy = yx$, то $e^x\,e^y = e^{x+y}$. Зробіть це принаймні для пропорційних матриць: $e^{tx}\,e^{sx} = e^{(t+s)x}$ для будь-яких $t, s \in \mathbb{R}$, адже тут потрібен лише цей випадок. Також він випливає з пункту 5. твердження 7.1 далі. Доведення загального випадку див. у [30, с. 75].

Таким чином, $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{O}(n)$. Як і раніше, ця крива гладка, $A(0) = I$ та $A'(0) = x$. Тому $x \in \mathfrak{o}(n)$.

Оскільки $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \bigcap \mathrm{O}(n)$, з (5.1) випливає відповідна рівність дотичних просторів: $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \bigcap \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(n)$, бо, як зазначалося вище, діагоналі, а отже й сліди кососиметричних матриць нульові.

Наслідок 5.3. *Дотичні простори груп* $\mathrm{O}(n)$ *та* $\mathrm{SO}(n)$ *в одиниці дорівнюють*

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid x + x^T = 0\}.$$

Рівність дотичних просторів цих двох груп є очікуваною, бо $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n)^0$ за твердженням 4.1, а компонента одиниці групи Лі є в силу пункту 2. теореми 3.1 відкритим околом її одиничного елемента, і тому має той же дотичний простір у ньому (точніше, вони ототожнюються канонічним чином).

Наслідок 5.4. *Для будь-якої групи Лі* G

$$T_eG^0 = T_eG = \mathfrak{g}.$$

Зауважимо, що для простору кососиметричних матриць традиційно використовують саме позначення $\mathfrak{so}(n)$.

Вправа 5.3. Показати, що дотичний простір групи $\mathrm{O}(p,q)$ в одиниці дорівнює

$$\mathfrak{o}(p,q)=\{x\in \mathrm{Mat}(p+q,\mathbb{R}) \mid x\,I_{p,q}+I_{p,q}\,x^T=0\}.$$

Тепер ми в змозі знайти вимірності класичних матричних груп Лі як вимірності їхніх дотичних просторів. Для повної лінійної групи це, зрозуміло, $\dim \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})=n^2$. Для $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ маємо одну лінійну умову $\mathrm{Tr}\,x=0$, тому вимірність дорівнює n^2-1. Для $\mathfrak{so}(n)$ умова $x+x^T=0$ означає $\frac{n(n+1)}{2}$ лінійно незалежних лінійних умов $x_{ij}=-x_{ji}$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$ на компоненти матриці x, отже вимірність цього простору дорівнює $n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Зокрема, маємо 0 при $n=1$ (що узгоджується зі встановленим у прикладах 4.1 та 4.2), 1 при $n=2$ (приклади 4.4 та 4.6), 3 при $n=3$ (приклад 4.9) і 6 при $n=4$ (вправа 4.11).

Наслідок 5.5. *Вимірності груп* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*,* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$*,* $\mathrm{O}(n)$ *та* $\mathrm{SO}(n)$ *та їхніх дотичних просторів у одиниці дорівнюють, відповідно,*

- $\dim \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})=\dim \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})=n^2$*;*
- $\dim \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})=\dim \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})=n^2-1$*;*
- $\dim \mathrm{O}(n)=\dim \mathrm{SO}(n)=\dim \mathfrak{so}(n)=\frac{n(n-1)}{2}$.

Вправа 5.4. Показати, що $\dim O(p,q)=\dim \mathfrak{o}(p,q)=\frac{n(n-1)}{2}$, де $n=p+q$.

Для комплексних матричних груп Лі $G\subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, ототожнюючи їхні дотичні простори з підпросторами $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ аналогічно до (5.1) й далі міркуючи аналогічно до дійсного випадку, отримаємо наступне.

Наслідок 5.6. *Дотичні простори груп* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$*,* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$*,* $\mathrm{U}(n)$ *і* $\mathrm{SU}(n)$ *в одиниці дорівнюють, відповідно,*

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})=\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C});$$

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})=\{x\in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\,x=0\};$$
$$\mathfrak{u}(n)=\{x\in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid x+\overline{x}^T=0\};$$
$$\mathfrak{su}(n)=\{x\in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid x+\overline{x}^T=0,\ \mathrm{Tr}\,x=0\}.$$

Зауважимо, що на діагоналі *ермітово кососиметричної* матриці, тобто $x \in \mathfrak{u}(n)$, стоять вже не нулі, як у випадку $\mathfrak{o}(n)$, а уявні числа, тому додаткова умова нульового сліду в описі $\mathfrak{su}(n)$ суттєва. Перелічені тут множини матриць є векторними просторами як над дійсними, так і над комплексними числами.

Вправа 5.5. Знайти вимірності цих просторів над $\mathbb{R}$ і над $\mathbb{C}$.

Дійсні вимірності будуть вимірностями відповідних груп Лі.

Відмітимо також, що усі описані в цьому розділі підпростори дійсних та комплексних матриць замкнені відносно операції *комутатора* матриць $[x, y] \coloneqq xy - yx$. Наприклад, для будь-яких двох матриць $x, y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$, де $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, маємо

$$\mathrm{Tr}\,[x, y] = \mathrm{Tr}\,(xy - yx) = \mathrm{Tr}\,xy - \mathrm{Tr}\,yx = 0$$

в силу відомої властивості комутативності добутку матриць під знаком сліду: $\mathrm{Tr}\,xy = \mathrm{Tr}\,yx$ (перевірте її). Тому $[x, y] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$: комутатор не тільки "не виводить" з цього підпростору, а й "заводить" у нього будь-яку пару матриць.

Нехай тепер $x, y \in \mathfrak{so}(n)$. Тоді

$$[x, y]^T = (xy - yx)^T = y^T x^T - x^T y^T =$$

$$= (-y)(-x) - (-x)(-y) = yx - xy = -[x, y],$$

тобто дійсно $[x, y]$ також належить до $\mathfrak{so}(n)$.

Вправа 5.6. Перевірити це спостереження для інших описаних вище дотичних підпросторів у одиницях матричних груп Лі.

Цей факт виявляється невипадковим та вірним для будь-якої матричної групи Лі, як побачимо далі у розділі 8.

6 Лівоінваріантні векторні поля

Побудову загальної теорії груп Лі почнемо з важливого класу інваріантних об'єктів. У цьому розділі G всюди позначає деяку групу Лі, а $\mathfrak{g} = T_e G$ – її дотичний простір в одиниці.

Означення 6.1. Векторне поле X на групі Лі G зветься *лівоінваріантним* (відповідно, *правоінваріантним*), якщо воно інваріантне відносно дії диференціалами лівих (правих) зсувів: $d_b L_a(X(b)) = X(ab)$ $(d_b R_a(X(b)) = X(ba))$ для будь-яких елементів $a, b \in G$.

Зауважимо, що лівий зсув L_a переводить b в ab, тому його диференціал $d_b L_a$ діє з $T_b G$ у $T_{ab} G$. Саме в цих просторах і лежать вказані значення поля X, які цей диференціал повинен переводити одне в інше. Для правоінваріантних полів аналогічно, і взагалі теорія будується майже дослівно так само. Тому далі йтиметься лише про лівоінваріантні поля.

Покладемо у попередньому означенні $b = e$. Тоді для будь-якого $a \in G$ маємо $X(a) = d_e L_a(X(e))$. Зауважимо, що ця умова визначає X однозначно його значенням $X(e)$ в одиниці групи (насправді аналогічне твердження вірне й для значення X у довільному елементі G – покажіть це). Також з неї випливає гладкість поля X. Дійсно, розглянемо будь-які локальні координати та відповідні базиси дотичних просторів. Тоді координати елемента $L_a b = ab = \mu(a, b)$ гладко залежать від координат a і b в силу гладкості відображення добутку μ. Тому їхні часткові похідні за координатами b, що утворюють матрицю диференціала $d_e L_a$ (матрицю Якобі L_a у e), теж гладко залежать від координат a. Координати вектора $X(a)$ є лінійними комбінаціями цих матричних компонент з постійними коефіцієнтами – координатами $X(e)$, тому їх залежність від координат a також гладка (а що буде, якщо e і a лежатимуть в областях різних локальних координат?).

Нехай $x \in \mathfrak{g}$. Покладемо $X_x(a) \coloneqq d_e L_a(x)$ для будь-якого $a \in G$. Оскільки $d_e L_a(x) \in d_e L_a(\mathfrak{g}) = T_a G$ (знак рівності тут стоїть, бо L_a – дифеоморфізм за твердженням 3.1, а отже $d_e L_a$ – лінійний ізоморфізм), $X_a \colon G \to TG$ є векторним полем на G. При цьому $X_x(e) = d_e L_e(x) = d_e id_G(x) = id_{\mathfrak{g}}(x) = x$. Перевіримо, що це поле лівоінваріантне. Дійсно, для будь-яких $a, b \in G$ маємо

$$d_b L_a(X_x(b)) = d_b L_a \circ d_e L_b(x) = d_e(L_a \circ L_b)(x) = d_e L_{ab}(x) = X_x(ab),$$

де використали ланцюгове правило (диференціал композиції дорівнює композиції диференціалів) та властивість $L_a \circ L_b = L_{ab}$, що випливає з асоціативності множення. З іншого боку, будь-яке лівоінваріантне поле X згідно зі встановленим вище має вигляд $X_{X(e)}$. Це означає, що відповідність $x \mapsto X_x$ встановлює бієкцію між $\mathfrak{g}$ та множиною лівоінваріантних полів на G. До того ж, вона є лінійною:

$$X_{\lambda x + \mu y}(a) = d_e L_a(\lambda x + \mu y) = \lambda d_e L_a(x) + \mu d_e L_a(y) = \lambda X_x(a) + \mu X_y(a)$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ і кожного $a \in G$. Звідси випливає, зокрема, що множина лівоінваріантних полів на G є векторним підпростором простору $\mathcal{X}(G)$ всіх гладких векторних полів на G як образ лінійного відображення (втім, це можна вивести й безпосередньо з означення, бо його умова зберігається при лінійних комбінаціях – перевірте це).

Наслідок 6.1. *Лівоінваріантні векторні поля на групі Лі G утворюють векторний підпростір у $\mathcal{X}(G)$, а відповідність $x \mapsto X_x$ задає лінійний ізоморфізм $\mathfrak{g} = T_eG$ на цей підпростір.*

За допомогою цього канонічного ізоморфізма часто ототожнюють простір лівоінваріантних полів на групі Лі з її дотичним простором у одиниці і позначають його так само через $\mathfrak{g}$. Зокрема, вимірність цього простору дорівнює вимірності G.

Нехай $\{e_i\}_{i=1}^n$ – якийсь базис $\mathfrak{g}$ (де, звичайно, $n = \dim G$). Тоді за доведеним $\{X_{e_i}\}_{i=1}^n$ є базисом простору лівоінваріантних полів. Більш того, для будь-якого $a \in G$ значення цих гладких полів $\{X_{e_i}(a) = d_eL_a(e_i)\}_{i=1}^n$ утворюють базис T_aG, бо $d_eL_a \colon \mathfrak{g} \to T_aG$ – лінійний ізоморфізм. Існування таких полів означає, що гладкий многовид G – *паралелізовний* (тобто його дотичне розшарування TG тривіалізується: воно дифеоморфне прямому добутку $G \times \mathbb{R}^n$).

Наслідок 6.2. *Кожна група Лі є паралелізовним гладким многовидом.*

Відомо, що далеко не кожний гладкий многовид є паралелізовним, що створює суттєву перешкоду для існування структур груп Лі. По-перше, з паралелізовності многовида випливає його орієнтовність, отже структури груп Лі не існують на неорієнтовних гладких многовидах, наприклад, на дійсних проєктивних просторах $\mathbb{R}P^n$ при парних $n \geqslant 2$. При цьому ми будували такі структури на $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ у прикладі 2.5 та на $\mathbb{R}P^3 \cong \mathrm{SO}(3)$ у прикладі 4.9. Крім того, $\mathbb{R}P^0$ одноточковий, тому є тривіальним прикладом групи Лі. По-друге, орієнтовні многовиди теж не завжди паралелізовні. Наприклад, сфера S^n є такою лише при $n = 0$, 1, 3 та 7 (це нетривіальний топологічний факт; див., наприклад, [39]). Ми вже знаємо, що S^0, S^1 та S^3 – групи Лі (приклади 4.2, 2.5 та 4.8 відповідно), причому, як ми бачили, групова структура вводиться на них обмеженням множення дійсних чисел, комплексних та кватерніонів відповідно. Цікаво, що паралелізовність S^7 доводиться схожим способом за допомогою 8-вимірного аналога кватерніонів – *октоніонів* (див. також розділ 10), як показано у [39, с. 143-149], але їх множення неасоціативне, тому структура групи таким чином не виникає. І взагалі, виявляється, що на S^7 не існує структури групи Лі. Це теж є нетривіальним топологічним фактом, див. [7, с. 304-310], а також обговорення наприкінці розділу 16 (тими ж методами можна показати, що структури груп Лі не існують також на $\mathbb{R}P^n$ при непарних $n \geqslant 5$).

Згадаємо, що гладка крива $\gamma \colon (\alpha, \beta) \to M$ у гладкому многовиді M зветься *інтегральною траєкторією* гладкого векторного поля X на M, якщо $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ для будь-якого t. У локальних координатах ця умова є системою звичайних диференціальних рівнянь. Тому із загальної теорії диференціальних рівнянь випливає єдиність таких траєкторій, що проходять через спільну точку: якщо $\gamma, \mu \colon (\alpha, \beta) \to M$ – інтегральні траєкторії X і $\gamma(t_0) = \mu(t_0)$ для деякого $t_0 \in (\alpha, \beta)$, то $\gamma = \mu$. Звідти ж випливає існування, але лише локальне: для будь-якої точки $p \in M$ існує (і єдина за згаданим раніше) інтегральна траєкторія $\gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ поля X для деякого $\varepsilon > 0$ така, що $\gamma(0) = p$. Якщо ж для будь-якої $p \in M$ існує інтегральна траєкторія X, що задана на всій прямій $\gamma \colon \mathbb{R} \to M$ така, що $\gamma(0) = p$, то поле звуть X *повним*. Інтегральні траєкторії повного поля зручно об'єднувати у його *потік*. Це гладке відображення $\Phi \colon M \times \mathbb{R} \to M$ таке, що для будь-якої $p \in M$ гладка крива $t \mapsto \Phi(p, t)$ є інтегральною траєкторією X, що проходить через p: $\Phi(p, 0) = p$.

Лема 6.1. *Якщо γ – інтегральна траєкторія лівоінваріантного поля на групі Лі G, то для будь-якого $a \in G$ крива $L_a \circ \gamma$ – теж інтегральна траєкторія цього поля.*

Доведення. Отже, нехай $\gamma \colon (\alpha, \beta) \to G$ – інтегральна траєкторія поля X_x. Покладемо $\mu \coloneqq L_a \circ \gamma$, тобто $\mu(t) = L_a\gamma(t) = a\gamma(t)$ для кожного t. Це гладка крива як композиція гладких відображень. Тоді за означеннями інтегральної траєкторії та X_x, властивостями диференціалів та лівих зсувів (аналогічно до перевірки лівоінваріантності X_x вище) маємо

$$\mu'(t) = d_{\gamma(t)}L_a(\gamma'(t)) = d_{\gamma(t)}L_a(X_x(\gamma(t))) = d_{\gamma(t)}L_a \circ d_eL_{\gamma(t)}(x) =$$

$$= d_e(L_a \circ L_{\gamma(t)})(x) = d_eL_{a\gamma(t)}(x) = dL_{\mu(t)}(x) = X_x(\mu(t))$$

для будь-якого $t \in (\alpha, \beta)$. Це й означає, що μ – інтегральна траєкторія X_x. ∎

Твердження 6.1. *Будь-яке лівоінваріантне векторне поле на групі Лі є повним.*

Доведення. Розглянемо деяке лівоінваріантне поле X_x на групі Лі G. В силу попередньої леми достатньо показати, що існує його інтегральна траєкторія $\gamma \colon \mathbb{R} \to G$ така, що $\gamma(0) = e$. Дійсно, тоді для будь-якого $a \in G$ крива $L_a \circ \gamma \colon \mathbb{R} \to G$ теж буде інтегральною траєкторією X_x, і $L_a \circ \gamma(0) = a\gamma(0) = ae = a$.

Згідно зі згаданим вище ця інтегральна траєкторія існує принаймні локально: $\gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ для деякого $\varepsilon > 0$ (і $\gamma(0) = e$). Нехай $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Для $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\varepsilon - t, \varepsilon - t)$ (цей перетин завжди є непорожнім інтервалом, що містить 0) $t + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ й тому визначена гладка крива

$s \mapsto \gamma(t+s)$. Вона є інтегральною траєкторією X_x (бо додавання константи до аргумента ніяк на це не впливає: $(\gamma(t+s))'_s = \gamma'(t+s) = X_x(\gamma(t+s)))$, що проходить через $\gamma(t)$ при $s = 0$. Іншою такою траєкторією в силу леми 6.1 є $s \mapsto \gamma(t)\gamma(s)$. За описаною вище єдиністю вони повинні збігатися на перетині їхніх областей визначення. Таким чином, $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$ для будь-яких $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ таких, що $t + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Визначимо криву $\widetilde{\gamma}\colon \left(-\frac{3}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon\right) \to G$ наступним чином:

$$\widetilde{\gamma}(t) \coloneqq \left[\begin{array}{ll} \gamma\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\gamma\left(t + \frac{1}{2}\varepsilon\right), & t \in \left(-\frac{3}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon\right); \\ \gamma\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\gamma\left(t - \frac{1}{2}\varepsilon\right), & t \in \left(-\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon\right). \end{array} \right.$$

Зауважимо, що тут аргументи γ залишаються в межах інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Більш того, в силу показаного вище перший з цих виразів дорівнює $\gamma\left(-\frac{1}{2}\varepsilon + t + \frac{1}{2}\varepsilon\right) = \gamma(t)$ для $t \in \left(-\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon\right)$, і аналогічним чином другий дорівнює $\gamma(t)$ для $\left(-\frac{1}{2}\varepsilon, \varepsilon\right)$. Це означає, що $\widetilde{\gamma}$ коректно визначена, є гладкою кривою і продовжує γ з інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$ на $\left(-\frac{3}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon\right)$ (зокрема, $\widetilde{\gamma}(0) = e$). Нарешті, з леми 6.1 випливає, що кожен з цих двох виразів являє собою інтегральну траєкторію поля X_x, а отже й $\widetilde{\gamma}$ є його інтегральною траєкторію, бо умова її означення $\widetilde{\gamma}'(t) = X_x(\widetilde{\gamma}(t))$ виконується для кожного t з області визначення $\widetilde{\gamma}$. Таким же чином цю інтегральну траєкторію можна продовжити на $\left(-\frac{9}{4}\varepsilon, \frac{9}{4}\varepsilon\right)$, $\left(-\frac{27}{8}\varepsilon, \frac{27}{8}\varepsilon\right)$ і т.д. Оскільки $\frac{3^m}{2^m}\varepsilon \to +\infty$ при $m \to \infty$, таким чином вдасться визначити $\widetilde{\gamma}(t)$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, побудувавши потрібну інтегральну траєкторію поля X_x, що визначена на всій прямій $\mathbb{R}$ й проходить через e при $t = 0$.

■

У подальшому через γ_x будемо позначати повну інтегральну траєкторію поля X_x, що проходить через e: $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to G$, $\gamma_x(0) = e$ (існування якої ми щойно довели), а через $\Phi_x\colon G \times \mathbb{R} \to G$ – потік цього поля. Тоді з означення потоку, леми 6.1 і єдиності інтегральних траєкторій маємо, що $\Phi_x(a, t) = a\gamma_x(t)$ для будь-яких $a \in G$ і $t \in \mathbb{R}$ (чому?). Зауважимо також, що з доведення попереднього твердження випливає (при $\varepsilon = +\infty$) рівність $\gamma_x(t+s) = \gamma_x(t)\gamma_x(s)$ для будь-яких $t, s \in \mathbb{R}$.

Приклад 6.1. Нехай $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (або $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) – матрична група Лі. Далі будемо розглядати дійсний випадок, у комплексному все дослівно так же. Як у розділі 5, будемо ототожнювати дотичні простори $T_A G$ з підпросторами $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ за формулою (5.1) (тільки замість одиничної матриці I там може стояти будь-яка $A \in G$). Оскільки для $A \in G$ лівий зсув $L_A\colon G \to G$ є обмеженням на G лівого зсуву $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, його диференціал в I є обмеженням на $\mathfrak{g} = T_I G$ диференціала $d_I L_A\colon \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to T_A \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (перевірте це для загального випадку зануреного підмноговида, використавши опис диференціалів через дію на дотичні вектори кривих). Як пояснювалося у розділі 5, обидва ці простори – це весь простір матриць $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$. Оскільки в силу правила множення матриць $L_A B = AB = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B_{kj}\right)_{i,j=1}^{n}$ для $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$ і $B = (B_{ij})_{i,j=1}^{n}$, відображення L_A – лінійне, тому $d_I L_A(x) = Ax$ для будь-якої $x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ (випишіть його матрицю Якобі у локальних координатах $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, якими є компоненти матриць). В силу сказаного вище це так і в групі G для $x \in \mathfrak{g}$.

Таким чином, лівоінваріантне поле X_x на G, що відповідає матриці $x \in \mathfrak{g}$, задається умовою $X_x(A) = d_I L_A(x) = Ax$ для будь-якої $A \in G$. Згідно з означеннями, для матричної інтегральної кривої $A(t) \coloneqq \Phi_x(A_0, t)$, що входить у його потік і проходить через матрицю A_0, маємо наступні умови:

$$\begin{cases} A'(t) = A(t)x; \\ A(0) = A_0. \end{cases}$$

Це задача Коші для матричного диференціального рівняння, що, як відомо, має єдиний розв'язок $A(t) = A_0 e^{tx}$ (аналогічно до [1, с. 168-169]; це випливає й безпосередньо з означення (5.2) матричної експоненти, властивостей її збіжності та єдиності розв'язку задачі Коші для лінійної системи). Тобто у введених вище позначеннях потік поля X_x має вигляд $\Phi_x(A,t) = Ae^{tx}$, а інтегральна траєкторія, що проходить через I – $\gamma_x(t) = e^{tx}$. Таким чином, такі експоненційні криві зовсім не випадково з'явилися у розділі 5: їх природно розглядати на групах Лі.

7 Експоненційне відображення

Наприкінці попереднього розділу ми побачили, що матрична експонента грає ключову роль у описі інтегральних траєкторій на матричних групах. Керуючись прикладом 6.1, перенесемо це поняття на довільну групу Лі. Тепер будемо рухатися у протилежний бік – починаючи з інтегральної траєкторії. Як і раніше, тут G всюди позначає деяку групу Лі, $\mathfrak{g} = T_e G$ – її дотичний простір в одиниці, γ_x – інтегральну траєкторію лівоінваріантного поля X_x для $x \in \mathfrak{g}$, що визначена умовою $\gamma_x(0) = e$, Φ_x – потік цього поля.

Означення 7.1. *Експоненційним відображенням* групи Лі G зветься відображення

$$\exp\colon \mathfrak{g} \to G\colon x \mapsto \gamma_x(1).$$

Значення $\gamma_x(1)$ тут існує в силу твердження 6.1. Це нагадує означення ріманового експоненційного відображення. І дійсно, за певних умов ці відображення збігаються, що й пояснює виникнення терміна ”експоненційний” у рімановій геометрії. Ми побачимо це в геометричній частині курсу (див. наслідок 18.3). Зауважимо також, що, оскільки носії $\gamma_x(\mathbb{R})$ інтегральних траєкторій зв'язні та містять e, вони лежать у компоненті одиниці G^0, а тому й exp є відображенням у G^0.

Приклад 7.1. Для матричної групи Лі $\gamma_x(t) = e^{tx}$ за прикладом 6.1, тому $\exp x = e^x$. Отже, експоненційне відображення дійсно узагальнює матричну експоненту.

Твердження 7.1. 1. *Експоненційне відображення є гладким.*

2. $\Phi_x(a,t) = a\exp tx$ *для будь-яких* $x \in \mathfrak{g}$, $a \in G$ *і* $t \in \mathbb{R}$. *Зокрема,* $\gamma_x(t) = \exp tx$.

3. $\exp 0 = e$.

4. $d_0 \exp = id_{\mathfrak{g}}$.

5. $\exp(t+s)x = \exp tx \exp sx$ *для будь-яких* $x \in \mathfrak{g}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Доведення.

1. Інтегральна траєкторія γ_x визначається умовами $\gamma_x' = X_x(\gamma_x) = d_e L_{\gamma_x}(x)$ і $\gamma_x(0) = e$, що у локальних координатах виглядають як задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. При цьому права частина системи лінійно залежить від координат x. Тому із загальної теорії випливає гладка залежність розв'язку цієї задачі, а отже й координат $\exp x = \gamma_x(1)$, від координат x.

2. Оскільки у попередньому розділі ми показали, що $\Phi_x(a,t) = a\gamma_x(t)$, тут достатньо перевірити, що $\gamma_x(t) = \exp tx$. Розглянемо довільне $t \in \mathbb{R}$ і покладемо $\mu(s) := \gamma_{tx}(s)$ і $\nu(s) := \gamma_x(ts)$ для $s \in \mathbb{R}$. Це гладкі криві, і перша з них є інтегральною траєкторією поля X_{tx}, що проходить через e при $s = 0$. Виявляється, що друга теж:

$$\nu'(s) = (\gamma_x(ts))_s' = t\gamma_x'(ts) = tX_x(\gamma_x(ts)) = X_{tx}(\nu(s)),$$

де в останній рівності використали лінійність відображення $x \mapsto X_x$ (наслідок 6.1). До того ж, $\nu(0) = \gamma_x(0) = e$. Тому за єдиністю інтегральних траєкторій $\mu = \nu$. Зокрема, при $s = 1$ маємо

$$\exp tx = \gamma_{tx}(1) = \mu(1) = \nu(1) = \gamma_x(t).$$

3. Оскільки $X_0 = d_e L_a(0) = 0$, усі інтегральні траєкторії цього поля є постійними кривими. Зокрема, $\gamma_0(t) = e$ для будь-якого t, тому $\exp 0 = \gamma_0(1) = e$.

4. Тут мається на увазі, що на $\mathfrak{g}$, який є скінченновимірним дійсним векторним простором, перенесена з $\mathbb{R}^n$ (де $n = \dim \mathfrak{g}$) стандартна гладка структура. Тоді в силу попереднього пункту $d_0 \exp$ діє з $T_0\mathfrak{g}$ у $T_eG = \mathfrak{g}$. Стандартним чином ототожнивши перший з цих просторів із самим $\mathfrak{g}$, отримаємо $d_0 \exp\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

   Використаємо опис диференціала відображення через дію на дотичні вектори кривих. Щоб знайти $d_0 \exp(x)$ для $x \in \mathfrak{g}$ нам тоді потрібна гладка крива в $\mathfrak{g}$, що проходить через 0 у напрямку x. Зрозуміло, що на цю роль підходить пряма $t \mapsto tx$: її значення і дотичний вектор при $t = 0$ дорівнюють 0 та x відповідно. Тому

$$d_0 \exp(x) = (\exp tx)'_{t=0} = \gamma'_x(0) = X_x(\gamma_x(0)) = X_x(e) = x,$$

   де використане твердження пункту 2.. Це й демонструє потрібне.

5. Це випливає з твердження пункту 2. і зауваження після доведення твердження 6.1:

$$\exp(t+s)x = \gamma_x(t+s) = \gamma_x(t)\gamma_x(s) = \exp tx \, \exp sx$$

   для будь-яких x, t і s.

■

Пункт 5. означає, зокрема, що для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$ відображення $t \mapsto \exp tx$ є гомоморфізмом груп $\mathbb{R}$ (з операцією додавання, див. приклад 2.4) і G. Оскільки експоненційне відображення гладке за пунктом 1., це гомоморфізм груп Лі. Виявляється, що вірне й обернене твердження.

Твердження 7.2. *Будь-який гомоморфізм груп Лі $\Phi\colon \mathbb{R} \to G$ має вигляд $\Phi(t) = \exp tx$, $t \in \mathbb{R}$, де $x = \Phi'(0)$.*

Доведення. З гомоморфності Φ випливає, зокрема, що $\Phi(0) = e$. Оскільки це гомоморфізм груп Лі, Φ є гладкою кривою, отже визначений дотичний вектор $x = \Phi'(0) \in \mathfrak{g}$. За означенням гомоморфізма $\Phi(t+s) = \Phi(t)\,\Phi(s) = L_{\Phi(t)}\Phi(s)$ для будь-яких $t, s \in \mathbb{R}$. Фіксуючи довільне t і диференціюючи цю рівність за s, отримуємо:

$$\Phi'(t+s) = d_{\Phi(s)} L_{\Phi(t)}(\Phi'(s)).$$

Покладемо $s = 0$:

$$\Phi'(t) = d_{\Phi(0)} L_{\Phi(t)}(\Phi'(0)) = d_e L_{\Phi(t)}(x) = X_x(\Phi(t)).$$

Таким чином, крива Φ є інтегральною траєкторією X_x, що проходить через одиницю e, тобто $\Phi(t) = \gamma_x(t) = \exp tx$ для будь-якого t в силу пункту 2. твердження 7.1.

$\blacksquare$

Означення 7.2. *Однопараметричними підгрупами* групи Лі G називають образи $\Phi(\mathbb{R})$ гомоморфізмів $\Phi\colon \mathbb{R} \to G$.

Тобто однопараметричні підгрупи – це в точності носії інтегральних траєкторій γ_x. Як зазначалося вище, вони є зв'язними, містять e й тому лежать у G^0. Такими підгрупами є, зокрема, обмотування тора з прикладу 2.9. Будь-яка однопараметрична $\Phi(\mathbb{R})$ дійсно є підгрупою G як образ гомоморфізма груп. Якщо вона замкнена (як, наприклад, раціональне обмотування тора), то це вкладена підгрупа Лі за теоремою Картана. Якщо це не тривіальна підгрупа $\{e\}$ (тобто якщо $x \neq 0$ у позначеннях попереднього твердження), то її вимірність дорівнює 1 (покажіть це). Якщо Φ є ін'єкцію (як ірраціональне обмотування тора), то на $\Phi(\mathbb{R})$ можна перенести структуру групи Лі з $\mathbb{R}$, як у згаданому прикладі, тому це теж одновимірна підгрупа Лі (але, взагалі кажучи, не вкладена). У подальшому ми доведемо, що образ гомоморфізма груп Лі завжди є підгрупою Лі (див. теорему 13.4). Більш того, можна показати, що будь-яка одновимірна зв'язна підгрупа Лі G є однопараметричною підгрупою.

Приклад 7.2. Розглянемо групу $G = \mathrm{SO}(2)$. Як було показано в наслідку 5.3, її дотичний простір $\mathfrak{so}(2) = T_I\mathrm{SO}(2)$ є одновимірним і складається з кососиметричних дійсних (2×2)-матриць:

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Базисним вектором цього простору є, наприклад, матриця

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді однопараметрична підгрупа, що відповідає x, (вона ж – носій інтегральної траєкторії γ_x поля X_x) задається наступним чином:

$$\Phi(t) = e^{tx} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{24}\begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix} + \ldots =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots & -t + \frac{t^3}{6} - \ldots \\ t - \frac{t^3}{6} - \ldots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким чином, відповідна однопараметрична підгрупа збігається зі всією групою: $\Phi(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(2)$ (див. приклад 4.4).

Твердження 7.3. *Нехай G і H – групи Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$ і $\mathfrak{h} = T_eH$ – їхні дотичні простори в одиницях, $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ і $\exp_H\colon \mathfrak{h} \to H$ – відповідні експоненційні відображення. Нехай $\Phi\colon G \to H$ – гомоморфізм груп Лі, а $\varphi := d_e\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ – його диференціал в одиниці. Тоді*

$$\Phi \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi.$$

Зауважимо, що $\Phi(e) = e$, оскільки це гомоморфізм, тому φ дійсно діє з $\mathfrak{g}$ у $\mathfrak{h}$, а композиції з умови твердження мають сенс. Їх рівність зручно представляти у вигляді *комутативної діаграми*, що складається з множин і відображень (що позначені стрілочками) так, що усі композиції стрілочок, що ведуть з певної множини у якусь іншу, рівні. У даному випадку діаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\exp_G"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp_H"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & H \end{tikzcd}$$

повинна бути комутативною.

Доведення. Нехай $x \in \mathfrak{g}$. Покладемо $\Psi(t) := \Phi(\exp_G tx)$ для $t \in \mathbb{R}$. Відображення $\Psi\colon \mathbb{R} \to H$ є гомоморфізмом груп Лі як композиція гомоморфізмів груп Лі (див. зауваження перед твердженням 7.2). Тоді з твердження 7.2 випливає, що $\Psi(t) = \exp_H ty$ для будь-якого t, де

$$y = \Psi'(0) = d_e\Phi \circ d_0 \exp_G(x) = \varphi \circ id_{\mathfrak{g}}(x) = \varphi(x),$$

де використали твердження 7.1. Зокрема, при $t = 1$ маємо

$$\Phi \circ \exp_G(x) = \Psi(1) = \exp_H y = \exp_H \circ \varphi(x).$$

■

Це твердження буде в подальшому корисним інструментом. Перш за все, використаємо його, щоб показати, що гомоморфізм груп Лі зі зв'язною областю визначення однозначно визначений своїм диференціалом в одиниці (а отже своїми значеннями на як завгодно малому околі одиниці).

Твердження 7.4. *Нехай G і H – групи Лі, G зв'язна, $\Phi, \Psi \colon G \to H$ – гомоморфізми груп Лі. Якщо $d_e\Phi = d_e\Psi$, то $\Phi = \Psi$.*

Доведення. Як у попередньому твердженні, позначатимемо через $\exp_G \colon \mathfrak{g} \to G$ і $\exp_H \colon \mathfrak{h} \to H$ експоненційні відображення відповідних груп Лі. Оскільки $d_0 \exp_G$ є тотожним за пунктом 4. твердження 7.1, зокрема, лінійним ізоморфізмом, гладке відображення $\exp_G$ є локальним дифеоморфізмом в околі 0 (це випливає з теореми про обернене відображення). Тобто існують відкриті околи $U \ni e$ у G та $V \ni 0$ у $\mathfrak{g}$ такі, що обмеження $\exp_G|_V \colon V \to U$ – дифеоморфізм. У подальшому в подібних випадках ми будемо позначати обмеження $\exp_G$ на дифеоморфний прообраз U просто через $\exp_G$ і вважати $\exp_G \colon \exp_G^{-1}(U) \to U$ дифеоморфізмом, де прообраз береться саме під дією обмеження. З попереднього твердження тоді випливає, що на U відображення Φ можна представити як композицію оберненого до цього обмеження, $d_e\Phi$ і $\exp_H$, і так само для Ψ. Таким чином, в умовах твердження маємо

$$\Phi|_U = \exp_H \circ d_e\Phi \circ \exp_G^{-1} = \exp_H \circ d_e\Psi \circ \exp_G^{-1} = \Psi|_U.$$

Оскільки G зв'язна, $G = G^0 = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U^m$ за пунктом 3. теореми 3.1. Отже, для будь-якого $a \in G$ існують такі $a_1, \ldots, a_m \in U$, що $a = a_1 \ldots a_m$. Тоді

$$\Phi(a) = \Phi(a_1) \ldots \Phi(a_m) = \Psi(a_1) \ldots \Psi(a_m) = \Psi(a),$$

оскільки Φ та Ψ є гомоморфізмами груп і ми показали, що їх обмеження на U збігаються. Це й демонструє потрібне.

■

8 Дужка Лі

Протягом цього курсу ми вже кілька разів помічали, що для структури (зв'язної) групи Лі та для пов'язаних з нею об'єктів визначальною є поведінка в як завгодно малому околі одиниці або на дотичному просторі в одиниці. Останнім прикладом цього є твердження 7.4, що демонструє однозначну визначеність гомоморфізма групи Лі його диференціалом в одиниці. Тому природною видається задача опису множення в групі Лі у термінах її дотичного простору в одиниці за допомогою експоненційного відображення, яку ми будемо розбирати в цьому розділі. При цьому виникає ключовий об'єкт теорії Лі – дужка Лі. Як і у попередніх розділах, тут всюди G – група Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$, $\exp \colon \mathfrak{g} \to G$ – експоненційне відображення.

Як у доведенні твердження 7.4, з невиродженості диференціала exp в 0 випливає локальна дифеоморфність: існує відкрита (у стандартній топології скінченновимірного дійсного векторного простору $\mathfrak{g}$) $U \ni 0$ така, що обмеження $\exp\colon U \to \exp(U)$ є дифеоморфізмом. При цьому $\exp(U)$ є відкритим околом e в G. З неперервності відображення добутку μ аналогічно до доведення пункту 3. теореми 3.1 випливає тоді існування відкритої $W \ni e$ такої, що $\mu(W \times W) \subset \exp(U)$, тобто $ab \in \exp(U)$ для будь-яких $a, b \in W$. Зокрема, підставивши $b = e$, отримаємо, що $W \subset \exp(U)$. Покладемо $V := \exp^{-1}(W) \subset U$. Тут і далі, аналогічно до доведення твердження 7.4, позначаємо через exp обмеження експоненційного відображення на U. Це теж відкритий окіл 0. Тоді $\exp x, \exp y \in W$ для будь-яких $x, y \in V$, і тому $\exp x \, \exp y \in \exp(U)$. Отже, коректно визначене відображення

$$\nu\colon V \times V \to U\colon (x, y) \mapsto \exp^{-1}(\exp x \, \exp y),$$

Оскільки обмеження exp на U є дифеоморфізмом, відображення ν гладке. За його побудовою маємо

$$\exp x \, \exp y = \exp \nu(x, y)$$

для будь-яких $x, y \in V$. Таким чином, ν у деякому сенсі є перенесенням відображення добутку μ на окіл нуля в $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Запишемо тепер для ν формулу Тейлора другого порядку в $(0, 0)$:

$$\nu(x, y) = \nu_0 + \nu_1(x, y) + \nu_2(x, y) + R_3(x, y).$$

Тут $\nu_0 \in \mathfrak{g}$ – постійний член, лінійний член ν_1 має вигляд $\nu_1(x, y) = A(x) + B(y)$, де $A, B\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – лінійні оператори, член другого порядку ν_2 – вигляд $\nu_2(x, y) = C(x, x) + D(x, y) + E(y, y)$, де $C, D, E\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – білінійні векторзначні форми, залишковий член $R_3(x, y)$ має порядок малості $\geqslant 3$ за координатами x, y (у довільному базисі), коли $x, y \to 0$. При цьому

$$\nu_0 = \nu(0, 0) = \exp^{-1}(\exp 0 \, \exp 0) = \exp^{-1}(e) = 0.$$

Зауважимо також, що

$$A(x) + C(x, x) + R_3(x, 0) = \nu(x, 0) = exp^{-1}(\exp x \, \exp 0) = exp^{-1}(\exp x \, e) = x$$

для будь-якого $x \in V$. Порівнюючи члени рівних порядків, бачимо, що $A(x) = x$, $C(x, x) = 0$ і $R_3(x, 0) = 0$ для усіх x із відкритого околу нуля V. Тоді за лінійністю $A(x) = x$ і для довільного $x \in \mathfrak{g}$. Дійсно, з того, що V

містить відкриту евклідову кулю з центром у 0, випливає, що $\lambda x \in V$ для деякого дійсного $\lambda \neq 0$, і тому $\lambda A(x) = A(\lambda x) = \lambda x$, отже $A(x) = x$. Так само з білінійності C випливає, що $C(x,x) = 0$ для усіх $x \in \mathfrak{g}$. Аналогічно,

$$B(y)+E(y,y)+R_3(0,y) = \nu(0,y) = exp^{-1}(\exp 0\, \exp y) = exp^{-1}(e\, \exp y) = y$$

для будь-якого $y \in V$, тому $B(y) = y$, $E(y,y) = 0$ і $R_3(0,y) = 0$, і знову за лінійністю та білінійністю маємо, що $B(y) = y$ і $E(y,y) = 0$ для усіх $y \in \mathfrak{g}$. Отже, $\nu_1(x,y) = x + y$, $\nu_2(x,y) = D(x,y)$. Крім того, тоді

$$2x+D(x,x)+R_3(x,x) = \nu(x,x) = \exp^{-1}(\exp x\, \exp x) = \exp^{-1}(\exp 2x) = 2x$$

для будь-якого $x \in V$ в силу пункту 5. твердження 7.1. Знову ж, оскільки таким чином $D(x,x) = 0$ для $x \in V$ і в силу білінійності, воно дорівнює нулю і для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$. Тоді стандартна техніка поляризації демонструє, що ця форма кососиметрична: для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$

$$0 = D(x+y,x+y) = D(x,x)+D(x,y)+D(y,x)+D(y,y) = D(x,y)+D(y,x),$$

тобто $D(x,y) = -D(y,x)$.

Означення 8.1. Дужкою Лі групи Лі G зветься відображення

$$[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\colon (x,y) \mapsto [x,y] := 2D(x,y).$$

З побудови $[\cdot,\cdot]$ випливає, що це відображення білінійне, тобто

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x,z] + \mu[y,z], \quad [x, \lambda y + \mu z] = \lambda[x,y] + \mu[x,z]$$

для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, і кососиметричне, тобто

$$[x,y] = -[y,x]$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$. Перепишемо тепер у цих термінах формулу добутку експонент.

Наслідок 8.1. *Для будь-яких x, y із деякого відкритого околу нуля V у просторі $\mathfrak{g}$*

$$\exp x\, \exp y = \exp\left(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + R_3(x,y)\right), \tag{8.1}$$

де $R_3(x,y)$ має порядок малості $\geqslant 3$ за координатами x, y, коли $x, y \to 0$.

Виявляється, що R_3 також виражається через дужку Лі $[\cdot,\cdot]$. Повний варіант цієї рівності у формі ряда зветься *формулою Кемпбелла-Бейкера-Хаусдорфа* (або *формулою Динкіна*). Вона наведена, наприклад, у [36, с. 124, 129] і детально обговорюється у лекціях 4 і 6 цієї книги. Див. також викладення у [13, с. 29-31], [14], [18], [25, с. 669-682], [40, с. 47-52], [42, с. 152-158] та [43, с. 39-47]. Зокрема, з цієї формули можна вивести, що $\exp x \, \exp y = \exp(x+y)$ при $[x,y]=0$.

Приклад 8.1. Нехай $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (або $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) – матрична група Лі. Щоб знайти її дужку Лі потрібно, таким чином, записати у вигляді експоненти $e^x\, e^y$ для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$ (див. приклад 7.1). Далі трикрапка всюди означає суму членів порядку $\geqslant 3$ за компонентами x і y.

$$e^x\, e^y = \left(I + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots\right)\left(I + y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots\right) =$$

$$= I + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \ldots = I + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + xy + yx + y^2) + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}yx + \ldots =$$

$$= I + \left(x + y + \frac{1}{2}(xy - yx) + \ldots\right) + \frac{1}{2}\left(x + y + \frac{1}{2}(xy - yx) + \ldots\right)^2 + \ldots =$$

$$= e^{x + y + \frac{1}{2}(xy - yx) + \ldots}.$$

Отже, дужка Лі має вигляд $[x,y] = xy - yx$, тобто є матричним комутатором, що був введений наприкінці розділу 5. Це пояснює зауважену там замкненість дотичних просторів $\mathfrak{g}$ матричних груп Лі відносно цієї операції. Із зауваження вище випливає, що $e^x\, e^y = e^{x+y}$ при $xy = yx$. Втім, це простіше перевірити безпосередньо (див. вправу 5.2).

Описаний спосіб знаходити дужку Лі – не єдиний. У наступному розділі ми познайомимося з двома іншими, і ще з одним у розділі 12. Наступне твердження демонструє, що диференціал у одиниці гомоморфізма груп Лі зберігає відповідні дужки Лі.

Твердження 8.1. *Нехай G і H – групи Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$ і $\mathfrak{h} = T_eH$ – їхні дотичні простори в одиницях, $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ і $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}\colon \mathfrak{h}\times\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ – дужки Лі цих груп. Нехай $\Phi\colon G \to H$ – гомоморфізм груп Лі, а $\varphi := d_e\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ – його диференціал у одиниці. Тоді*

$$\varphi\left([x,y]_{\mathfrak{g}}\right) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathfrak{h}}$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$.

Доведення. Будемо також, як і раніше, позначати експоненційні відображення цих груп Лі через $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ і $\exp_H\colon \mathfrak{h} \to H$ відповідно. Нехай V – побудований вище відкритий окіл нуля в $\mathfrak{g}$. Оскільки відображення φ неперервне (бо лінійне), за необхідності зменшивши V, можемо вважати, що для будь-якого $x \in V$ його образ $\varphi(x)$ лежить у відкритому околі нуля в $\mathfrak{h}$, для елементів якого теж виконується формула (8.1) (для групи H). Нехай $x, y \in V$. З гомоморфності Φ і твердження 7.3 маємо

$$\Phi(\exp_G x\ \exp_G y) = \Phi(\exp_G x)\,\Phi(exp_G y) = \exp_H \varphi(x)\ \exp_H \varphi(y).$$

Застосуємо до обох сторін цієї рівності формулу (8.1) і ще раз використаємо твердження 7.3:

$$\exp_H \left(\varphi\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{g}} + R_3^{\mathfrak{g}}(x, y)\right)\right) =$$

$$= \Phi\left(\exp_G\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{g}} + R_3^{\mathfrak{g}}(x, y)\right)\right) =$$

$$= \exp_H\left(\varphi(x) + \varphi(y) + \frac{1}{2}[\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathfrak{h}} + R_3^{\mathfrak{h}}(\varphi(x), \varphi(y))\right),$$

де використані очевидні позначення для залишкових членів у формулах (8.1) відповідних груп. Аналогічно до $\exp_G$ (див. обговорення на початку розділу), відображення $\exp_H$ є локальним дифеоморфізмом на деякому околі нуля в $\mathfrak{h}$. Знову ж, з міркувань неперервності та зменшивши за необхідності V, можемо вважати, що при $x, y \in V$ аргументи $\exp_H$ з обох частин попередньої рівності потрапляють у цей окіл. Тоді за ін'єктивністю вони рівні:

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \frac{1}{2}\varphi\left([x, y]_{\mathfrak{g}}\right) + \varphi\left(R_3^{\mathfrak{g}}(x, y)\right) =$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) + \frac{1}{2}[\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathfrak{h}} + R_3^{\mathfrak{h}}(\varphi(x), \varphi(y)),$$

де також використали лінійність φ. Це повинно виконуватися для будь-яких $x, y \in V$, отже члени другого порядку за їх координатами повинні збігатися:

$$\frac{1}{2}\varphi\left([x, y]_{\mathfrak{g}}\right) = \frac{1}{2}[\varphi(x), \varphi(y)]_{\mathfrak{h}}.$$

Оскільки це вірно для будь-яких x і y з деякого відкритого околу нуля у просторі $\mathfrak{g}$, а вирази обох сторін білінійні, це виконується і для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$.

■

9 Дужка Лі лівоінваріантних векторних полів

Нагадаємо, що *дужка Лі* гладких векторних полів X і Y на гладкому многовиді M визначена умовою $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, де $f \in C^\infty(M)$ – довільна гладка функція, а поля діють на функції диференціюваннями. Ця умова скорочено записується як $[X,Y] = XY - YX$. Природним є питання зв'язку між побудованою в попередньому розділі структурою і дужкою Лі векторних полів на групі Лі. Для відповіді на нього корисним буде наступний опис дужки Лі полів у термінах потоків. Неформально кажучи, він пов'язує її з "некомутативністю" потоків (у той час як основне означення – з "некомутативністю" композиції операторів диференціювання).

Лема 9.1. *Нехай $\Phi_X, \Phi_Y \colon M \times \mathbb{R} \to M$ – потоки повних векторних полів X і Y на гладкому многовиді M відповідно. Тоді*

$$[X,Y](p) = \Big(\Phi_Y(\Phi_X(\Phi_Y(\Phi_X(p,\sqrt{t}),\sqrt{t}),-\sqrt{t}),-\sqrt{t})\Big)'_t(+0)$$

для будь-якої точки $p \in M$.

Доведення. Див. [28, с. 21-24] або спробуйте довести самостійно.

■

Твердження 9.1. *Нехай G – група Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$, $[\cdot,\cdot] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – дужка Лі G. Тоді для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$ дужка Лі відповідних лівоінваріантних векторних полів X_x і X_y дорівнює*

$$[X_x, X_y] = X_{[x,y]}.$$

Зокрема, вона теж є лівоінваріантним полем.

Доведення. За пунктом <u>2.</u> твердження 7.1 потоки цих полів мають вигляд відповідно $\Phi_x(a,t) = a\exp tx$ і $\Phi_y(a,t) = a\exp ty$ для будь-яких $a \in G$ і $t \in \mathbb{R}$. Отже, для кожного $a \in G$ в силу попередньої леми маємо

$$[X_x, Y_y](a) = \Big(a\exp\sqrt{t}x\,\exp\sqrt{t}y\,\exp-\sqrt{t}x\,\exp-\sqrt{t}y\Big)'_t(+0).$$

Оскільки нас цікавить похідна в нулі справа та з міркувань неперервності, ми можемо далі вважати $t \geqslant 0$ достатньо малим для того, щоб для усіх аргументів нижче виконувалася формула (8.1). Застосуємо її спочатку до попарних добутків експонент, а потім – до добутку результатів:

$$[X_x, Y_y](a) = \Big(a\exp\Big(\sqrt{t}x + \sqrt{t}y + \frac{1}{2}[\sqrt{t}x, \sqrt{t}y] + R_3(\sqrt{t}x, \sqrt{t}y)\Big)$$

$$\exp\left(-\sqrt{t}x-\sqrt{t}y+\frac{1}{2}[-\sqrt{t}x,-\sqrt{t}y]+R_3(-\sqrt{t}x,-\sqrt{t}y)\right)\Bigg)'_t(+0)=$$

$$=\left(a\exp\left(\sqrt{t}x+\sqrt{t}y+\frac{t}{2}[x,y]-\sqrt{t}x-\sqrt{t}y+\frac{t}{2}[x,y]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}[\sqrt{t}x+\sqrt{t}y,-\sqrt{t}x-\sqrt{t}y]+H(x,y,t)\right)\right)'_t(+0)=$$

$$=\left(L_a\exp\left(t[x,y]+H(x,y,t)\right)\right)'_t(+0)$$

де вираз $H(x,y,t)$ має за t порядок $\geqslant \frac{3}{2}$ при $t\to+0$. В останній рівності використали, зокрема, кососиметричність дужки Лі. Диференціюючи цей вираз, отримуємо потрібне:

$$[X_x,Y_y](a)=d_eL_a\circ d_0\exp([x,y]+H'_t(x,y,0))=d_eL_a([x,y])=X_{[x,y]}(a),$$

де знову використали твердження 7.1.

■

Попереднє твердження може бути інтерпретоване, зокрема, як альтернативний спосіб знаходити (або визначати) дужку Лі. Крім того, з його доведення випливає ще один спосіб це робити.

Наслідок 9.1. *Для будь-яких* $x,y\in\mathfrak{g}$

$$[x,y]=\left(\gamma_x(\sqrt{t})\,\gamma_y(\sqrt{t})\,\gamma_x(\sqrt{t})^{-1}\,\gamma_y(\sqrt{t})^{-1}\right)'_t(+0).$$

Доведення. Дійсно, з попереднього твердження і початку його доведення випливає, що

$$[x,y]=X_{[x,y]}(e)=[X_x,Y_y](e)=$$

$$=\left(\exp\sqrt{t}x\,\exp\sqrt{t}y\,\exp-\sqrt{t}x\,\exp-\sqrt{t}y\right)'_t(+0).$$

Згідно з твердженням 7.1, $\gamma_x(t)=\exp tx$, тому $\gamma_x(t)^{-1}=\exp -tx$ для будь-якого t і так само для y, звідки й маємо потрібне.

■

Зауважимо, що у цій формулі диференціюється *комутатор* елементів $\gamma_x(\sqrt{t})$ і $\gamma_y(\sqrt{t})$ групи G, тобто дужка Лі певним чином пов'язана з "вимірюванням некомутативності" множення у цій групі (комутатор $aba^{-1}b^{-1}$ елементів a і b дорівнює e тоді й тільки тоді, коли ці елементи комутують). Згадаємо також, що матричний комутатор, що є дужкою Лі матричної групи Лі згідно з прикладом 8.1, "вимірює некомутативність" добутку матриць.

Вправа 9.1. Вивести формулу для дужки Лі матричної групи Лі $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (або $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) з прикладу 8.1, тобто те, що вона є матричним комутатором, двома описаними тут способами з опису лівоінваріантних векторних полів на матричних групах та їхніх інтегральних траєкторій у прикладі 6.1.

Наслідок 9.2. *Дужка Лі задовольняє тотожність Якобі:*

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Доведення. Розглянемо відповідне лівоінваріантне поле, застосуємо лінійність відображення $x \mapsto X_x$ і (кілька разів) твердження 9.1:

$$X_{[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]} = X_{[[x,y],z]} + X_{[[y,z],x]} + X_{[[z,x],y]} =$$
$$= [X_{[x,y]}, X_z] + [X_{[y,z]}, X_x] + [X_{[z,x]}, X_y] =$$
$$= [[X_x, X_y], X_z] + [[X_y, X_z], X_x] + [[X_z, X_x], X_y] = 0,$$

де рівність нулю випливає з тотожності Якобі для векторних полів (її, у свою чергу, нескладно перевірити за означенням, що наведене на початку розділу). Тоді з того, що $x \mapsto X_x$ є лінійним ізоморфізмом у силу наслідку 6.1, отримуємо потрібне.

■

Ця властивість замінює дужці Лі асоціативність. Зверніть увагу на циклічну перестановку аргументів, що присутня у її формулюванні.

10 Алгебри. Асоціативні алгебри

У цьому та наступному розділах будуть розглянуті лінійно-алгебраїчні структури подібні до тієї, що визначає дужка Лі на дотичному просторі групи Лі. Нам зручно буде почати з більш загального поняття.

Означення 10.1. *Алгеброю* над полем $\mathbb{F}$ зветься векторний простір V над $\mathbb{F}$ з бінарною операцією $*\colon V \times V \to V\colon (x, y) \to x*y$, що є білінійною, тобто

$$(\lambda x + \mu y) * z = \lambda x * z + \mu y * z, \quad x * (\lambda y + \mu z) = \lambda x * y + \mu x * z$$

для будь-яких $x, y, z \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Отже, в алгебрі крім додавання векторів та множення на скаляри з $\mathbb{F}$ вводиться білінійна операція множення векторів один на інший. Далі у цьому розділі ми будемо за замовчуванням позначати її $*$. З білінійності випливає, зокрема, що $x * 0 = 0 * x = 0$ для будь-якого $x \in V$.

Означення 10.2. Відображення алгебр $\varphi\colon V \to W$ зветься *гомоморфізмом алгебр*, якщо воно лінійне і $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ для будь-яких $x, y \in V$. Бієктивний гомоморфізм алгебр зветься *ізоморфізмом алгебр*. Якщо існує ізоморфізм алгебр $\varphi\colon V \to W$, то будемо казати, що V *ізоморфна* W (або що V і W ізоморфні) і писати $V \simeq W$.

Щоб означення гомоморфізма (а саме вимога лінійності у ньому) мало сенс, необхідно, щоб V і W були алгебрами над одним й тим самим полем $\mathbb{F}$. Звичайно, зірочки зліва і справа у цьому означенні позначають, взагалі кажучи, різні операції – на V і на W відповідно. Ізоморфізм алгебр є лінійним ізоморфізмом, тому, зокрема, вимірності ізоморфних алгебр збігаються.

Вправа 10.1. Перевірити, що відображення, що обернене до ізоморфізма алгебр, теж є ізоморфізмом алгебр і що ізоморфність – відношення еквівалентності алгебр над $\mathbb{F}$.

Означення 10.3. *Підалгеброю* алгебри V зветься векторний підпростір $W \subset V$ такий, що $x * y \in W$ для будь-яких $x, y \in W$. *Лівим* (відповідно, *правим*) *ідеалом* V зветься векторний підпростір $W \subset V$ такий, що $x * y \in W$ для будь-яких $x \in V$, $y \in W$ (відповідно, для будь-яких $x \in W$, $y \in V$).

Зокрема, будь-яка підалгебра з обмеженням на неї операції $*$ сама є алгеброю, а будь-який ідеал є підалгеброю. Зауважимо, що алгебра V з операціями векторного додавання та $*$ є (взагалі кажучи, неасоціативним) кільцем, а її підалгебри, ліві та праві ідеали – підкільцями, лівими та правими ідеалами кільця відповідно. Як і кільця, ми можемо розрізняти алгебри за властивостями множення, тобто операції $*$. Наступні означення є частковими випадками відповідних означень для кілець.

Означення 10.4. Алгебра V зветься

- *асоціативною*, якщо $*$ асоціативна: $(x * y) * z = x * (y * z)$ для будь-яких $x, y, z \in V$;

- *комутативною*, якщо $*$ комутативна: $x * y = y * x$ для будь-яких $x, y \in V$;

- *алгеброю з одиницею*, якщо існує такий елемент $1 \in V$ (*одиниця* V), що $x * 1 = 1 * x = x$ для будь-якого $x \in V$;

- *алгеброю з діленням*, якщо це алгебра з одиницею 1, і для кожного ненульового вектора $x \in V$ існує *обернений* x^{-1} такий, що $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$.

Алгебра, для якої виконані усі чотири властивості, з операціями додавання та $*$ є полем, а якщо виконані усі крім комутативності – тілом. Далі наведемо кілька добре вже відомих нам прикладів асоціативних алгебр.

Приклад 10.1. Будь-яке поле $\mathbb{F}$ є одновимірною асоціативною комутативною алгеброю з діленням над собою. Тут операції множення на скаляр і $*$ є просто множенням цього поля.

Зокрема, дійсні числа $\mathbb{R}$ мають саме таку структуру алгебри. Зауважимо, що у будь-якій алгебрі V з одиницею 1 підмножина $\{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ є одновимірною підалгеброю, що ізоморфна $\mathbb{F}$ (перевірте це).

Приклад 10.2. Поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ з операцією комплексного добутку є двовимірною асоціативною комутативною алгеброю з діленням над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Приклад 10.3. Тіло кватерніонів $\mathbb{H}$ з операцією кватерніонного добутку (див. приклад 4.8) є чотиривимірною асоціативною некомутативною алгеброю з діленням над $\mathbb{R}$.

Попередні три приклади мотивують питання про те, скількома різними способами можна узагальнити комплексні числа. Відповіддю є наступна теорема.

Теорема 10.1 (Фробеніус)**.** *Будь-яка скінченновимірна асоціативна алгебра з діленням над полем $\mathbb{R}$ ізоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ або $\mathbb{H}$.*

Доведення. Див. [24, с. 116-125] або [35, с. 166-170]. ∎

Якщо замінити тут умову асоціативності слабшою умовою *альтернативності* або умовою *нормованості* (що узагальнює властивості модулів дійсних, комплексних чисел та кватерніонів), то з'явиться четвертий варіант – *октоніони* (*октави*, *числа Келі*), що утворюють 8-вимірну неасоціативну некомутативну алгебру з діленням $\mathbb{O}$ (ще її позначають $\mathbb{C}$a) над $\mathbb{R}$ (див. [3] і [24, с. 36-47]). Це твердження *узагальненої теореми Фробеніуса* ([24, с. 117, 125-128]) та *теореми Гурвіца* ([24, с. 99-108]) відповідно. Подальші пов'язані з цим колом питань обговорення і результати можна знайти у [3], [24] і [35, с. 176-191]. Зауважимо, що вимірності 1, 2, 4 і 8 виникають також у кількох топологічних задачах. Однією з них є задача про паралелізовність сфер, що згадувалася після наслідку 6.2. Всі ці факти взаємопов'язані, див. [39], зокрема діаграму на с. 431 і обговорення перед нею.

Приклад 10.4. Простір матриць $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$, де $n \geqslant 2$, з операцією матричного добутку є n^2-вимірною асоціативною некомутативною алгеброю з одиницею I над полем $\mathbb{F}$ (при $n = 1$ ця алгебра комутативна, бо очевидним чином ізоморфна $\mathbb{F}$).

Приклад 10.5. Для довільної множини Ω простір $\mathbb{F}^\Omega$ відображень (функцій) $\Omega \to \mathbb{F}$ з операцію множення функцій є асоціативною комутативною алгеброю з одиницею 1 (у сенсі постійної функції) над $\mathbb{F}$. Її вимірність дорівнює числу елементів Ω, зокрема, вона нескінченновимірна для нескінченної Ω (чому?).

Нехай V – n-вимірна алгебра над полем $\mathbb{F}$, а $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – якийсь її базис. Помітимо, що структура цієї алгебри однозначно визначена попарними добутками $e_i * e_j$ для усіх індексів $i, j = \overline{1, n}$. Дійсно, розглянемо будь-які $x, y \in V$ і розкладемо їх за цим базисом: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i e_i$. Тоді в силу білінійності

$$x * y = \left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right) * \left(\sum_{j=1}^{n} y^j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j e_i * e_j.$$

Тут зручно буде задати ці попарні добутки наборами чисел, розклавши за тим же базисом.

Означення 10.5. Нехай для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k.$$

Тоді коефіцієнти $\{C_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n \subset \mathbb{F}$ цих розкладень звуться *структурними константами* алгебри V у базисі $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Отже, у позначеннях як вище маємо

$$x * y = \sum_{i,j,k=1}^{n} x^i y^j C_{ij}^k e_k. \tag{10.1}$$

Таким чином, структура алгебри однозначно визначена цими числами. Це спостереження можна узагальнити, порівнюючи структури різних алгебр. Якщо W – інша n-вимірна алгебра над $\mathbb{F}$, що має у базисі $\{f_1, \ldots, f_n\}$

ті ж структурні константи, то визначимо лінійне відображення $\varphi\colon V \to W$ умовою $\varphi(e_i) = f_i$ для кожного $i = \overline{1, n}$, тобто $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$ переводиться у $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i f_i$. Це відображення дійсно лінійне за побудовою, більш того, воно є лінійним ізоморфізмом, бо переводить базис у базис. Також воно зберігає структуру алгебри, бо з рівняння (10.1) для W і рівності структурних констант маємо для будь-яких $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i e_i \in V$

$$\varphi(x) * \varphi(y) = \sum_{i,j,k=1}^{n} x^i y^j C_{ij}^k f_k = \varphi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} x^i y^j C_{ij}^k e_k\right) = \varphi(x * y)$$

в силу лінійності φ. Отже, φ – ізоморфізм алгебр.

Наслідок 10.1. *Скінченновимірні алгебри над одним полем, що у деяких базисах мають рівні структурні константи, є ізоморфними.*

Обернене у загальному випадку невірне. Наприклад, заміна базиса алгебри на інший, взагалі кажучи, змінює структурні константи.

Вправа 10.2. Як саме змінюються структурні константи при заміні базиса? Показати, що вони утворюють 2-коваріантний і 1-контраваріантний тензор на V.

Можна інтерпретувати структурні константи й зворотнім чином: будь-який набір чисел $\{C_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n \in \mathbb{F}^{n^3}$ на будь-якому n-вимірному просторі V над $\mathbb{F}$ з базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$ задає структуру алгебри $*$ формулою (10.1) (перевірте білінійність цієї операції). При цьому всі такі алгебри ізоморфні в силу попереднього наслідку. Додаткові умови на $*$ також можна сформулювати в термінах структурних констант.

Вправа 10.3. Яким необхідним та достатнім умовам повинні задовольняти структурні константи $\{C_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n$, щоб відповідна алгебра була асоціативною? Комутативною? Пор. з вправою 11.1 нижче.

Тому, щоб описати усі n-вимірні алгебри над $\mathbb{F}$, що задовольняють певним умовам, з точністю до ізоморфізма, можна взяти підмножину простору $\mathbb{F}^{n^3}$, що визначається певними рівняннями (як у попередній вправі або у вправі 11.1 нижче), і профакторизувати її за відношенням еквівалентності, що відповідає ізоморфності алгебр. Отриману фактормножину часто звуть *простором модулів* відповідного класу алгебр. Для алгебр невеликих вимірностей це цілком дієвий (і добре автоматизований) метод класифікації.

11 Алгебри Лі. Алгебра Лі групи Лі

Для неасоціативних алгебр часто вводять додаткові умови типу асоціативності. Прикладами є згадані у попередньому розділі альтернативні алгебри (див. [24, с. 117]), алгебри Йордана (див. [3]) та, власне, алгебри Лі, де такою умовою є тотожність Якобі, а замість комутативності вимагається антикомутативність.

Означення 11.1. Нехай $\mathfrak{g}$ – алгебра над полем $\mathbb{F}$ з білінійною операцією $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\colon (x,y)\mapsto [x,y]$. Вона зветься *алгеброю Лі*, а $[\cdot,\cdot]$ – її *дужкою Лі*, якщо

- $[x,x]=0$ для будь-якого $x\in\mathfrak{g}$ (*антикомутативність*);
- $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ для будь-яких $x,y,z\in\mathfrak{g}$ (*тотожність Якобі*).

З умов антикомутативності та білінійності випливає умова кососиметричності $[x,y]=-[y,x]$ для будь-яких $x,y\in g$ (аналогічно до зауваження перед означенням 8.1). Якщо ж покласти у попередній умові $x=y$, то отримаємо $[x,x]=-[x,x]$, звідки $[x,x]=0$ випливає лише за додаткової умови $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$ (де $\operatorname{char}\mathbb{F}$ позначає характеристику поля $\mathbb{F}$). Звичайно, ця умова виконується для випадку $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, який нам тільки й потрібен для теорії Лі (а також у випадку $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, для якого доводиться багато структурних результатів теорії алгебр Лі), тому ми можемо у подальшому вважати умови антикомутативності та кососиметричності еквівалентними, але для загального означення обрано сильнішу умову.

Вправа 11.1. Нехай $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$. Показати, що числа $\{C_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^n\subset\mathbb{F}$ є структурними константами деякої n-вимірної алгебри Лі над $\mathbb{F}$ тоді й тільки тоді, коли виконані умови

- $C_{ij}^k=-C_{ji}^k$ для будь-яких $i,j,k=\overline{1,n}$;
- $\sum\limits_{m=1}^n C_{ij}^m C_{mk}^l + C_{jk}^m C_{mi}^l + C_{ki}^m C_{mj}^l = 0$ для будь-яких $i,j,k,l=\overline{1,n}$,

які відповідають антикомутативності та тотожності Якобі. Що потрібно змінити у цих умовах, щоб включити випадок $\operatorname{char}\mathbb{F}=2$?

Також зауважимо, що якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}$ є комутативною, тобто виконується рівність $[x,y]=[y,x]$ для будь-яких $x,y\in\mathfrak{g}$, то з антикомутативності випливає тоді, що $[x,y]=[y,x]=-[x,y]$ для всіх x,y. Знову ж, при $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$ це означає $[x,y]=0$. І навпаки, з умови $[x,y]=0$ для всіх $x,y\in\mathfrak{g}$, звичайно, випливає комутативність без додаткових вимог. Тому для наступного означення знову оберемо сильнішу умову.

Означення 11.2. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ зветься *абелевою*, якщо її дужка Лі дорівнює нулю: $[x, y] = 0$ для будь-яких $x, y \in g$.

Крім комутативності самої алгебри Лі, використання тут терміна "абелевий" мотивується твердженням 11.1 нижче (див. також зауваження про комутативний випадок наприкінці прикладу 11.2).

Перепишемо тепер означення 10.2 у термінах алгебр Лі.

Означення 11.3. Відображення алгебр Лі $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ зветься *гомоморфізмом алгебр Лі*, якщо воно лінійне і $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$. Бієктивний гомоморфізм алгебр Лі зветься *ізоморфізмом алгебр Лі*. Якщо існує ізоморфізм алгебр Лі $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, то будемо казати, що $\mathfrak{g}$ *ізоморфна* $\mathfrak{h}$ (або що $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ ізоморфні) і писати $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$.

Знову ж, у цьому означенні $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ повинні бути алгебрами Лі над одним й тим самим полем $\mathbb{F}$, дужки Лі зліва і справа, взагалі кажучи, різні (але ми, як правило, будемо позначати усі дужки однаково), ізоморфні алгебри Лі є ізоморфними векторними просторами, і тому їхні вимірності збігаються, відображення, що обернене до ізоморфізма алгебр Лі, теж є ізоморфізмом алгебр Лі, а ізоморфність є відношенням еквівалентності алгебр Лі над $\mathbb{F}$. Так само перепишемо означення 10.3, зауваживши, що лівий та правий ідеал алгебри Лі – це одне й те саме в силу антикомутативності. Тому будемо його називати просто ідеалом.

Означення 11.4. *Підалгеброю Лі* алгебри Лі $\mathfrak{g}$ зветься векторний підпростір $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ такий, що $[x, y] \in \mathfrak{h}$ для будь-яких $x, y \in \mathfrak{h}$. *Ідеалом* $\mathfrak{g}$ зветься векторний підпростір $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ такий, що $[x, y] \in \mathfrak{h}$ для будь-яких $x \in \mathfrak{g}$ і $y \in \mathfrak{h}$.

Зокрема, підалгебри Лі з обмеженнями на них дужки Лі самі є алгебрами Лі, а ідеали алгебри Лі є підалгебрами Лі. Далі нам зручно буде використовувати наступне позначення для лінійної оболонки усіх попарних дужок Лі елементів двох векторних підпросторів $\mathfrak{h}, \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] \coloneqq \operatorname{span}\{[x, y] \mid x \in \mathfrak{h},\, y \in \mathfrak{k}\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda^i [x_i, y_i] \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\, \forall\, i = \overline{1, m}\ \lambda^i \in \mathbb{F},\, x_i \in \mathfrak{h},\, y_i \in \mathfrak{k} \right\}.$$

Зауважимо, що $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] = [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}]$ в силу антикомутативності. У цих позначеннях векторний підпростір $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ є підалгеброю Лі тоді й тільки тоді, коли $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, а ідеалом – тоді й тільки тоді, коли $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Алгебри Лі можна вивчати й незалежно від груп Лі як самостійні алгебраїчні об'єкти, тим більше, що вони можуть розглядатися над будь-яким полем і бути нескінченновимірними, як ми побачимо у деяких прикладах нижче. Див., наприклад, [19] та [21]. Але нас все ж цікавить саме теорія Лі. Перш за все, перепишемо результати попередніх розділів у термінах алгебр Лі. Із зауваження після означення 8.1 та наслідку 9.2 випливає наступне.

Наслідок 11.1. *Нехай G – група Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$, а $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ – дужка Лі G. Тоді простір $\mathfrak{g}$ з операцією $[\cdot,\cdot]$ є алгеброю Лі над $\mathbb{R}$ скінченної вимірності* $\dim\mathfrak{g} = \dim G$.

Означення 11.5. Алгебра Лі $\mathfrak{g} = T_eG$ з дужкою Лі $[\cdot,\cdot]$ групи Лі G зветься *алгеброю Лі групи Лі G*.

У подальшому, якщо не вказане інше, завжди будемо мати на увазі саме таку структуру на $\mathfrak{g} = T_eG$. Твердження 8.1 тепер набуває наступного вигляду.

Наслідок 11.2. *Нехай G і H – групи Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$ і $\mathfrak{h} = T_eH$ – їхні алгебри Лі, а $\Phi\colon G\to H$ – гомоморфізм груп Лі. Тоді його диференціал у одиниці $d_e\Phi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ є гомоморфізмом алгебр Лі.*

Сформульоване вище (разом з ланцюговим правилом) означає, що відповідність між групами Лі та їх алгебрами Лі та між гомоморфізмами груп Лі та їх диференціалами в одиниці є функтором з категорії груп Лі та їх гомоморфізмів у категорію скінченновимірних алгебр Лі над $\mathbb{R}$ та їх гомоморфізмів (перевірте це твердження, якщо знайомі з відповідними поняттями). Він зветься *функтором Лі.* Зокрема, наступний наслідок є частковим випадком загальнокатегорного факта.

Наслідок 11.3. *Якщо $\Phi\colon G\to H$ – ізомоморфізм груп Лі, то $d_e\Phi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ – ізомоморфізм алгебр Лі. Тому алгебри Лі ізоморфних груп Лі є ізоморфними.*

Доведення. Оскільки Φ – дифеоморфізм, $d_e\Phi$ – лінійний ізоморфізм, зокрема біекція. Оскільки це гомоморфізм алгебр Лі за попереднім наслідком, це їх ізоморфізм.

■

Виявляється (див. нижче приклади 11.1, 11.4, вправу 11.5 та обговорення після неї), що при цьому неізоморфні групи Лі можуть мати ізоморфні алгебри Лі, тобто функтор Лі не є ”ін’єктивним з точністю до ізоморфізма”. Відповіді на природні питання, чи можна його зробити ін’єктивним у цьому сенсі, запровадивши додаткові обмеження на групи Лі, що розглядаються, і чи є він сюр’єктивним, будуть дані у подальших розділах (див. теорему 15.2).

Зауважимо також, що, оскільки дотичні простори деякої групи Лі G та її компоненти одиниці G^0 у одиниці $e \in G$ рівні (точніше, канонічно ототожнюються) за наслідком 5.4: $T_eG^0 = T_eG = \mathfrak{g}$, а дужка Лі згідно з конструкцією розділу 8 визначена поведінкою G на будь-якому відкритому околі e, зокрема на G^0 (див. пункт 2. теореми 3.1), ці простори рівні також як алгебри Лі.

Наслідок 11.4. *Алгебра Лі будь-якої групи Лі збігається з алгеброю Лі її компоненти одиниці.*

Розглянемо тепер кілька прикладів. Деякі з них описують алгебри Лі груп Лі, деякі – алгебри Лі у загальному сенсі.

Приклад 11.1. Будь-який векторний простір над будь-яким полем $\mathbb{F}$ (зокрема нескінченновимірний) можна просто перетворити на абелеву алгебру Лі, формально ввівши на ньому нульову дужку Лі $[\cdot,\cdot] := 0$. При цьому усі лінійні відображення таких просторів перетворюються на гомоморфізми алгебр Лі, а лінійні ізоморфізми – на ізоморфізми алгебр Лі.

Наслідок 11.5. *Усі абелеві алгебри Лі над $\mathbb{F}$ однакової скінченної вимірності n ізоморфні.*

Дійсно, вони всі ізоморфні, скажімо, простору $\mathbb{F}^n$ з нульовою дужкою. З іншого боку, $\mathbb{R}^n$ з операцією додавання векторів є абелевою групою Лі (приклад 2.4) з нейтральним елементом 0. Ототожнимо, як завжди, $T_0\mathbb{R}^n$ з $\mathbb{R}^n$ (і так само для дотичних просторів у решті точок $\mathbb{R}^n$) і знайдемо на дотичному $\mathbb{R}^n$ дужку Лі цієї групи способом із розділу 8.

Для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}^n$ лівий зсув має вигляд $L_ab = a + b$, тобто є паралельним перенесенням на a. Тому його диференціал у довільній $c \in \mathbb{R}^n$ є тотожним відображенням: $d_cL_a = id_{\mathbb{R}^n}$. Тоді для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ відповідне лівоінваріантне поле має вигляд $X_x(a) = d_0L_a(x) = x$ для будь-якого $a \in \mathbb{R}^n$, тобто є постійним. Отже, його інтегральні траєкторії є прямими, зокрема, $\gamma_x(t) = tx$ для $t \in \mathbb{R}$, і тому $\exp(x) = \gamma_x(1) = x$. Таким чином, експоненційне відображення є тотожним. Тому в позначеннях розділу 8 маємо $\nu(x, y) = \exp^{-1}(\exp x + \exp y) = x + y$, отже $[x, y] = 2\nu_2(x, y) = 0$ для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ще простіше вивести це з твердження 9.1 (як саме?). Отже, алгебра Лі групи Лі $\mathbb{R}^n$ – це $\mathbb{R}^n$ з абелевою структурою. Виявляється, що це так й для довільної абелевої групи Лі.

Твердження 11.1. *Якщо група Лі абелева (тобто комутативна), то її алгебра Лі абелева.*

Доведення. Використаємо наслідок 9.1: для будь-яких x, y з алгебри Лі $\mathfrak{g}$ цієї групи G маємо

$$[x, y] = \Big(\gamma_x(\sqrt{t})\,\gamma_y(\sqrt{t})\,\gamma_x(\sqrt{t})^{-1}\,\gamma_y(\sqrt{t})^{-1}\Big)'_t(+0).$$

Але G комутативна, тому $\gamma_x(\sqrt{t})\,\gamma_y(\sqrt{t})\,\gamma_x(\sqrt{t})^{-1}\,\gamma_y(\sqrt{t})^{-1} = e$ для будь-якого $t \geqslant 0$. Отже, це постійна крива, і її дотичний вектор $[x, y] = 0$.

■

Крім $\mathbb{R}^n$, прикладами n-вимірних абелевих груп Лі є T^n (приклад 2.7) і добутки $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ для $m = \overline{1, n-1}$ (абелевість тут випливає з означення прямого добутку груп). Тоді з попередніх наслідку і твердження випливає, що усі їхні алгебри Лі є ізоморфними. При цьому самі ці групи Лі попарно неізоморфні, бо негомеоморфні (наприклад, фундаментальною групою $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ є $\mathbb{Z}^m$; зокрема, $\mathbb{R}^n$ є єдиною однозв'язною серед перелічених груп). Див. також наслідок 15.2 далі.

Зауважимо також, що будь-яка одновимірна алгебра Лі $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{F}$ є абелевою, а отже ізоморфна $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}$ за попереднім наслідком. Дійсно, будь-які два її елементи мають вигляд λx і μx, де $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, а $x \in \mathfrak{g}$ – базисний вектор. Але $[\lambda x, \mu x] = 0$ за антикомутативністю дужки Лі. Тому у подальшому під алгеброю Лі $\mathbb{F}$ будемо мати на увазі саме абелеву.

Вправа 11.2. Описати всі двовимірні алгебри Лі над $\mathbb{F}$ з точністю до ізоморфізма.

Приклад 11.2. З наслідку 5.1 та прикладу 8.1 випливає, що алгеброю Лі групи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ є $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ з матричним комутатором $[x, y] = xy - yx$. Зокрема, $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ (пор. з прикладом 4.3).

Узагальнимо, позначивши через $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ простір $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ з матричним комутатором. Зауважимо, що таким чином на $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ існують дві пов'язані структури: асоціативної алгебри для множення матриць (див. приклад 10.4) та алгебри Лі для коммутатора. У свою чергу, узагальнимо це спостереження.

Означення 11.6. Нехай V – асоціативна алгебра з операцією $*$. Алгеброю Лі, що *асоційована* з V, зветься простір V з операцією $[x, y] \coloneqq x * y - y * x$.

Твердження 11.2. *Алгебра Лі, що асоційована з асоціативною алгеброю V, дійсно є алгеброю Лі.*

Доведення. Білінійність $[\cdot, \cdot]$ випливає з білінійності $*$ (перевірте це). Оскільки для будь-якого $x \in V$

$$[x, x] \coloneqq x * x - x * x = 0,$$

ця операція антикомутативна. Нарешті, для будь-яких $x, y, z \in V$ маємо

$$[[x,y],z] = [x*y - y*x, z] = (x*y - y*x)*z - z*(x*y - y*x) =$$

$$x*y*z - y*x*z - z*x*y + z*y*x,$$

де дужки в останньому виразі не розставляємо в силу асоціативності $*$. Виписавши аналогічні вирази для $[[y,z],x]$ і $[[z,x],y]$ та додавши їх, отримаємо 0 (зробіть це), що демонструє тотожність Якобі.

■

Зокрема, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ є алгеброю Лі. Зауважимо, що якщо асоціативна алгебра є комутативною, то асоційована з нею алгебра Лі абелева.

Певним аналогом оберненої операції, тобто побудови асоціативної алгебри за алгеброю Лі, є конструкція *універсальної обгортуючої алгебри*, див. [19, 113-120].

Далі приклади 11.3-11.9 спираються на результати розділу 5. Для них усіх дужкою Лі є матричний комутатор в силу прикладу 8.1.

Приклад 11.3. Алгеброю Лі групи $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ є $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\, x = 0\}$. Зокрема, $\mathfrak{sl}(1,\mathbb{R}) = \{0\}$ (пор. з прикладом 4.1).

Ця алгебра Лі також допускає узагальнення на випадок довільного поля: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) \coloneqq \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F}) \mid \mathrm{Tr}\, x = 0\}$ з матричним комутатором. Згідно з міркуваннями наприкінці розділу 5 (що, очевидно, вірні для довільного $\mathbb{F}$) $[\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})] \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$, тому $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ (що є векторним підпростором в силу лінійності умови $\mathrm{Tr}\, x = 0$) – ідеал алгебри Лі $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$.

Приклад 11.4. Групи $\mathrm{O}(n)$ та $\mathrm{SO}(n)$ мають спільну алгебру Лі $\mathfrak{so}(n) = \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid x + x^T = 0\}$ (як і повинно бути за наслідком 11.4). При цьому вони неізоморфні, бо негомеоморфні: мають різну кількість зв'язних компонент згідно з твердженням 4.1. Зокрема, $\mathfrak{so}(1) = \{0\}$ (пор. з прикладами 4.1 та 4.2), $\mathfrak{so}(2) \simeq \mathbb{R}$ (пор. з прикладами 4.4 та 4.6).

Приклад 11.5. Алгеброю Лі групи $\mathrm{O}(p,q)$ є $\mathfrak{o}(p,q) = \{x \in \mathrm{Mat}(p+q,\mathbb{R}) \mid x\, I_{p,q} + I_{p,q}\, x^T = 0\}$. Зокрема, $\mathfrak{o}(n,0) = \mathfrak{o}(0,n) = \mathfrak{so}(n)$ і $\mathfrak{o}(1,1) \simeq \mathbb{R}$ (перевірте це і пор. з вправою 4.3).

Вправа 11.3. Показати, що $\mathfrak{o}(p,q) \simeq \mathfrak{o}(q,p)$. Чи є відповідний ізоморфізм диференціалом ізоморфізма з вправи 1.4 (і чи є побудований вами там ізоморфізм взагалі ізоморфізмом груп Лі)?

Приклад 11.6. Алгеброю Лі групи $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ є $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$. Зокрема, $\mathfrak{gl}(1,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ з нульовою дужкою Лі – абелева (пор. з прикладом 4.7).

Приклад 11.7. Алгеброю Лі групи $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ є $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\, x = 0\}$. Зокрема, $\mathfrak{sl}(1,\mathbb{C}) = \{0\}$ (пор. з прикладом 4.1).

Приклад 11.8. Алгеброю Лі групи $\mathrm{U}(n)$ є $\mathfrak{u}(n) = \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid x + \overline{x}^T = 0\}$. Зокрема, $\mathfrak{u}(1) \simeq \mathbb{R}$ (пор. з прикладом 4.5).

Приклад 11.9. Алгеброю Лі групи $\mathrm{SU}(n)$ є $\mathfrak{su}(n) = \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid x + \overline{x}^T = 0,\ \mathrm{Tr}\, x = 0\}$. Зокрема, $\mathfrak{su}(1) = \{0\}$ (пор. з прикладом 4.1).

Простори з прикладів 11.6-11.9 є алгебрами Лі як над $\mathbb{R}$ (як алгебри Лі відповідних груп Лі), так і над $\mathbb{C}$. Їхні дійсні та комплексні вимірності обговорювалися у розділі 5.

Вправа 11.4. Які з перелічених вище дійсних та комплексних алгебр Лі мають аналоги над довільним полем?

Приклад 11.10. На будь-якому тривимірному орієнтованому евклідовому просторі $\mathfrak{g}$ визначена операція векторного добутку $[\cdot,\cdot]$, що є білінійною, антикомутативною і задовольняє тотожність Якобі. Тому це тривимірна дійсна алгебра Лі. Усі такі алгебри Лі ізоморфні E^3, тобто $\mathbb{R}^3$ зі стандартною евклідовою структурою і стандартним векторним добутком (див. приклад 4.9). Дійсно, нехай $\{i,j,k\}$ – додатно орієнтований ортонормований базис $\mathfrak{g}$ (до речі, таке традиційне позначення елементів базиса мотивоване кватерніонами). Тоді

$$[i,j] = -[j,i] = k,\ [j,k] = -[k,j] = i,\ [k,i] = -[i,k] = j,$$

решта попарних добутків елементів базиса нульові. Тобто ненульові структурні константи кожної такої алгебри Лі у базисі $\{i,j,k\}$ дорівнюють

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1,\ C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1,\ C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1. \tag{11.1}$$

Оскільки E^3 в базисі $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ має ті ж структурні константи, ці алгебри Лі ізоморфні за наслідком 10.1.

Аналогічні міркування демонструють, що описані вище алгебри Лі ізоморфні $\mathfrak{so}(3)$. Дійсно, оберемо у просторі кососиметричних дійсних (3×3)-матриць $\mathfrak{so}(3)$ наступний базис:

$$e_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Обчислимо попарні дужки Лі елементів цього базису. Так, наприклад,

$$[e_1,e_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3 = -[e_2, e_1],$$

і аналогічно (перевірте це)

$$[e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1, \quad [e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2.$$

Тому ненульові структурні константи $\mathfrak{so}(3)$ мають вигляд (11.1), отже $\mathfrak{so}(3)$ дійсно ізоморфна орієнтованому тривимірному евклідовому простору з векторним добутком за наслідком 10.1.

Вправа 11.5. Показати, що $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$. Це можна зробити як чисто алгебраїчно, підібравши базис $\mathfrak{su}(2)$ так, що його ненульові структурні константи мають вигляд (11.1), так і наступним більш цікавим способом. Розглянемо композицію ізоморфізма груп Лі $\mathrm{SU}(2) \to S^3$ з твердження 4.2 і побудованого у прикладі 4.9 відображення $\rho\colon S^3 \to \mathrm{SO}(3)$, що є гомоморфізмом груп Лі за наслідком 4.5. Отримаємо гомоморфізм груп Лі $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. Описати його явно (це зроблено, наприклад, у [30, с. 168-169]). Обчислити диференціал цього гомоморфізма і показати, що він є ізоморфізмом алгебр Лі $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$.

Завуважимо, що групи Лі $\mathrm{SU}(2)$ і $\mathrm{SO}(3)$ при цьому неізоморфні. Дійсно, згадаємо, що вони дифеоморфні S^3 та $\mathbb{R}P^3$, як показано у прикладах 4.8 і 4.9 відповідно. Отже, перша з цих груп Лі однозв'язна, а друга – ні, тому вони негомеоморфні.

Вправа 11.6. Показати, що $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{o}(1, 2)$. Чи ізоморфні групи Лі $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ і $\mathrm{O}(1, 2)$?

Вправа 11.7. Показати, що $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ неізоморфна $\mathfrak{so}(3)$.

Отже, групи Лі $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ і $\mathrm{SO}(3)$ (а також $\mathrm{O}(3)$) неізоморфні за наслідком 11.3.

Приклад 11.11. Розглянемо множину гладких функцій $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ на $\mathbb{R}^{2n}$ (де $n > 0$) з операціями додавання і множення на числа з $\mathbb{R}$. Це нескінченновимірний векторний простір над $\mathbb{R}$. *Дужка Пуассона* $\{\cdot, \cdot\}$ на ньому визначається формулою

$$(f, g) \mapsto \{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial x^i},$$

де координати позначено наступним чином: $\mathbb{R}^{2n} = \{(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)\}$. З цього означення випливає, що $\{\cdot, \cdot\}\colon C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ – коректно визначена білінійна антикомутативна операція.

Вправа 11.8. Показати, що $\{\cdot,\cdot\}$ задовольняє тотожність Якобі.

Таким чином, $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ з $\{\cdot,\cdot\}$ є нескінченновимірною алгеброю Лі над $\mathbb{R}$. Узагальненням цього прикладу є *пуассонові многовиди*, на просторах гладких функцій яких існують аналогічні структури, що перетворюють ці простори на алгебри Лі. До таких многовидів відносяться, зокрема, усі симплектичні. Див. доповнення 13 у [2] і лекцію 5 у [8].

Приклад 11.12. У розділі 9 ми нагадали означення дужки Лі $[X,Y] = XY - YX$ гладких векторних полів на гладкому многовиді M. Оскільки на просторі таких полів $\mathcal{X}(M)$ над $\mathbb{R}$ операція $[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$ є білінійною, антикомутативною і задовольняє тотожність Якобі (останнє перевіряється аналогічно до доведення твердження 11.2), вона перетворює $\mathcal{X}(M)$ на нескінченновимірну (при $\dim M > 0$) алгебру Лі над полем $\mathbb{R}$.

Нехай тепер G – група Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$ – її алгебра Лі. З твердження 9.1 випливає, що дужка Лі будь-яких двох лівоінваріантних векторних полів на G теж є лівоінваріантним векторним полем. Оскільки такі поля утворюють векторний підпростір у $\mathcal{X}(G)$ за наслідком 6.1, це підалгебра Лі. Більш того, у тому ж твердженні показано, що $[X_x, X_y] = X_{[x,y]}$ для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$, тобто лінійне відображення $x \mapsto X_x$ є гомоморфізмом алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у цю підалгебру. Разом з лінійною ізоморфністю (за тим же наслідком 6.1) це означає наступне.

Наслідок 11.6. *Лівоінваріантні векторні поля на групі Лі G утворюють підалгебру Лі у $\mathcal{X}(G)$, а відповідність $x \mapsto X_x$ задає ізоморфізм алгебри Лі $\mathfrak{g} = T_eG$ групи G на цю підалгебру Лі.*

В силу існування цього канонічного ізоморфізма алгебру Лі лівоінваріантних векторних полів на G часто ототожнюють з $\mathfrak{g}$. У деяких книжках саме її називають алгеброю Лі G.

Нагадаємо, що *пряма сума* $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ векторних просторів $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_2$ над полем $\mathbb{F}$ – це декартовий добуток $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_2$, елементи якого записуються як формальні суми $x_1 + x_2$ для $x_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2 \in \mathfrak{g}_2$ і на якому лінійні операції визначаються покомпонентно:

$$\lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) \coloneqq (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$$

для будь-яких $x_1, y_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2, y_2 \in \mathfrak{g}_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Таким чином, це теж векторний простір над $\mathbb{F}$. З іншого боку, говорять, що векторний простір $\mathfrak{g}$ є прямою сумою своїх підпросторів $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_2$ і пишуть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, якщо кожен елемент $\mathfrak{g}$ має вигляд $x_1 + x_2$ для $x_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2 \in \mathfrak{g}_2$ і таке розкладення єдине (що еквівалентно умові $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$). Інколи ці два поняття називають "зовнішньою" і "внутрішньою" прямими сумами відповідно, але насправді вони еквівалентні: існує канонічний ізоморфізм між $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ з другого означення і $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ у сенсі першого означення (який саме?), тому ми не будемо їх розрізняти.

Означення 11.7. *Прямою сумою алгебр Лі* $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_2$ над полем $\mathbb{F}$ зветься пряма сума векторних просторів $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ з дужкою Лі, що визначена умовою

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] \coloneqq [x_1, y_1] + [x_2, y_2]$$

для будь-яких $x_1, y_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2, y_2 \in \mathfrak{g}_2$.

Твердження 11.3. *Описана у попередньому означенні операція* $[\cdot,\cdot]$ *дійсно задає на* $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ *структуру алгебри Лі над* $\mathbb{F}$. *При цьому* $\mathfrak{g}_1$ *і* $\mathfrak{g}_2$ *є ідеалами цієї алгебри Лі. І навпаки, якщо алгебра Лі* $\mathfrak{g}$ *є прямою сумою своїх ідеалів* $\mathfrak{g}_1$ *і* $\mathfrak{g}_2$ *(як векторних підпросторів), то* $\mathfrak{g}$ *ізоморфна прямій сумі алгебр Лі* $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

Доведення. Білінійність, антикомутативність і тотожність Якобі для дужки Лі $[\cdot,\cdot]$ на $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ безпосередньо випливають з відповідних властивостей дужок Лі $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_2$. Перевірте це самостійно.

Коли ми говоримо про $\mathfrak{g}_1$ і $\mathfrak{g}_2$ як про підпростори у $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, мається на увазі їх ототожнення з підмножинами векторів вигляду $x_1 + 0$ і $0 + x_2$ відповідно, що, зрозуміло, дійсно є підпросторами, ізоморфними цим алгебрам Лі. Перевіримо, що $\mathfrak{g}_1$ – ідеал. Для будь-яких $x_1 + x_2 \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ і $y_1 + 0 \in \mathfrak{g}_1$ їх дужка Лі за означенням дорівнює

$$[x_1 + x_2, y_1 + 0] = [x_1, y_1] + [x_2, 0] = [x_1, y_1] + 0 \in \mathfrak{g}_1,$$

що й потрібно. Аналогічно демонструється, що $\mathfrak{g}_2$ – ідеал.

З іншого боку, якщо $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ – пряма сума ідеалів, то $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$ і кожен елемент $\mathfrak{g}$ однозначно представляється у вигляді $x_1 + x_2$. Тоді для будь-яких $x_1, y_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2, y_2 \in \mathfrak{g}_2$

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1] + [x_1, y_2] + [x_2, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2],$$

бо за означенням ідеала $[x_1, y_2]$ і $[x_2, y_1]$ повинні належати як до $\mathfrak{g}_1$, так і до $\mathfrak{g}_2$, тобто вони належать до $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$. Тоді канонічний ізоморфізм, що ставить у відповідність вектору $x_1 + x_2 \in \mathfrak{g}$ формальну суму $x_1 + x_2$, й буде потрібним ізоморфізмом алгебр Лі.

■

Це означення очевидним чином узагальнюється на пряму суму будь-якої скінченної кількості алгебр Лі. Далі через $\mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m$ позначатимемо саме таку структуру, якщо не вказане інше.

Вправа 11.9. Побудувати канонічний ізоморфізм між алгеброю Лі прямого добутку груп Лі $G_1 \times G_2$ і прямою сумою $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, де $\mathfrak{g}_i$ – алгебра Лі групи Лі G_i, $i = 1, 2$.

У подальшому ми будемо ототожнювати ці алгебри Лі, вважаючи $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ алгеброю Лі $G_1 \times G_2$. Це теж, звичайно, узагальнюється на довільну кількість множників.

Приклад 11.13. Алгебра Лі тора $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ таким чином ізоморфна прямій сумі $\underbrace{\mathbb{R} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$. Оскільки всі одновимірні алгебри Лі абелеві, за означенням ця пряма сума теж абелева. Так само буде для добутків вигляду $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Отже, ми отримали той самий результат, що у прикладі 11.1.

Вправа 11.10. Показати, що $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Один зі способів це зробити – діяти аналогічно до вправи 11.5, використавши конструкцію з вправи 4.11.

Поняття прямої суми дослівно узагальнюється й на довільні алгебри.

Також нагадаємо, що *факторпростір* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ векторного простору $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ за його підпростором $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – це множина суміжних класів вигляду $x + \mathfrak{h} = \{x + y \mid y \in \mathfrak{h}\}$ з лінійними операціями

$$\lambda(x + \mathfrak{h}) + \mu(y + \mathfrak{h}) \coloneqq (\lambda x + \mu y) + \mathfrak{h}$$

для будь-яких $x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, що коректно визначені та перетворюють його також у векторний простір над $\mathbb{F}$.

Означення 11.8. *Факторалгеброю Лі* алгебри Лі $\mathfrak{g}$ за її ідеалом $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ зветься факторпростір $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ з дужкою Лі, що визначена умовою

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] \coloneqq [x, y] + \mathfrak{h}$$

для будь-яких $x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Твердження 11.4. *Описана у попередньому означенні операція $[\cdot, \cdot]$ дійсно задає на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ структуру алгебри Лі (над тим же полем, що $\mathfrak{g}$).*

Доведення. Перевіримо коректність означення $[\cdot, \cdot]$. Нехай $x + \mathfrak{h} = \widetilde{x} + \mathfrak{h}$, $y + \mathfrak{h} = \widetilde{y} + \mathfrak{h}$, тобто $z \coloneqq \widetilde{x} - x \in \mathfrak{h}$ і $w \coloneqq \widetilde{y} - y \in \mathfrak{h}$. Тоді

$$[\widetilde{x}, \widetilde{y}] - [x, y] = [x + z, y + w] - [x, y] = [x, w] + [z, y] + [z, w] \in \mathfrak{h},$$

бо $\mathfrak{h}$ – ідеал. Отже, $[\widetilde{x}, \widetilde{y}] + \mathfrak{h} = [x, y] + \mathfrak{h}$, що й демонструє коректність. Тоді властивості дужки Лі $[\cdot, \cdot]$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ випливають з властивостей дужки Лі на $\mathfrak{g}$. Покажіть це самостійно.

■

Для цієї конструкції суттєво, що $\mathfrak{h}$ – саме ідеал, як побачили у попередньому доведенні. У подальшому $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ позначатиме саме таку структуру, якщо не вказане інше. Факторизувати групи Лі складніше, бо треба будувати гладку структуру на факторгрупі, але ми навчимося це робити далі у цьому курсі (див. теорему 23.1 і вправу 23.3).

Вправа 11.11. Як узагальнити поняття факторалгебри на довільні алгебри? Які саме ідеали при цьому потрібно розглядати?

12 Представлення груп та алгебр Лі. Приєднане представлення

Нехай V – векторний простір над полем $\mathbb{F}$. Через $\mathrm{End}(V)$ будемо позначати векторний простір усіх лінійних операторів (*лінійних ендоморфізмів*) $V \to V$ з операціями додавання та множення на скаляри з $\mathbb{F}$, а через $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ (або $\mathrm{Aut}(V)$) – підмножину невироджених, тобто бієктивних операторів (*лінійних автоморфізмів*) $V \to V$. Ці об'єкти вже розглядалися у розділі 1, втім, там йшлося про скінченновимірні простори. Там же було показано, що $\mathrm{GL}(V)$ з операцією композиції операторів утворює групу. Ці міркування залишаються вірними й у нескінченновимірному випадку. Зокрема, одиницею цієї групи є тотожний оператор id. Інколи $\mathrm{GL}(V)$ називають *повною лінійною групою* V. Як обговорювалося у розділі 1, при $\dim V = n$ ці простір та група ізоморфні $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ і $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ відповідно, де ізоморфізми ставлять у відповідність оператору його матрицю в деякому базисі V. Нехай тепер G – деяка група.

Означення 12.1. *(Лінійним) представленням групи* G на векторному просторі V зветься будь-який гомоморфізм груп $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Простір V при цьому зветься *простором* цього представлення (або *G-модулем*), $\dim V$ – його *вимірністю*, $\rho(a)$ для $a \in G$ – його *операторами*.

Тобто для кожного $a \in G$ його образ $\rho(a)\colon V \to V$ є невиродженим лінійним оператором і $\rho(ab) = \rho(a) \circ \rho(b)$ для будь-яких $a, b \in G$. З властивостей гомоморфізма груп випливає, зокрема, що $\rho(e) = id$ і $\rho(a^{-1}) = \rho(a)^{-1}$ для усіх $a \in G$ (перевірте це). Представлення є частковим випадком поняття дії групи на множині, до якого ми ще повернемося у зв'язку з однорідними просторами (див. розділ 22, зокрема приклад 22.3).

Приклад 12.1. *Тривіальним представленням* довільної групи G на довільному векторному просторі V називають постійний гомоморфізм на тотожний оператор V: $\rho\colon a \mapsto id$ для кожного $a \in G$.

Приклад 12.2. *Тавтологічним представленням* будь-якої підгрупи $G \subset \mathrm{GL}(V)$ на V називають гомоморфізм включення: $\rho\colon a \mapsto a$ для кожного $a \in G$. Крім тривіальних випадків $G = \{id\}$ і $G = \mathrm{GL}(V)$, прикладами тавтологічно представлених підгруп можуть бути підгрупа лінійних ізометрій $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \subset \mathrm{GL}(V)$ або підгрупа лінійних ізометрій, що зберігають орієнтацію, $\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \subset \mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ у випадку, коли на просторі V над $\mathbb{R}$ задана евклідова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тавтологічне представлення є, зокрема, ін'єктивним гомоморфізмом (*мономорфізмом*).

Означення 12.2. Представлення групи називають *точним*, якщо воно ін'єктивне.

Точне представлення є, зокрема, ізоморфізмом на свій образ $\rho(G) \subset \mathrm{GL}(V)$ (у випадку тавтологічного представлення цей образ збігається з G). Загальна теорія представлень груп – важливий розділ алгебри та її застосувань. Див., наприклад, [15] або [45, с. 478-536], де можна знайти, зокрема, ще одне доведення теореми 10.1 Фробеніуса про алгебри з діленням. Але нас цікавлять групи Лі.

Якщо V – векторний простір над $\mathbb{R}$ скінченної вимірності n, то, як уже зазначалося, $\mathrm{GL}(V)$ ізоморфна $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, що є групою Лі. Тоді за допомогою цього ізоморфізма структуру групи Лі можна перенести й на $\mathrm{GL}(V)$, перетворивши його на ізоморфізм груп Лі, як у прикладі 2.9 з ірраціональним обмотуванням тора. Втім, цей метод не дуже добрий, бо вказаний ізоморфізм неканонічний (залежить від вибору базиса V). Краще встановити існування структури групи Лі на $\mathrm{GL}(V)$ аналогічно до міркувань про $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ у розділі 1. Введемо на n^2-вимірному векторному просторі $\mathrm{End}(V)$ над $\mathbb{R}$ стандартні (евклідові) топологію та гладку структуру. Нагадаємо, що детермінант визначений і для операторів, причому бієктивним операторам відповідають в точності ненульові детермінанти, а функція $\det\colon \mathrm{End}(V) \to \mathbb{R}$, що ставить у відповідність кожному оператору його визначник, є гладкою (зокрема неперервною). Тоді підмножина $\mathrm{GL}(V) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ відкрита, а отже є гладким n^2-вимірним многовидом. Вводячи локальні координати (наприклад, за допомогою базиса V), встановлюємо, як у розділі 1, що відображення добутку (тобто композиції) $\mu\colon \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ і взяття оберненого оператора $\iota\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ є гладкими. Тому це дійсно група Лі.

Вправа 12.1. Перевірити, що два описаних тут підходи дають одну й ту ж гладку структуру на $\mathrm{GL}(V)$ (зокрема, гладка структура, що побудована в першому з них, насправді не залежить від вибору базиса V).

Наслідок 12.1. *Якщо V – скінченновимірний векторний простір над $\mathbb{R}$, то $\mathrm{GL}(V)$ є групою Лі. Вона ізоморфна як група Лі матричній групі $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, де $n = \dim V$.*

Вправа 12.2. Чи вірне аналогічне твердження для простору над $\mathbb{C}$?

Означення 12.3. *Представленням групи Лі G* на скінченновимірному векторному просторі V над $\mathbb{R}$ зветься будь-який гомоморфізм груп Лі $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

Тобто представлення ρ групи Лі G – це її представлення як групи з додатковою умовою гладкості ρ.

Приклад 12.3. Тривіальне представлення довільної групи Лі на довільному скінченновимірному векторному просторі над $\mathbb{R}$ є представленням групи Лі, бо постійні відображення гладкі.

Приклад 12.4. Тавтологічне представлення будь-якої підгрупи Лі $G \subset \mathrm{GL}(V)$ є представленням групи Лі, бо це гомоморфізм включення $G \to \mathrm{GL}(V)$, що за означенням підгрупи Лі є зануренням, зокрема гладким.

Вправа 12.3. Показати, що $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ і $\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є підгрупами Лі $\mathrm{GL}(V)$ у випадку (скінченновимірного) евклідового $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Показати, що $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ізоморфна $\mathrm{O}(n)$ як група Лі, де $n = \dim V$. Обрати цей ізоморфізм так, що $\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ переходить у $\mathrm{SO}(n)$.

Попередня вправа демонструє, зокрема, що $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ складається з двох дифеоморфних зв'язних компонент, і що її компонента одиниці $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)^0 = \mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ в силу твердження 4.1 і того, що ізоморфізм груп Лі є дифеоморфізмом.

Приклад 12.5. Відображення ρ, що побудоване у прикладі 4.9, є представленням групи Лі $S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ на тривимірному просторі $\Im\mathbb{H}$. Це демонструється аналогічно до наслідку 4.5. Хоча у формулюванні цього наслідку йдеться про відображення у групу матриць, з тих же міркувань випливає, що й відображення $\rho\colon S^3 \to \mathrm{GL}(\Im\mathbb{H})$ (а точніше $\rho\colon S^3 \to \mathrm{SO}(\Im\mathbb{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, див. попередню вправу) є гомоморфізмом груп Лі.

Означення 12.4. Представлення групи Лі називають *точним*, якщо воно є ізоморфізмом груп Лі на свій образ.

Таким чином, щоб для представлення $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ групи Лі G на просторі V виконувалась умова цього означення, образ $\rho(G)$ повинен бути групою Лі (у наступному розділі ми покажемо, що це завжди так, бо образ будь-якого гомоморфізма груп Лі є підгрупою Лі області значень), а $\rho\colon G \to \rho(G)$ – дифеоморфізмом (зокрема, ρ повинне бути ін'єкцією). Це еквівалентно тому, що ρ – ін'єктивне занурення (перевірте це). Тому, наприклад, тавтологічні представлення підгруп Лі $G \subset \mathrm{GL}(V)$ є точними. З іншого боку, представлення з прикладу 12.5 неточне, бо не є ін'єктивним (див. пункт 2. вправи 4.7).

Нехай тепер G – деяка група Лі, $\mathfrak{g} = T_e G$ – її алгебра Лі. В силу твердження 3.1 внутрішній автоморфізм $C_a\colon G \to G\colon b \mapsto aba^{-1}$ для довільного $a \in G$ є ізоморфізмом груп Лі, зокрема дифеоморфізмом, і $C_a e = e$. Тому його диференціал в одиниці $d_e C_a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ є невиродженим оператором: $d_e C_a \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

Твердження 12.1. *Відображення*

$$Ad\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})\colon a \mapsto Ad_a \coloneqq d_e C_a$$

є представленням групи Лі G на її алгебрі Лі $\mathfrak{g} = T_e G$.

Доведення. Перш за все зауважимо, що для будь-яких $a, b, d \in G$

$$C_a(C_b\, d) = a(bdb^{-1})a^{-1} = (ab)d(ab)^{-1} = C_{ab}\, d,$$

отже $C_a \circ C_b = C_{ab}$. Звідси за ланцюговим правилом маємо

$$Ad_{ab} = d_e C_{ab} = d_e(C_a \circ C_b) = d_e C_a \circ d_e C_b = Ad_a \circ Ad_b$$

для усіх $a, b \in G$, тобто Ad є гомоморфізмом груп.

З гладкості відображень добутку μ і взяття оберненого ι випливає, що й відображення $G \times G \to G\colon (a, b) \mapsto aba^{-1} = C_a b$ є гладким, тобто локальні координати $C_a b$ гладко залежать від координат a і b (для будь-якого вибору локальних координат). Тому компоненти матриці Якобі C_a в одиниці e у відповідному базисі, що є частковими похідними координатних функцій $C_a b$ за координатами b, теж гладко залежать від координат a. Вони, у свою чергу, є локальними координатами $Ad_a = d_e C_a$ у $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (чому?). Таким чином, Ad гладке й тому дійсно є представленням групи Лі.

■

Означення 12.5. Представлення Ad зветься *приєднаним представленням групи Лі G.*

Приклад 12.6. Для матричної групи Лі $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (або $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) вираз $C_A B = ABA^{-1}$ для кожної $A \in G$ є лінійним за компонентами $B \in G$, тому аналогічно до прикладу 6.1 отримуємо, що диференціал C_A в одиниці має такий же вигляд: $Ad_A x = d_I C_A(x) = AxA^{-1}$ для будь-яких $A \in G$ і $x \in \mathfrak{g}$.

Повернемося тепер до випадку довільного векторного простору V над полем $\mathbb{F}$ і до простору $\mathrm{End}(V)$ лінійних операторів $V \to V$. Операція композиції операторів $\circ\colon \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ є білінійною (перевірте) і асоціативною. Таким чином, $\mathrm{End}(V)$ з цією операцією є асоціативною алгеброю з одиницею id над $\mathbb{F}$. У випадку скінченної вимірності $\dim V = n$ вона ізоморфна алгебрі матриць $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ з прикладу 10.4. Відповідність знову ж задається записуванням матриці оператора у якомусь базисі і є ізоморфізмом, бо композиції операторів відповідає добуток матриць. Алгебру Лі, що асоційована з $\mathrm{End}(V)$ (див. приклад 11.2 і означення 11.6), будемо позначати через $\mathfrak{gl}(V)$. Таким чином, $\mathfrak{gl}(V)$ – це $\mathrm{End}(V)$ з операцією *операторного комутатора* $[x, y] = x \circ y - y \circ x$, і це алгебра Лі над $\mathbb{F}$. При $\dim V = n$ вона ізоморфна $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ (що, нагадаємо, є алгеброю Лі, асоційованою з $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$).

Означення 12.6. *Представленням алгебри Лі* $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ на векторному просторі V над $\mathbb{F}$ зветься будь-який гомоморфізм алгебр Лі $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Простір V при цьому зветься *простором* цього представлення (або $\mathfrak{g}$-*модулем*), $\dim V$ – його *вимірністю*, $\rho(x)$ для $x \in \mathfrak{g}$ – його *операторами.* Ін'єктивне представлення алгебри Лі зветься *точним.*

Таким чином, ρ ставить у відповідність $x \in \mathfrak{g}$ лінійний оператор $\rho(x)\colon V \to V$ (вже не обов'язково невироджений) лінійним чином, тобто вираз $\rho(x)(v)$ лінійно залежить від обох своїх аргументів:

$$\rho(\lambda x + \mu y)(v) = \lambda \rho(x)(v) + \mu \rho(y)(v), \ \rho(x)(\lambda v + \mu w) = \lambda \rho(x)(v) + \mu \rho(x)(w)$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$, $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Крім того, ρ зберігає дужку Лі:

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x),$$

тобто

$$\rho([x, y])(v) = \rho(x)(\rho(y)(v)) - \rho(y)(\rho(x)(v)) \tag{12.1}$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. При цьому точне представлення алгебри Лі є ізоморфізмом алгебр Лі на свій образ $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ (чому?).

Приклад 12.7. *Тривіальним представленням* довільної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ на довільному векторному просторі V над тим же полем називають нульове відображення: $\rho(x)(v) = 0$ для будь-яких $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. Воно очевидним чином задовольняє наведеним вище умовам.

Приклад 12.8. *Тавтологічним представленням* деякої підалгебри Лі $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ на V називають відображення включення: $\rho\colon x \mapsto x$ для кожного $x \in \mathfrak{g}$. Те, що це гомоморфізм алгебр Лі, випливає з того, що $\mathfrak{g}$ – підалгебра Лі (перевірте це). Зокрема, всі такі представлення є точними.

Як і представлення груп, представлення довільних алгебр Лі є самостійним предметом вивчення, див. [15] та [19, с. 134-177]. Окремий інтерес становлять нескінченновимірні представлення. А ми знову повернемося до теорії Лі.

Якщо простір V над полем $\mathbb{R}$ має скінченну вимірність $\dim V = n$, то, як зазначалося вище, $\mathfrak{gl}(V) \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, що є алгеброю Лі групи Лі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. З іншого боку, оскільки група Лі $\mathrm{GL}(V)$ є відкритою підмножиною простору $\mathrm{End}(V)$, її дотичні простори ототожнюються з $\mathrm{End}(V)$. Більш того, дотичні простори підгруп Лі $\mathrm{GL}(V)$ можна ототожнювати з підпросторами $\mathrm{End}(V)$ так само, як це робилося у розділі 5 для матричних груп. Зокрема, $T_{id}\mathrm{GL}(V) = \mathrm{End}(V)$. Повторюючи міркування для матричних груп з прикладів 6.1, 7.1 і 8.1, отримаємо наступне.

Вправа 12.4. Показати, що експоненційне відображення групи Лі $\mathrm{GL}(V)$ являє собою операторну експоненту:

$$\exp x = e^x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$$

для будь-якого $x \in \mathrm{End}(V)$, де $x^0 := id$ і $x^n := \underbrace{x \circ \ldots \circ x}_{n}$ для натуральних n (пор. з формулою (5.2); див. дослідження властивостей таких експонент у [1, с. 160-184] або у [30, с. 74-76]). Вивести з цього, що дужкою Лі $\mathrm{GL}(V)$ є операторний комутатор: $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ для усіх $x, y \in \mathrm{End}(V)$.

Наслідок 12.2. *Алгеброю Лі групи Лі* $\mathrm{GL}(V)$ *є* $\mathfrak{gl}(V)$.

Вправа 12.5. Перевірити, що аналогічні твердження вірні й для будь-якої підгрупи Лі $G \subset \mathrm{GL}(V)$. Чи вірні відповідні твердження для простору над $\mathbb{C}$?

Вправа 12.6. Описати алгебри Лі груп Лі $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ і $\mathrm{SO}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ з вправи 12.3 (використати операторний аналог формули (5.1)).

Твердження 12.2. *Для будь-якого представлення* $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ *групи Лі* G *його диференціал в одиниці* $d_e\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *є представленням її алгебри Лі* $\mathfrak{g} = T_eG$ *на тому ж просторі* V*, точним, якщо* ρ *точне.*

Доведення. Це випливає з попереднього наслідку та наслідку 11.2: диференціал у одиниці представлення G, тобто гомоморфізма груп Лі $G \to \mathrm{GL}(V)$ повинен бути гомоморфізмом алгебр Лі $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, тобто представленням $\mathfrak{g}$. Якщо ρ точне, то, як зазначалося після означення 12.4, воно є зануренням, а тому його диференціал у одиниці – лінійна ін'єкція, тобто точне представлення $\mathfrak{g}$.

$\blacksquare$

Приклад 12.9. Оскільки тривіальне представлення групи Лі є постійним відображенням, його диференціал в одиниці нульовий, тобто є тривіальним представленням алгебри Лі цієї групи Лі на тому ж просторі.

Приклад 12.10. Диференціалом у одиниці тавтологічного представлення будь-якої підгрупи Лі $G \subset \mathrm{GL}(V)$, тобто гомоморфізма включення $G \to \mathrm{GL}(V)$, є гомоморфізм включення $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, якщо ототожнити $\mathfrak{g} = T_{id}G$ з підпростором $\mathrm{End}(V) = \mathfrak{gl}(V) = T_{id}\mathrm{GL}(V)$ як для матричних груп Лі у розділі 5 (перевірте це; див. також міркування на початку наступного розділу). Таким чином, цей дифеоморфізм є тавтологічним представленням $\mathfrak{g}$. Зокрема, ці представлення точні.

При цьому диференціал неточного представлення може бути точним, як демонструє наступна вправа.

Вправа 12.7. Яке представлення алгебри Лі є диференціалом у одиниці представлення ρ з прикладу 12.5? Перевірити, що воно точне. Пор. з вправою 11.5.

Означення 12.7. *Приєднаним представленням алгебри Лі* $\mathfrak{g} = T_eG$ групи Лі G зветься диференціал в одиниці приєднаного представлення G: $ad \coloneqq d_eAd\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Таким чином, це представлення $\mathfrak{g}$ на собі. Далі будемо позначати $ad_x \coloneqq ad(x) = d_eAd(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Твердження 12.3. *Приєднане представлення алгебри Лі* $\mathfrak{g} = T_eG$ *групи Лі* G *пов'язане з її дужкою Лі наступним чином:*

$$ad_x y = [x, y]$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$.

Доведення. Застосуємо до гомоморфізма груп Лі $Ad\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ і його диференціала в одиниці $ad\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ твердження 7.3:

$$Ad \circ \exp_G = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})} \circ\, ad.$$

Тут використали позначення для експоненційних відображень як у формулюванні твердження 7.3, а далі позначатимемо $\exp = \exp_G$. Іншими словами, діаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "ad"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}"] \\ G \arrow[r, "Ad"] & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

є комутативною. Відображення $\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}$ задається операторною експонентою в силу вправи 12.4. Тобто для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$ маємо

$$e^{ad_x}y = Ad_{\exp x}y = d_e C_{\exp x}(y) = (C_{\exp x} \exp ty)'_t(0) =$$

$$= \left(\exp x \exp ty (\exp x)^{-1}\right)'_t(0) = (\exp x \exp ty \exp -x)'_t(0)$$

за описом диференціала у термінах дотичних векторів кривих, бо в силу твердження 7.1 інтегральна траєкторія $\gamma_y \colon t \mapsto \exp ty$ проходить при $t = 0$ через e у напрямку y. Далі вважаємо, що x знаходиться у достатньо малому відкритому околі нуля в $\mathfrak{g}$ і параметр t достатньо малий для того, щоб ці вирази задовольняли умови застосування формули (8.1). Застосуємо її послідовно двічі:

$$e^{ad_x}y = \left(\exp\left(x + ty + \frac{1}{2}[x, ty] + R_3(x, ty)\right) \exp -x\right)'_t(0) =$$

$$= \left(\exp\left(x + ty + \frac{t}{2}[x, y] - x + \frac{1}{2}[x + ty, -x] + H(x, y, t)\right)\right)'_t(0) =$$

$$= \left(\exp\left(ty + t[x, y] + H(x, y, t)\right)\right)'_t(0),$$

де сума порядків залишкового члена $H(x, y, t)$ за координатами x при $x \to 0$ і за t при $t \to 0$ не менша за 3 (також використали тут антикомутативність дужки Лі). При цьому $H(x, y, 0) = 0$, оскільки, як було встановлено у розділі 8, $R_3(x, 0) = 0$, тому вираз під експонентою переводить 0 у 0:

$$e^{ad_x}y = d_0 \exp\left(y + [x, y] + H'_t(x, y, 0)\right) = y + [x, y] + H'_t(x, y, 0),$$

причому $H'_t(x, y, 0)$ має за координатами x порядок $\geqslant 2$. З іншого боку, ця операторна експонента має вигляд

$$e^{ad_x}y = y + ad_x y + \frac{1}{2}(ad_x)^2 y + \ldots,$$

де трикрапка позначає суму членів порядку $\geqslant 3$ за координатами x. Порівняємо члени першого порядку за цими координатами: $ad_x y = [x, y]$.

Це виконується для усіх $y \in \mathfrak{g}$ і x з деякого відкритого околу нуля в $\mathfrak{g}$, а отже й для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$ в силу білінійності обох частин цієї рівності (зокрема, $(x, y) \mapsto ad_x y$ є білінійним, бо ad – представлення алгебри Лі). ■

В силу цього твердження приєднане представлення алгебри Лі можна інтерпретувати як ще один спосіб обчислення дужки Лі крім тих, що були описані у розділах 8 та 9 (бо у його конструкції сама дужка Лі ніде не використовується).

Вправа 12.8. Вивести формулу для дужки Лі матричної групи Лі $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (або $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) з прикладу 8.1, тобто те, що вона є матричним комутатором, безпосередньо з опису приєднаного представлення такої групи у прикладі 12.6.

Помітимо також, що в силу твердження 12.3 умова (12.1) гомоморфності представлення алгебри Лі у випадку приєднаного представлення ad набуває вигляду

$$[[x, y], z] = ad_{[x,y]}z = ad_x ad_y z - ad_y ad_x z = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{g}$, що з урахуванням антикомутативності дужки Лі є просто тотожністю Якобі

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Таким чином, ми отримали ще один спосіб доведення наслідку 9.2. Більш того, це спостереження можна використати для того, щоб узагальнити приєднане представлення на довільні алгебри Лі.

Означення 12.8. *Приєднаним представленням алгебри Лі* $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ зветься відображення $ad\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, що визначене умовою $ad_x y := [x, y]$ для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$.

В силу білінійності дужки Лі, тотожності Якобі та попереднього зауваження усі умови означення 12.6 виконані, тобто це дійсно представлення $\mathfrak{g}$ на собі, що узагальнює приєднане представлення алгебри Лі групи Лі за твердженням 12.3. Воно, зокрема, грає ключову роль у побудові структурної теорії дійсних та комплексних алгебр Лі, див [15], [16] або [19], а також посилання наприкінці розділу 20.

13 Зв'язок між підгрупами Лі та підалгебрами Лі

У цьому та наступних двох розділах ми будемо розглядати основні результати теорії Лі, що пов'язують структури на групах Лі та їхніх алгебрах Лі. Зокрема, у даному розділі зібрані факти, що стосуються підгруп та підалгебр Лі.

Нехай G – група Лі, а $H \subset G$ – її підгрупа Лі. За означенням, тоді H – група Лі, підгрупа та підмноговид у G, зокрема, відображення включення $i\colon H \to G\colon a \mapsto a$ є зануренням. Тому для будь-якого $a \in H$ його диференціал $d_a i\colon T_a H \to d_a i(T_a H) \subset T_a G$ є лінійним ізоморфізмом на свій образ. Далі будемо за допомогою цього ізоморфізма ототожнювати $T_a H$ з $d_a i(T_a H)$ і вважати таким чином, що $T_a H \subset T_a G$. Крім того, зауважимо, що для будь-якого гладкого відображення $F\colon G \to G$ такого, що $F(H) \subset H$, його обмеження $F|_H$ є гладким відображенням $H \to H$, а диференціали цього обмеження збігаються з обмеженнями диференціалів F: $d_a(F|_H) = (d_a F)|_{T_a H}$ для будь-якого $a \in H$ (перевірте це, використавши опис диференціалів через дію на дотичні вектори кривих; ми вже використовували цей факт у міркуваннях прикладу 6.1). Зокрема, оскільки H є підгрупою, це так для лівого зсуву: $L_a(H) \subset H$ для будь-якого $a \in H$. При цьому $L_a|_H\colon H \to H$ є відображенням лівого зсуву H, а отже дифеоморфізмом H на себе в силу твердження 3.1. Тому $d_b L_a\colon T_b H \to T_{ab} H$ є лінійним ізоморфізмом для усіх $a, b \in H$. Зокрема, $T_a H = d_e L_a(T_e H)$ для будь-якого $a \in H$.

Твердження 13.1. *Нехай G – група Лі, $H \subset G$ – її підгрупа Лі, $\mathfrak{h} \coloneqq T_e H \subset T_e G = \mathfrak{g}$ – дотичний підпростір H у одиниці,* $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ *– експоненційне відображення G. Тоді*

1. $\exp tx \in H$ *для будь-яких $x \in \mathfrak{h}$, $t \in \mathbb{R}$;*

2. $\mathfrak{h}$ *є підалгеброю Лі в алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ групи G;*

3. *якщо H – нормальна підгрупа G, то $\mathfrak{h}$ – ідеал $\mathfrak{g}$.*

Доведення.

1. Для кожного $x \in \mathfrak{h}$ в силу твердження 7.1 крива $t \mapsto \exp tx$ є інтегральною траєкторією лівоінваріантного поля X_x на G, що проходить через e при $t = 0$. З іншого боку, обмеження $X_x|_H$ є лівоінваріантним полем на групі Лі H, що відповідає вектору $x \in \mathfrak{h} = T_e H$:

$$X_x(a) = d_e L_a(x) = (d_e L_a)|_{\mathfrak{h}}(x) = d_e(L_a|_H)(x) \in d_e L_a(\mathfrak{h}) = T_a H$$

для кожного $a \in H$ в силу міркувань вище. Нехай γ_x – інтегральна траєкторія цього поля в групі Лі H така, що $\gamma_x(0) = e$. Тоді вона ж (точніше, композиція $i \circ \gamma_x$) буде й інтегральною траєкторією поля X_x у G:

$$(i \circ \gamma_x)'(t) = d_{\gamma_x(t)} i(\gamma_x'(t)) = d_{\gamma_x(t)} i(X_x|_H(\gamma_x(t))) =$$

$$= X_x(\gamma_x(t)) = X_x(i \circ \gamma_x(t))$$

для кожного $t \in \mathbb{R}$ в силу зроблених на початку цього розділу ототожнень дотичних підпросторів. Тоді $\gamma_x(t) = \exp tx$ в силу єдиності інтегральних траєкторій у G, а отже $\exp tx \in H$ для усіх t.

2. Для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$ згідно з наслідком 9.1 (переформульованим у термінах експоненційного відображення) $[x, y] = \gamma'(+0)$, де

$$\gamma(t) \coloneqq \exp \sqrt{t}x \exp \sqrt{t}y \exp -\sqrt{t}x \exp -\sqrt{t}y$$

для $t \in \mathbb{R}_+$. При цьому для усіх $x, y \in \mathfrak{h}$ і $t \geqslant 0$ усі множники у формулі для $\gamma(t)$ належать до H в силу попереднього пункту. Тоді й $\gamma(t) \in H$ для будь-якого $t \geqslant 0$, бо H – підгрупа, а отже $[x, y] = \gamma'(+0) \in T_{\gamma(0)}H = T_eH = \mathfrak{h}$, що й потрібно було показати.

3. Аналогічним чином, якщо підгрупа H є нормальною, то в силу пункту 1. та означення нормальної підгрупи результат спряження

$$\exp \sqrt{t}x \exp \sqrt{t}y \exp -\sqrt{t}x = C_{\exp \sqrt{t}x} \exp \sqrt{t}y \in H$$

для будь-яких $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$ і $t \in \mathbb{R}_+$. Тому знову ж $\gamma(t) \in H$ для усіх $t \geqslant 0$ (бо $\exp -\sqrt{t}y \in H$, а H – підгрупа), отже $[x, y] \in \mathfrak{h}$. Таким чином, підпростір $\mathfrak{h}$ дійсно є ідеалом $\mathfrak{g}$.

■

З пункту 1. маємо, що $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$. Крім того, з його доведення випливає, що для кожного $x \in \mathfrak{h}$ відповідне йому лівоінваріантне поле на H та його інтегральна траєкторія γ_x є обмеженням на H поля X_x на G та інтегральною траєкторією X_x відповідно. Тому для експоненційного відображення групи Лі H за означенням маємо $\exp_H x = \gamma_x(1) = \exp x$. Таким чином, $\exp_H = \exp|_{\mathfrak{h}}$.

Наслідок 13.1. *Будь-яке лівоінваріантне векторне поле на підгрупі Лі $H \subset G$ є обмеженням на H лівоінваріантного векторного поля на групі Лі G з тим же значенням у e. Експоненційне відображення H є обмеженням на $\mathfrak{h} = T_eH \subset \mathfrak{g}$ експоненційного відображення G.*

Твердження пункту 2. також можна вивести наступним способом. Оскільки H є групою Лі, на $\mathfrak{h} = T_eH$ задана її дужка Лі $[\cdot,\cdot]^*\colon \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$. Нехай, як і раніше, $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – дужка Лі G. Оскільки $H \subset G$ – підгрупа Лі, включення $i\colon H \to G$ є гомоморфізмом груп Лі (бо це гомоморфізм груп і занурення), тому $d_ei\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ – гомоморфізм алгебр Лі за наслідком 11.2. Таким чином, з урахуванням зроблених на початку розділу ототожнень маємо $[x, y] = d_e i([x, y]^*) = [x, y]^* \in \mathfrak{h}$ для усіх $x, y \in \mathfrak{h}$. Це й означає, що $\mathfrak{h}$ – підалгебра Лі $\mathfrak{g}$. Крім того, ми таким чином показали, що $[\cdot, \cdot]^*$ є обмеженням $[\cdot, \cdot]$ на $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$.

Наслідок 13.2. *Алгеброю Лі підгрупи Лі $H \subset G$ є підпростір $\mathfrak{h} = T_e H \subset \mathfrak{g}$ з обмеженням $[\cdot, \cdot]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ дужки Лі групи Лі G.*

Приклад 13.1. Для матричної групи Лі $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (або $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) в силу попереднього наслідку дужкою Лі є обмеження на $\mathfrak{g} = T_I G \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (відповідно, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$) дужки Лі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ($\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$), тобто матричного комутатора, що пояснює, чому саме цей комутатор не виводить за межі $\mathfrak{g}$. Втім, ми вже перевірили це безпосередньо для усіх матричних груп Лі в прикладі 8.1. Аналогічним чином, дужкою Лі будь-якої підгрупи Лі $G \subset \mathrm{GL}(V)$, де V – скінченновимірний простір над $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$), є операторний комутатор в силу вправи 12.4 і попереднього наслідку.

Щоб навчитися здійснювати обернену операцію, тобто будувати підгрупи Лі за підалгебрами Лі, нам знадобиться коротке знайомство з технікою інтегрування розподілів, що є багатовимірним аналогом інтегрування векторних полів. Детальніше про це див., наприклад, [39, с. 247-254] або [47, с. 56-65].

Означення 13.1. Нехай M – гладкий многовид, $m \leqslant \dim M$ – натуральне число. Тоді *m-вимірним розподілом* на M зветься будь-яке відображення D, що ставить у відповідність кожній точці $p \in M$ m-вимірний векторний підпростір $D(p) \subset T_p M$. Розподіл D на M зветься *гладким*, якщо для будь-якої $p \in M$ існує відкрита $U \ni p$ та гладкі векторні поля $X_1, \ldots, X_m$ на U такі, що для кожної $q \in U$ набір векторів $\{X_1(q), \ldots, X_m(q)\}$ є базисом $D(q)$ (у цьому випадку $\{X_1, \ldots, X_m\}$ називають *локальним базисом* розподілу D на U).

Розподіл D є відображенням у *грассманове розшарування* $G_m TM := \bigcup\limits_{p \in M} G_m T_p M$, де $G_m T_p M$ позначає множину (*грассманіан*) m-вимірних векторних підпросторів у $T_p M$. Виявляється (ми ще повернемося до цього питання у даному курсі, див. приклади 22.10 і 23.1), що грассманіани $G_m T_p M$ є (попарно дифеоморфними) гладкими многовидами. Тоді й на $G_m TM$ вводиться структура гладкого многовида способом, що аналогічний до її побудови на дотичному розшаруванні TM. При цьому можна показати, що гладкість D як відображення гладких многовидів $M \to G_m TM$ еквівалентна гладкості з попереднього означення.

Теорема 13.1 (Фробеніус)**.** *Нехай D – m-вимірний гладкий розподіл на гладкому многовиді M. Тоді наступні дві властивості D еквівалентні.*

- *Для будь-яких гладких векторних полів X і Y на M якщо $X(p) \in D(p)$ і $Y(p) \in D(p)$ для кожної $p \in M$, то $[X,Y](p) \in D(p)$ для кожної $p \in M$.*

- *Для будь-якої $p \in M$ існує єдиний зв'язний m-вимірний гладкий підмноговид $N \subset M$ такий, що $p \in N$, $T_qN = D(q)$ для кожної $q \in N$ (тобто N дотикається до D) і виконується умова максимальності: якщо $L \subset M$ – зв'язний підмноговид M, $p \in L$ і $T_qL \subset D(q)$ для кожної $q \in L$, то $L \subset N$ як підмноговид.*

Доведення. Див. [39, 249-254] або [47, с. 57-60, 63-65]. ■

Умови на векторні поля з першої властивості будемо далі коротко записувати $X \in D$, $Y \in D$, $[X,Y] \in D$ відповідно. Єдиність N випливає з максимальності: в силу цієї умови будь-які два такі підмноговиди повинні занурюватися один в одний, тобто це одна й та сама множина з тією самою гладкою структурою. У локальних координатах теорема Фробеніуса перетворюється на умову сумісності деякої системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, як показано у [47, с. 60-61].

Вправа 13.1. Показати, що для виконання першої властивості у формулюванні теореми 13.1 необхідно й достатньо, щоб вона була справедливою для елементів деякого локального базиса $\{X_1, \ldots, X_m\}$ розподілу D на деякому відкритому околі U кожної точки M, тобто щоб існували функції $\{f_{ij}^k\}_{i,j,k=1}^m \subset C^\infty(U)$ такі, що для будь-яких $i,j = \overline{1,m}$

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m f_{ij}^k X_k \in D$$

на U. Розв'язок можна знайти у доведенні теореми 13.2 нижче.

Означення 13.2. Якщо гладкий розподіл D задовольняє умовам теореми 13.1, він зветься *інтегровним.* Підмноговид $N \subset M$ з формулювання цієї теореми називають *максимальним інтегральним підмноговидом* D, а сукупність усіх таких підмноговидів – *інтегральним шаруванням* D.

Приклад 13.2. Усі одновимірні гладкі розподіли інтегровні. Дійсно, для будь-якого такого розподіла D і гладких полів $X, Y \in D$ в силу одновимірності в околі кожної точки M виконана умова $Y = fX$ або $X = fY$ для деякої локально визначеної гладкої функції f. В першому з цих випадків за властивостями дужки Лі векторних полів маємо

$$[X,Y] = [X, fX] = f[X,X] + X(f)X = X(f)X \in D,$$

де $X(f)$ позначає похідну f за напрямком поля X, і аналогічно в другому. Тому за теоремою 13.1 цей розподіл інтегровний. Задачу його інтегрування можна звести до інтегрування векторного поля, принаймні локально (як саме?).

Приклад 13.3. Нехай $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, усі дотичні простори якого, як зазвичай, ототожнюємо з $\mathbb{R}^n$. Визначимо $(n-1)$-вимірний розподіл (*гіперрозподіл*) D на M умовою $D(x^1, \ldots, x^n) \coloneqq (x^1, \ldots, x^n)^\perp$ для кожної $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, тобто це гіперплощина, що ортогональна радіусу-вектору точки $(x^1, \ldots, x^n)$. Тоді гіперсфери $S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$ з центрами в 0 усіх радіусів $r > 0$, очевидно, задовольняють означенню максимальних інтегральних підмноговидів (гіперповерхонь) D, тобто розподіл інтегровний.

Перевіримо гладкість розподілу і першу властивість у формулюванні теореми 13.1 для D при $n = 3$. Далі позначатимемо координати на $\mathbb{R}^3$ через (x, y, z). На відкритій підмножині $U \coloneqq \{(x, y, z) \mid y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ гладкі векторні поля $X \coloneqq -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ і $Y \coloneqq -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$ утворюють локальний базис D. Їхня дужка Лі дорівнює $[X, Y] = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} \in D$. Також помітимо, що $[X, Y] = \frac{z}{y}X + \frac{x}{y}Y$ на U, тобто ми отримали розкладення як в умові вправи 13.1.

Відкриті підмножини $\{(x, y, z) \mid x \neq 0\}$ і $\{(x, y, z) \mid z \neq 0\}$ утворюють разом з U відкрите покриття $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Тому, побудувавши на них локальні базиси аналогічно до U і підрахувавши дужки Лі їх елементів, ми пересвідчимося в силу вправи 13.1 у виконанні умов теореми 13.1 (також саме існування таких базисів демонструє гладкість розподілу згідно з означенням 13.1). Зробіть це. Ці міркування переносяться (як саме?) й на довільну вимірність.

Приклад 13.4. На $M = \mathbb{R}^3$ розглянемо т.зв. *стандартну контактну структуру* – двовимірний розподіл D, що задається умовою $D(x, y, z) \coloneqq \operatorname{span}\{X(x, y, z), Y(x, y, z)\}$ для кожної $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, де $X \coloneqq \frac{\partial}{\partial x}$ та $Y \coloneqq \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$. Іншими словами, гладкі векторні поля X та Y утворюють за побудовою глобальний базис D. Зокрема, цей розподіл гладкий. Оскільки $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z} \notin D$, D не задовольняє умову теореми 13.1, а отже неінтегровний. Більш того, це приклад *цілком неінтегровного* розподілу: значення полів X,Y і $[X, Y]$ у кожній точці M утворюють базис дотичного простору M у цій точці.

Тепер ми маємо можливість сформулювати та довести основну теорему цього розділу.

Теорема 13.2 (Існування та єдиність підгруп Лі)**.** *Нехай G – група Лі. Для кожної підалгебри Лі $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = T_eG$ алгебри Лі G існує єдина зв'язна* *підгрупа Лі $H \subset G$ така, що $T_eH = \mathfrak{h}$. Якщо до того ж $\mathfrak{h}$ – ідеал, а G зв'язна, то H нормальна.*

При цьому $\mathfrak{h}$ з обмеженням дужки Лі G буде алгеброю Лі H згідно з наслідком 13.2.

Доведення. Щоб довести існування H, побудуємо на G розподіл

$$D_{\mathfrak{h}} \colon a \in G \mapsto d_eL_a(\mathfrak{h}) \subset T_aG.$$

Оскільки, як зазначалося на початку розділу, $d_eL_a \colon \mathfrak{h} \to D_{\mathfrak{h}}(a)$ є лінійними ізоморфізмами для усіх $a \in G$, це дійсно m-вимірний розподіл, де $m := \dim \mathfrak{h}$. Нехай $\{e_1, \ldots, e_m\}$ – якийсь базис $\mathfrak{h}$. Тоді для кожної $a \in G$ вектори $\{X_{e_1}(a) = d_eL_a(e_1), \ldots, X_{e_m}(a) = d_eL_a(e_m)\}$ є базисом $D_{\mathfrak{h}}(a)$ також в силу лінійної ізоморфності d_eL_a (пор. з міркуваннями перед наслідком 6.2). Це означає, що гладкі поля $\{X_{e_1}, \ldots, X_{e_m}\}$ утворюють глобальний базис $D_{\mathfrak{h}}$ на G. Тому цей розподіл гладкий. Перевіримо умову інтегровності з теореми 13.1 Фробеніуса. Оскільки $\{X_{e_1}, \ldots, X_{e_m}\}$ – глобальний базис $D_{\mathfrak{h}}$, будь-які поля $X, Y \in D_{\mathfrak{h}}$ мають вигляд $X = \sum\limits_{i=1}^{m} f^i X_{e_i}$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} g^i X_{e_i}$ для деяких гладких функцій $f^1, \ldots, f^m, g^1, \ldots, g^m \in C^\infty(G)$. Тоді з властивостей дужки Лі векторних полів та твердження 9.1 маємо наступне (тут через $X_{e_i}(g^j)$ і $X_{e_j}(f^i)$ позначені диференціювання функцій за напрямками векторних полів):

$$[X, Y] = \left[\sum_{i=1}^{m} f^i X_{e_i}, \sum_{j=1}^{m} g^j X_{e_j}\right] = \sum_{i,j=1}^{m} f^i X_{e_i}(g^j) X_{e_j} - g^j X_{e_j}(f^i) X_{e_i} +$$

$$+ f^i g^j [X_{e_i}, X_{e_j}] = \sum_{i,j=1}^{m} f^i X_{e_i}(g^j) X_{e_j} - g^j X_{e_j}(f^i) X_{e_i} + f^i g^j X_{[e_i, e_j]} \in D_{\mathfrak{h}},$$

бо $\mathfrak{h}$ – підалгебра Лі, а отже $[e_i, e_j] \in \mathfrak{h}$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$. Таким чином, розподіл $D_{\mathfrak{h}}$ дійсно є інтегровним. Нехай $H \subset G$ – його максимальний інтегральний підмноговид такий, що $e \in H$. Тоді він зв'язний, і $T_aH = D_{\mathfrak{h}}(a) = d_eL_a(\mathfrak{h})$ для кожного $a \in H$, зокрема $T_eH = \mathfrak{h}$.

Покажемо, що H – підгрупа G. Для будь-яких $a, b \in H$ в силу (лінійної) зв'язності H існують шляхи, що сполучають e з цими елементами, тобто неперервні відображення $\gamma, \mu \colon [0, 1] \to H$ такі, що $\gamma(0) = \mu(0) = e$, $\gamma(1) = a$, $\mu(1) = b$. Більш того, з гладкості H випливає, що їх можна вважати гладкими (за необхідності застосуємо до γ і μ технику згладжування, тобто апроксимації неперервних відображень гладкими; див., наприклад, [17, с. 48-80]). Тоді $\nu(t) \coloneqq a\mu(t) = L_a\mu(t)$ для $t \in [0,1]$ теж задає гладкий шлях $\nu\colon [0,1] \to G$ (бо це композиція гладких відображень), причому $\nu(0) = a\mu(0) = ae = a \in H$ і

$$\nu'(t) = d_{\mu(t)}L_a(\mu'(t)) \in d_{\mu(t)}L_a(T_{\mu(t)}H) = d_{\mu(t)}L_a(D_{\mathfrak{h}}(\mu(t))) =$$

$$= d_{\mu(t)}L_a \circ d_eL_{\mu(t)}(\mathfrak{h}) = d_e(L_a \circ L_{\mu(t)})(\mathfrak{h}) = d_eL_{a\mu(t)}(\mathfrak{h}) = D_{\mathfrak{h}}(\nu(t))$$

для усіх $t \in [0,1]$ за означенням інтегрального многовида. Тоді $\nu(t) \in H$ для будь-якого $t \in [0,1]$. Це можна вивести з максимальності H, узагальнивши її на гладкі шляхи, або перевірити безпосередньо (зробіть це, скажімо, використавши локальні координати як у [39, с. 250]). Зокрема, $ab = a\mu(1) = \nu(1) \in H$. Аналогічним чином визначимо гладкий шлях $\eta\colon [0,1] \to G$ умовою $\eta(t) \coloneqq a^{-1}\gamma(1-t)$, $t \in [0,1]$, для якого $\eta(0) = a^{-1}\gamma(1) = a^{-1}a = e \in H$ і так само, як для ν, встановлюється, що $\eta'(t) \in D_{\mathfrak{h}}(\eta(t))$ для усіх t, а отже $\eta([0,1]) \subset H$, зокрема, $a^{-1} = a^{-1}e = a^{-1}\gamma(0) = \eta(1) \in H$. Таким чином, H – дійсно підгрупа. Оскільки це ще й гладкий підмноговид G, а відображення добутку та взяття оберненого H є обмеженнями на $H \times H$ і H відповідних гладких відображень групи G, ці відображення гладкі (див. обговорення на початку розділу). Отже H є групою Лі та підгрупою Лі G.

Єдиність H можна було б вивести з єдиності інтегрального многовиду в теоремі Фробеніуса, бо будь-яка зв'язна підгрупа Лі $\widetilde{H}$ з $T_e\widetilde{H} = \mathfrak{h}$ містить e і дотикається до розподілу $D_{\mathfrak{h}}$: $T_a\widetilde{H} = d_eL_a(\mathfrak{h}) = D_{\mathfrak{h}}(a)$ для кожної $a \in \widetilde{H}$. Щоправда, для цього ще треба показати максимальність $\widetilde{H}$ (спробуйте це зробити). Ми використаємо тут інший спосіб доведення. Нехай H і $\widetilde{H}$ – зв'язні підгрупи Лі G такі, що $T_eH = T_e\widetilde{H} = \mathfrak{h}$. З наслідку 13.1 випливає тоді, що їхні експоненційні відображення – це обмеження на $\mathfrak{h}$ експоненційного відображення G, і тому вони рівні: $\exp_H = \exp_{\widetilde{H}} = \exp|_{\mathfrak{h}}$. Згадаємо також, що експоненційне відображення є локальним дифеоморфізмом у околі нуля: існує відкрита $U \ni 0$ у (стандартній евклідовій топології) $\mathfrak{h}$ така, що $\exp\colon U \to \exp(U)$ – дифеоморфізм. Тоді $V \coloneqq \exp(U) \subset H \cap \widetilde{H}$ є відкритим околом e у топологіях H і $\widetilde{H}$. Оскільки ці групи Лі зв'язні, за пунктом <u>3.</u> теореми 3.1 маємо

$$H = H^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k = \widetilde{H}^0 = \widetilde{H},$$

тобто ці підгрупи збігаються (як підмножини). З цього і наступної вправи й буде випливати єдиність підгрупи Лі H.

Вправа 13.2. Показати, що топології підгруп Лі H і $\widetilde{H}$, а отже й їхні гладкі структури в силу вправи 2.4, збігаються. Підказка: побудувати бази цих топологій за допомогою околу одиниці V. Див. доведення теореми 13.3 нижче.

Нарешті, нехай $\mathfrak{h}$ – ідеал, а G зв'язна. З твердження 12.3 та означення ідеала випливає, що $ad_x y = [x,y] \in \mathfrak{h}$ для усіх $y \in \mathfrak{h}$, тобто $ad_x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$. Знову використаємо локальну дифеоморфність експоненційного відображення: $\exp\colon \exp^{-1}(W) \to W$ – дифеоморфізм для деякої відкритої $W \ni e$ в G (де, нагадаємо, через exp позначаємо дифеоморфне обмеження експоненційного відображення, як у доведенні твердження 7.4). Тепер скористаємося комутативністю діаграми

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}} \\ G & \xrightarrow{Ad} & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

з доведення твердження 12.3, тобто твердженням 7.3 для приєднаного представлення Ad. Отже, $Ad \circ \exp = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})} \circ ad$. Нагадаємо, що тут $\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}$ – це операторна експонента. Тоді для будь-яких $a \in W$, $y \in \mathfrak{h}$ маємо

$$Ad_a y = e^{ad_{\exp^{-1}(a)}} y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(ad_{\exp^{-1}(a)}\right)^i y \in \mathfrak{h},$$

бо за встановленим вище оператор приєднаного представлення $ad_{\exp^{-1}(a)}$ не виводить за межі $\mathfrak{h}$, отже композиція будь-якої кількості таких операторів також, а $\mathfrak{h}$ є замкненою підмножиною $\mathfrak{g}$, тому містить суму будь-якого збіжного ряду з елементів $\mathfrak{h}$. Тепер знову використаємо пункт <u>3.</u> теореми 3.1: оскільки G зв'язна, $G = G^0 = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} W^l$, тобто для будь-якого $a \in G$ існують $a_1, \ldots, a_l \in W$ такі, що $a = a_1 \ldots a_l$. Тоді $Ad_a = Ad_{a_1} \circ \ldots \circ Ad_{a_l}$ в силу гомоморфності Ad (твердження 12.1), тобто $Ad_a y = Ad_{a_1} \ldots Ad_{a_l} y \in \mathfrak{h}$ для будь-якого $y \in \mathfrak{h}$, бо за доведеним раніше усі Ad_{a_i} для $i = \overline{1,l}$ не виводять за межі $\mathfrak{h}$ (оскільки $a_i \in W$). Таким чином, $Ad_a(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ для будь-якого $a \in G$.

Тепер застосуємо твердження 7.3 до внутрішнього автоморфізма C_a для довільного $a \in G$. Отримаємо, що $C_a \circ \exp = \exp \circ Ad_a$, тобто що діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_a} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle\exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G & \xrightarrow{C_a} & G \end{array}$$

комутативна. Оскільки, як уже зазначалося, експоненційним відображенням H є $\exp|_{\mathfrak{h}}$, і це також локальний дифеоморфізм у околі нуля, обмеження $\exp\colon \exp^{-1}(V) \to V$ є дифеоморфізмом для деякої відкритої $V \ni e$ в H. Тоді маємо з комутативності вище $C_a b = \exp Ad_a \exp^{-1}(b) \in H$ для будь-якого $b \in V$, оскільки $\exp^{-1}(b) \in \mathfrak{h}$, отже за встановленим раніше $Ad_a \exp^{-1}(b) \in \mathfrak{h}$, і $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$. Нарешті, знову ж з пункту 3. теореми 3.1 та зв'язності H маємо $H = H^0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V^k$, тобто для кожного $b \in H$ існують такі $b_1, \ldots, b_k \in V$, що $b = b_1 \ldots b_k$. Тоді за гомоморфністю C_a (див. твердження 3.1), належностями $C_a b_i \in H$ для $i = \overline{1,k}$ (що випливають з доведеного вище, бо $b_i \in V$), і тим, що H – підгрупа, маємо

$$aba^{-1} = C_a b = C_a b_1 \ldots C_a b_k \in H,$$

для будь-яких $a \in G$, $b \in H$, що й означає нормальність H.

$\blacksquare$

Вправа 13.3. Чи можна довести пункт 3. твердження 13.1 за допомогою техніки останньої частини попереднього доведення?

Тепер ми нарешті можемо довести теорему Картана. Спочатку розглянемо допоміжну конструкцію, що буде корисною і в подальшому.

Лема 13.1. *Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g} = T_e G$ групи Лі G є прямою сумою двох своїх підпросторів: $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}$. Тоді існують відкриті (у відповідних евклідових топологіях) околи $U \ni 0$ у $\mathfrak{p}$ і $V \ni 0$ у $\mathfrak{q}$, а також відкритий окіл $W \ni e$ у G такі, що обмеження на $U \times V$ відображення*

$$\Phi\colon \mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q} \to G\colon x + y \mapsto \exp x \, \exp y,$$

де $x \in \mathfrak{p}$, $y \in \mathfrak{q}$, є дифеоморфізмом $U \times V$ на W.

Доведення. Оберемо базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ такий, що його підмножина $\{e_1, \ldots, e_m\}$ є базисом $\mathfrak{p}$, а $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ – базисом $\mathfrak{q}$. Тоді, розкладаючи довільний $x \in \mathfrak{g}$ у лінійну комбінацію $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$, ми можемо вважати $(x^1, \ldots, x^n)$ глобальними координатами на гладкому многовиді $\mathfrak{g}$ (зі стандартною евклідовою гладкою структурою). Оскільки експоненційне відображення exp групи G є локальним дифеоморфізмом у околі нуля, існує відкрита $\widetilde{W} \ni e$ у G така, що обмеження $\exp\colon \exp^{-1}(\widetilde{W}) \to \widetilde{W}$ – дифеоморфізм. Розкладемо прообраз кожного $a \in \widetilde{W}$ за введеним вище базисом: $\exp^{-1}(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i e_i$. Таким чином, можна вважати $(y^1, \ldots, y^n)$ локальними координатами G на $\widetilde{W}$ (відповідна карта узгоджена з гладкою структурою G, бо експоненційне відображення та лінійні операції гладкі). Це аналог нормальних координат з рімановой геометрії. Знайдемо тепер локальний вигляд відображення Φ у цих координатах. Для будь-якого $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i \in \exp^{-1}(\widetilde{W})$ маємо

$$\Phi(x) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{m} x^i e_i + \sum_{j=m+1}^{n} x^j e_j\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} x^i e_i\right) \exp\left(\sum_{j=m+1}^{n} x^j e_j\right).$$

Зменшуючи за необхідності $\widetilde{W}$, можемо вважати, що для цих аргументів виконується формула (8.1) добутку експонент:

$$\Phi(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} x^i x^j [e_i, e_j] + R_3\left(\sum_{i=1}^{m} x^i e_i, \sum_{j=m+1}^{n} x^j e_j\right)\right),$$

де використали білінійність дужки Лі. Розклавши вираз під експонентою за басисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, отримаємо координати $(y^1, \ldots, y^n)$ точки $\Phi(x)$. Нас будуть цікавити лише часткові похідні цих координат за координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ точки x при $x = 0$, тобто $x^1 = \ldots = x^n = 0$. З вигляду виразу під експонентою (і того, що залишковий член R_3 має за координатами $x^1, \ldots, x^n$ порядок $\geqslant 3$) випливає, що ці часткові похідні визначаються лінійними членами виразу, а саме $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(0, \ldots, 0) = \delta^i_j$, тобто 1 при $i = j$ і 0 при $i \neq j$. Таким чином, матриця Якобі Φ в 0 є одиничною, отже $d_0\Phi = id_{\mathfrak{g}}$. Це означає, що Φ також є локальним дифеоморфізмом у околі нуля, тобто існує відкрита $W \subset G$ така, що $e \in W \subset \widetilde{W}$ і обмеження $\Phi\colon \Phi^{-1}(W) \to W$ (у позначеннях, аналогічних до тих, що вище використовуємо для локального дифеоморфізма exp) – дифеоморфізм. Оскільки $\Phi^{-1}(W)$ тоді є відкритим околом 0 в $\mathfrak{g}$, а евклідова топологія $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}$ збігається з топологією прямого добутку, існують такі відкриті $U \ni 0$ і $V \ni 0$ у $\mathfrak{p}$ і $\mathfrak{q}$ відповідно, що $U \times V \subset \Phi^{-1}(W)$. Зменшивши за необхідності W, перетворимо це включення на рівність та отримаємо потрібні за умовою властивості Φ.

■

Теорема 13.3 (Картан). *Нехай G – група Лі. Якщо $H \subset G$ – підгрупа і замкнена підмножина G, то H – вкладена підгрупа Лі G. Зокрема, H є групою Лі.*

Доведення. Перш за все, побудуємо підмножину алгебри Лі $\mathfrak{g} = T_eG$ групи G, що виявиться алгеброю Лі нашої підгрупи. Мотивуючися пунктом 1. твердження 13.1, визначимо її наступним чином:

$$\mathfrak{h} \coloneqq \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R}\ \exp tx \in H\}. \tag{13.1}$$

Оскільки $\exp 0 = e \in H$, $0 \in \mathfrak{h}$. Більш того, $\lambda x \in \mathfrak{h}$ для будь-яких $x \in \mathfrak{h}$ і $\lambda \in \mathbb{R}$, оскільки $\exp t(\lambda x) \in H$ для усіх $t \in \mathbb{R}$ за (13.1). Нехай тепер $x, y \in \mathfrak{h}$. Для будь-яких $t \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ вираз $\left(\exp \frac{t}{k}x \exp \frac{t}{k}y\right)^k$ належить до H за (13.1) і тим, що H – підгрупа. З іншого боку, для достатньо великих k цей вираз можна переписати за формулою (8.1):

$$\left(\exp \frac{t}{k}x \exp \frac{t}{k}y\right)^k = \left(\exp\left(\frac{t}{k}x + \frac{t}{k}y + \frac{1}{2}\left[\frac{t}{k}x, \frac{t}{k}y\right] + R_3\left(\frac{t}{k}x, \frac{t}{k}y\right)\right)\right)^k =$$

$$= \exp\left(t(x+y) + \frac{t^2}{2k}[x,y] + kR_3\left(\frac{t}{k}x, \frac{t}{k}y\right)\right),$$

бо, ітеруючи формулу пункту 5. твердження 7.1, отримаємо $(\exp x)^k = \exp kx$ для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$ (перевірте, що це вірно для усіх $k \in \mathbb{Z}$). Оскільки H замкнена, границя послідовності цих виразів для фіксованих x, y і t також повинна лежати у H:

$$\exp t(x+y) = \lim_{k\to\infty} \left(\exp \frac{t}{k}x \exp \frac{t}{k}y\right)^k \in H,$$

де також використали неперервність відображення exp. Оскільки це вірно для будь-якого $t \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathfrak{h}$ за (13.1). Таким чином, $\mathfrak{h}$ є векторним підпростором $\mathfrak{g}$. Покажемо тепер аналогічним способом, що це підалгебра Лі. Використаємо для цього груповий комутатор, що виник у розділі 9. Для будь-яких $x, y \in \mathfrak{h}$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\exp \frac{t}{k}x \exp \frac{t}{k}y \exp -\frac{t}{k}x \exp -\frac{t}{k}y\right)^{k^2} \in H,$$

знову ж, бо H – підгрупа і за (13.1). Вважаючи k достатньо великим, за формулою (8.1) маємо, що цей вираз дорівнює

$$\left(\exp\left(\frac{t}{k}x + \frac{t}{k}y + \frac{1}{2}\left[\frac{t}{k}x, \frac{t}{k}y\right] + R_3\left(\frac{t}{k}x, \frac{t}{k}y\right)\right)\right.$$

$$\left.\exp\left(-\frac{t}{k}x - \frac{t}{k}y + \frac{1}{2}\left[-\frac{t}{k}x, -\frac{t}{k}y\right] + R_3\left(-\frac{t}{k}x, -\frac{t}{k}y\right)\right)\right)^{k^2} =$$

$$= \left(\exp\left(\frac{t}{k}(x+y) + \frac{t^2}{2k^2}[x,y] - \frac{t}{k}(x+y) + \frac{t^2}{2k^2}[x,y] +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{2}\left[\frac{t}{k}(x+y), -\frac{t}{k}(x+y)\right] + H(x,y,t,k)\right)\right)^{k^2} =$$

$$= \exp\left(t^2[x,y] + k^2 H(x,y,t,k)\right),$$

де залишковий член $H(x,y,t,k)$ має за k порядок $\leqslant -3$. Знову ж, із замкненості H і неперервності exp тоді маємо

$$\exp t^2[x,y] = \lim_{k\to\infty}\left(\exp\frac{t}{k}x\,\exp\frac{t}{k}y\,\exp-\frac{t}{k}x\,\exp-\frac{t}{k}y\right)^{k^2} \in H$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{h}$, $t \in \mathbb{R}$. Іншими словами, $\exp t[x,y] \in H$ для усіх $t \geqslant 0$. Застосувавши ті ж міркування до $-x$ і y ($-x \in \mathfrak{h}$, бо це векторний підпростір), отримаємо, що $\exp t[x,y] \in H$ також для усіх $t \leqslant 0$, отже $[x,y] \in \mathfrak{h}$ за (13.1). Тому $\mathfrak{h}$ дійсно є підалгеброю Лі $\mathfrak{g}$. За теоремою 13.2 тоді існує єдина зв'язна підгрупа Лі $H^* \subset G$ така, що її алгеброю Лі є $T_eH^* = \mathfrak{h}$. Зауважимо, що топологія H^*, яка при цьому виникає, апріорі не обов'язково є індукованою.

Оберемо якесь пряме доповнення $\mathfrak{l}$ до $\mathfrak{h}$ у $\mathfrak{g}$ (наприклад, можна ввести на $\mathfrak{g}$ евклідовий скалярний добуток і взяти ортогональне доповнення). Це, взагалі кажучи, не підадгебра Лі. Таким чином, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}$. Покажемо, що існує відкритий окіл $V \ni 0$ у $\mathfrak{l}$ такий, що $\exp x \notin H$ для будь-якого $x \in V\setminus\{0\}$. Припустимо, що це не так. Тоді можна побудувати (наприклад, з використанням евклідових куль радіусів $\frac{1}{k}$) послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{l}\setminus\{0\}$ таку, що вона збігається до 0 і $\exp x_k \in H$ для кожного k. Нехай $|\cdot|$ – якась евклідова норма на $\mathfrak{l}$. Тоді $\frac{x_k}{|x_k|}$ належить до одиничної евклідової гіперсфери $S := \{x \in \mathfrak{l} \mid |x| = 1\}$ простору $\mathfrak{l}$ для кожного k. Оскільки S компактна, у послідовності $\left\{\frac{x_k}{|x_k|}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ існує часткова границя $x \in S$, тобто, перейшовши за необхідності до підпослідовності, можемо вважати, що $\frac{x_k}{|x_k|} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Нехай тепер $t \in \mathbb{R}$. Оскільки $|x_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, існує послідовність цілих чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ така, що $\lambda_k|x_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} t$ (перевірте це). Тоді з неперервності експоненційного відображення маємо

$$\exp tx = \lim_{k\to\infty}\exp\lambda_k|x_k|\frac{x_k}{|x_k|} = \lim_{k\to\infty}(\exp x_k)^{\lambda_k} \in H,$$

бо усі $\exp x_k \in H$, а H – замкнена підгрупа. Тоді $x \in \mathfrak{h}$ за (13.1), але за побудовою $x \in S \subset \mathfrak{l} \setminus \{0\}$, що суперечить властивості прямої суми $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l} = \{0\}$. Це доводить існування околу V.

Оскільки $\exp\colon \mathfrak{h} \to H^*$ є локальним дифеоморфізмом у околі нуля (це експоненційне відображення групи Лі H^*, що є обмеженням експоненційного відображення G за наслідком 13.1), існує відкрита $U \ni 0$ у $\mathfrak{h}$ така, що $\exp\colon U \to \exp(U)$ є дифеоморфізмом. Зокрема, $\exp(U)$ буде тоді відкритим околом e у топології H^*. Далі, перетинаючи за необхідності відповідні околи, будемо вважати, що відкриті $U \ni 0$ у $\mathfrak{h}$ і $V \ni 0$ у $\mathfrak{l}$ задовольняють умовам з останніх двох абзаців і що вони крім того задовольняють твердженню леми 13.1 для прямої суми $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}$. Відкриту $W \ni e$ у G також візьмемо з цієї леми.

Введемо на H індуковану топологію. Тоді H є топологічною групою за наслідком 2.1. З (13.1) і $0 \in U \subset \mathfrak{h}$ випливає, що $e \in \exp(U) \subset H$. Покажемо, що $\exp(U)$ – відкрита підмножина H. Дійсно, $W = \Phi(U \times V)$ за лемою 13.1, тобто будь-який елемент $a \in W$ має вигляд $a = \Phi(x + y) = \exp x \exp y$ для деяких $x \in U$, $y \in V$. Оскільки, як щойно було показано, $\exp x \in H$, а H – підгрупа, цей a належить до перетину $W \cap H$ тоді й тільки тоді, коли $\exp y \in H$. За побудовою $V \ni y$ це можливе лише при $y = 0$, і в такому випадку $a = \exp x \exp 0 = \exp x\, e = \exp x$. Таким чином, $W \cap H = \Phi(U \times \{0\}) = \exp(U)$. Оскільки W відкрита в G, цей перетин дійсно є відкритою підмножиною в індукованій топології H. Зменшуючи за необхідності U (і відповідно W), ми можемо вважати його, а отже й $\exp(U)$, лінійно зв'язними. Тоді $\exp(U)$ буде відкритим околом e у компоненті одиниці H^0 топологічної групи H. Оскільки це так і для зв'язної підгрупи Лі H^*,

$$H^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \exp(U)^k = (H^*)^0 = H^*$$

за пунктом 3. теореми 3.1.

Отже, H^0 і H^* – це одна й та сама підгрупа. Покажемо тепер, що топології H^0 і H^* збігаються, тобто що топологія групи Лі H^* є індукованою. Аналогічно до випадку $W \cap H$ вище, для будь-якої відкритої $\widehat{W}$ у G такої, що $e \in \widehat{W} \subset W$, елемент $a = \exp x \exp y \in W$ належить до $\widehat{W} \cap H$ тоді й тільки тоді, коли $x \in \Phi^{-1}(\widehat{W}) \cap U$ і $y = 0$, тобто $\widehat{W} \cap H = \Phi(\Phi^{-1}(\widehat{W}) \cap U \times \{0\}) = \exp(\Phi^{-1}(\widehat{W}) \cap U)$. Оскільки $\Phi^{-1}(\widehat{W}) \cap U$ відкрита в U за неперервністю Φ, а $\exp\colon U \to \exp(U)$ – дифеоморфізм, $\widehat{W} \cap H$ відкрита в індукованій топології $\exp(U)$, а отже в H^*. Більш того, будь-яка відкрита підмножина $\exp(U)$ в топології H^*, що містить e, має такий вигляд (чому?). Також за побудовою індукованої топології $\widehat{W} \cap H$ відкрита в H^0, і будь-яка відкрита підмножина $W \cap H = \exp(U)$ в топології H^0, що містить e, має вигляд $\widehat{W} \cap H$. Таким чином,

$$\mathcal{B}_e \coloneqq \{\widehat{W} \cap H \mid e \in \widehat{W} \subset W,\, \widehat{W} \text{ відкрита}\}$$

є одночасно базою топологій H^0 і H^* у точці e, бо для будь-якої відкритої підмножини, що містить e, її перетин з $\exp(U)$ містить e, міститься у даній множині і має бути відкритою підмножиною $\exp(U)$, а отже належати до $\mathcal{B}_e$. Тоді, оскільки ліві зсуви є гомеоморфізмами для обох цих топологій за твердженням 3.1,

$$\mathcal{B} := \{L_a(\widehat{W} \cap H) \mid a \in H^0,\ e \in \widehat{W} \subset W,\ \widehat{W} \text{ відкрита}\}$$

є об'єднанням баз у всіх точках $a \in H^0$, а отже базою топологій H^0 і H^*. Наявність спільної бази й означає, що ці топології збігаються. Тоді гладка структура H^* буде і гладкою структурою H^0, відображення добутку і взяття оберненого – гладкими, а включення $i\colon H^0 \to G$ – зануренням. Розповсюдимо цю гладку структуру на всю підгрупу H. Якщо на $H^0 = H^*$ вона задається атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, то

$$\mathcal{A} := \{(L_a(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ L_{a^{-1}}) \mid a \in H,\ \alpha \in A\}$$

є атласом H, бо усі L_a для $a \in H$ є гомеоморфізмами. Відображення переходу $\mathcal{A}$ мають вигляд $\varphi_\alpha \circ L_{a^{-1}b} \circ \varphi_\beta^{-1}$ для $a, b \in H$, $\alpha, \beta \in A$. Зауважимо, що тут $L_{a^{-1}b}$ позначає обмеження $L_{a^{-1}b}\colon L_{b^{-1}a}(U_\alpha) \cap U_\beta \to U_\alpha \cap L_{a^{-1}b}(U_\beta)$ (якщо ці перетини непорожні), тобто цей зсув діє на відкритих підмножинах групи Лі $H^0 = H^*$, і тому є дифеоморфізмом за твердженням 3.1. Таким чином, відображення переходу $\mathcal{A}$ є гладкими як композиції гладких, тому цей атлас гладкий. На H^0 він задає ту ж гладку структуру, що й вихідний атлас (перевірте це). Визначимо атласом $\mathcal{A}$ гладку структуру на усій підгрупі H.

Вправа 13.4. Перевірити, що відносно цієї гладкої структури включення $i\colon H \to G$ є зануренням, тобто $H \subset G$ – підмноговид.

Тоді відображення добутку і взяття оберненого H будуть гладкими як обмеження гладких відображень на підмноговид, отже H – група Лі. Таким чином, вона дійсно є підгрупою Лі G, вкладеною, бо топологія індукована. Її алгебра Лі – це $T_eH = T_eH^0 = T_eH^* = \mathfrak{h}$ в силу наслідків 11.4 та 13.2. Зауважимо також, що побудована структура підгрупи Лі є єдиною можливою для індукованої топології за наслідком 2.2.

■

Останню частину попереднього доведення можна дещо спростити, розглядаючи окремо кожну компоненту H^1 лінійної зв'язності H. Фіксуємо якийсь елемент $a \in H^1$. Оскільки L_a є гомеоморфізмом H^0 і H^1 за пунктом 4. теореми 3.1, $\{(L_a(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ L_{a^{-1}}) \mid \alpha \in A\}$ є атласом H^1 з тими ж відображеннями переходу, що у вихідного атласа H^0, а отже задає гладку структуру на H^1. Таким чином і побудуємо гладку структуру H. Перевірте, що цей підхід дасть ту ж саму структуру, що й у доведенні.

Завершимо цей розділ з'ясуванням властивостей ядер та образів гомоморфізмів груп Лі. Згадаємо, що ядро $\operatorname{Ker}\Phi := \{a \in G \mid \Phi(a) = e\}$

гомоморфізма груп $\Phi\colon G \to H$ є нормальною підгрупою G, а його образ $\Phi(G)$ – підгрупою H (перевірте це за необхідності). Для алгебр Лі має місце аналогічне спостереження.

Лема 13.2. *Нехай $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ – гомоморфізм алгебр Лі (над довільним полем $\mathbb{F}$). Тоді його ядро $\operatorname{Ker}\varphi \coloneqq \{x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) = 0\}$ – ідеал $\mathfrak{g}$, а образ $\varphi(\mathfrak{g})$ – підалгебра Лі $\mathfrak{h}$.*

Доведення. Ядро і образ лінійного φ є, як відомо (і як нескладно перевірити), векторними підпросторами $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{h}$ відповідно. При цьому для будь-яких $x \in \mathfrak{g}$ і $y \in \operatorname{Ker}\varphi$

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi(x), 0] = 0,$$

отже $[x, y] \in \operatorname{Ker}\varphi$, і для будь-яких $\varphi(x), \varphi(y) \in \varphi(\mathfrak{g})$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in \varphi(\mathfrak{g}),$$

що й демонструє потрібне.

■

Теорема 13.4 (Властивості ядра і образу гомоморфізма груп Лі)**.** *Нехай G і H – групи Лі, $\mathfrak{g} = T_eG$ і $\mathfrak{h} = T_eH$ – їхні алгебри Лі, $\Phi\colon G \to H$ – гомоморфізм груп Лі, $\varphi \coloneqq d_e\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ – його диференціал в одиниці. Тоді ядро $\operatorname{Ker}\Phi$ гомоморфізма Φ є нормальною вкладеною підгрупою Лі G з алгеброю Лі $T_e\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Ker}\varphi$, а його образ $\Phi(G)$ – підгрупою Лі H з алгеброю Лі $T_e\Phi(G) = \varphi(\mathfrak{g})$.*

Доведення. Нагадаємо, що φ є гомоморфізмом алгебр Лі за наслідком 11.2. Будемо позначати через $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ і $\exp_H\colon \mathfrak{h} \to H$ експоненційні відображення відповідних груп Лі.

За означенням $\operatorname{Ker}\Phi = \Phi^{-1}(\{e\})$. Це замкнена підмножина G в силу неперервності Φ. Оскільки це до того ж підгрупа, за теоремою Картана $\operatorname{Ker}\Phi$ є вкладеною підгрупою Лі G, нормальною, як зазначалося вище. Її алгеброю Лі згідно з наслідком 13.2 є $T_e\operatorname{Ker}\Phi$. Для будь-якого $x \in T_e\operatorname{Ker}\Phi$ за описом диференціала у термінах дотичних векторів і властивостями експоненційного відображення маємо

$$\varphi(x) = d_e\Phi(x) = (\Phi(\exp_G tx))'_t(0) = (e)'_t(0) = 0,$$

бо $\exp_G tx \in \operatorname{Ker}\Phi$ для усіх $t \in \mathbb{R}$ за пунктом 1. твердження 13.1, отже $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Таким чином, $T_e\operatorname{Ker}\Phi \subset \operatorname{Ker}\varphi$. І навпаки, нехай $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тоді для будь-якого $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\exp_G tx) = \exp_H \varphi(tx) = \exp_H t\varphi(x) = \exp_H 0 = e$$

за твердженням 7.3. Тобто гладка крива $t \mapsto \exp_G tx$ є відображенням у підгрупу Лі $\operatorname{Ker}\Phi$ (що проходить через e при $t = 0$), а отже $x = (\exp_G tx)'_t(0) \in T_e\operatorname{Ker}\Phi$. Це доводить обернене включення, а отже й рівність $T_e\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Ker}\varphi$.

Зауважимо, що отриманий результат узгоджується з пунктом <u>3.</u> твердження 13.1 та лемою 13.2: алгеброю Лі нормальної підгрупи Лі $\operatorname{Ker}\Phi$ виявився ідеал $\operatorname{Ker}\varphi$.

Щоб побудувати структуру підгрупи Лі на $\Phi(G)$, будемо рухатися у зворотньому напрямку: від підалгебри Лі. Оскільки φ – гомоморфізм алгебр Лі, його образ $\varphi(\mathfrak{g})$ є підалгеброю Лі $\mathfrak{h}$ за лемою 13.2. За теоремою 13.2 існує єдина зв'язна підгрупа Лі $H^* \subset H$ така, що її алгеброю Лі є $T_eH^* = \varphi(\mathfrak{g})$. З іншого боку, $\Phi(G)$ є підгрупою H за зазначеним вище. Введемо на ній фактортопологію сюр'єктивним відображенням $\Phi\colon G \to \Phi(G)$. Нагадаємо, що в такій топології підмножина $A \subset \Phi(G)$ є відкритою тоді й тільки тоді, коли $\Phi^{-1}(A)$ відкрита в G. Зокрема, тоді $\Phi\colon G \to \Phi(G)$ є неперервним, а $\Phi(G)$ є топологічною групою (перевірте це). Як і у доведенні теореми Картана, нашою задачею буде показати, що $\Phi(G)^0 = H^*$. Тут ми також неодноразово будемо використовувати твердження 7.3, тобто комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle \exp_G}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_H} \\ G & \xrightarrow{\Phi} & H \end{array}$$

Оскільки експоненційним відображенням групи Лі H^* є обмеження $\exp_H$ на її алгебру Лі $\varphi(\mathfrak{g})$ за наслідком 13.1, і експоненційні відображення є локальними дифеоморфізмами в околах нулів, існують відкриті $V \ni 0$ у $\mathfrak{g}$ і $W \ni 0$ у $\varphi(\mathfrak{g})$ такі, що $\exp_G\colon V \to \exp_G(V)$ і $\exp_H\colon W \to \exp_H(W) \subset H^*$ є дифеоморфізмами. Зокрема, $\exp_G(V)$ і $\exp_H(W)$ є відкритими околами одиниць груп Лі G і H^* відповідно. Оскільки сюр'єктивні лінійні відображення відкриті відносно евклідових топологій (перевірте це), $\varphi(V)$, а отже й $U \coloneqq \varphi(V) \cap W$, є відкритими околами нуля у $\varphi(\mathfrak{g})$. Тоді $\exp_H(U) \subset \exp_H(W)$ є відкритим околом e у H^* за дифеоморфністю обмеження $\exp_H$. Крім того, з комутативності наведеної вище діаграми випливає, що

$$\Phi(\exp_G(\varphi^{-1}(U))) = \exp_H(\varphi(\varphi^{-1}(U))) = \exp_H(U).$$

Зокрема, $\exp_H(U) \subset \Phi(G)$. Зменшуючи за необхідності побудовані околи, можемо вважати $\exp_H(U)$ лінійно зв'язною, і тоді $\exp_H(U) \subset \Phi(G)^0$. Покажемо, що це відкритий окіл e в топології $\Phi(G)^0$. Елемент a належить до $\Phi^{-1}(\exp_H(U))$, тобто $\Phi(a) \in \exp_H(U) = \Phi(\exp_G(\varphi^{-1}(U)))$, тоді й тільки тоді, коли існує $b \in \exp_G(\varphi^{-1}(U))$ такий, що $\Phi(a) = \Phi(b)$, тобто, в силу гомоморфності Φ, $\Phi(ab^{-1}) = \Phi(a)\,\Phi(b)^{-1} = e$, отже $c := ab^{-1} \in \operatorname{Ker}\Phi$. Таким чином, належність $a \in \Phi^{-1}(\exp_H(U))$ еквівалентна існуванню $b \in \exp_G(\varphi^{-1}(U))$ і $c \in \operatorname{Ker}\Phi$ таких, що $a = cb$. Іншими словами,

$$\Phi^{-1}(\exp_H(U)) = \{cb = L_c b \mid c \in \operatorname{Ker}\Phi,\, b \in \exp_G(\varphi^{-1}(U))\} =$$
$$= \bigcup_{c\in\operatorname{Ker}\Phi} L_c(\exp_G(\varphi^{-1}(U))).$$

При цьому $\varphi^{-1}(U) \subset V$ є відкритим околом 0 у $\mathfrak{g}$ за неперервністю лінійного φ. Тоді, оскільки $\exp_G\colon V \to \exp_G(V)$ – дифеоморфізм, $\exp_G(\varphi^{-1}(U))$ є відкритою підмножиною в індукованій топології $\exp_G(V)$, а отже і в G. Ліві зсуви є гомеоморфізмами за твердженням 3.1, тому множини $L_c(\exp_G(\varphi^{-1}(U)))$ для усіх $c \in \operatorname{Ker}\Phi$, а отже й їх об'єднання $\Phi^{-1}(\exp_H(U))$, є відкритими у G. Це й означає, що $\exp_H(U) \subset \Phi(G)^0$ відкрита у фактортопології. Тоді, застосовуючи пункт <u>3.</u> теореми 3.1 до топологічної групи $\Phi(G)$ і зв'язної підгрупи Лі H^*, отримаємо

$$\Phi(G)^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \exp_H(U)^k = (H^*)^0 = H^*.$$

Таким чином, підгрупи $\Phi(G)^0$ і H^* збігаються. Далі діємо як у доведенні теореми Картана. Покладемо

$$\mathcal{B}_e := \{\exp_H(\widehat{U}) \mid 0 \in \widehat{U} \subset U,\, \widehat{U} \text{ відкрита}\}.$$

Оскільки $\exp_H\colon U \to \exp_H(U)$ є дифеоморфізмом, такі $\exp_H(\widehat{U})$ – це в точності відкриті в топології H^* підмножини відкритої $\exp_H(U)$, що містять e. Також аналогічно до $\exp_H(U)$ встановлюємо, що кожна

$$\Phi^{-1}(\exp_H(\widehat{U})) = \bigcup_{c\in\operatorname{Ker}\Phi} L_c(\exp_G(\varphi^{-1}(\widehat{U})))$$

відкрита в G, а отже $e \in \exp_H(\widehat{U}) \subset \exp_H(U)$ відкрита в $\Phi(G)^0$. І навпаки, якщо підмножина $A \subset \exp_H(U)$, що містить e, відкрита, то за побудовою фактортопології $\Phi^{-1}(A)$ відкрита в G. Тоді з неперервності $\exp_G$, відкритості φ і комутативності діаграми вище випливає, що

$$\widehat{U} := \exp_H^{-1}(A) = \varphi(\varphi^{-1}(\exp_H^{-1}(A))) = \varphi(\exp_G^{-1}(\Phi^{-1}(A)))$$

є відкритим околом 0 у $\varphi(\mathfrak{g})$, що міститься в U, і $A = \exp_H(\widehat{U})$. Таким чином, $\mathcal{B}_e$ є сукупністю усіх відкритих підмножин $\exp_H(U)$, що містять e, в топологіях $\Phi(G)^0$ і H^*, тобто базою обох цих топологій у точці e. Оскільки ліві зсуви є гомеоморфізмами в обох топологіях, тоді

$$\mathcal{B} := \{L_a(\exp_H(\widehat{U})) \mid a \in \Phi(G)^0,\ 0 \in \widehat{U} \subset U,\ \widehat{U} \text{ відкрита}\}$$

є спільною базою топологій $\Phi(G)^0$ і H^*. Отже, ці топології збігаються, гладка структура H^* є гладкою структурою $\Phi(G)^0$, відображення добутку і взяття оберненого – гладкими, а включення $i\colon \Phi(G)^0 \to H$ – зануренням. Далі перенесемо цю гладку структуру на всю підгрупу $\Phi(G)$ дослівно так само, як це робилося у доведенні теореми Картана. Тоді, знову ж, $i\colon \Phi(G) \to H$ буде зануренням, а відображення добутку і взяття оберненого $\Phi(G)$ – гладкими як обмеження гладких на підмноговид. Таким чином, $\Phi(G)$ – це група Лі і підгрупа Лі H, а її алгеброю Лі є $T_e\Phi(G) = T_e\Phi(G)^0 = T_eH^* = \varphi(\mathfrak{g})$ за наслідками 11.4 та 13.2. При цьому побудована структура підгрупи Лі є єдиною можливою для фактортопології за вправою 2.4.

∎

Приклад 13.5. Однопараметричні підгрупи групи Лі G, тобто образи $\Phi(\mathbb{R})$ гомоморфізмів груп Лі $\Phi\colon \mathbb{R} \to G$, є підгрупами Лі G в силу попередньої теореми. Оскільки, як встановлено у твердженні 7.2, ці гомоморфізми мають вигляд $\Phi(t) = \exp tx$, $t \in \mathbb{R}$, підгрупа Лі $\Phi(\mathbb{R})$ є або точкою e (тобто нульвимірною) при $x = 0$, або носієм регулярної кривої (тобто одновимірною) при $x \neq 0$. Звідки тут випливає регулярність? Зокрема, ірраціональні обмотування тора з прикладу 2.9 демонструють, що, на відміну від ядра, образ гомоморфізма груп Лі не є, взагалі кажучи, замкненою або вкладеною підгрупою Лі.

14 Зв'язок між гомоморфізмами груп та алгебр Лі

Ми вже знаємо, що диференціал у одиниці гомоморфізма груп Лі є гомоморфізмом алгебр Лі, причому ізоморфізму відповідає ізоморфізм (це наслідки 11.2 і 11.3). У цьому розділі ми встановимо обернену відповідність за деякої додаткової умови на область визначення гомоморфізма груп Лі. Щоб сформулювати і довести цей результат, нам потрібно буде навести (або нагадати) деякі базові відомості з алгебраїчної топології. Детальне викладення відповідних питань разом з іншими прикладами і доведеннями тверджень 14.1 і 14.2 можна знайти у [6, с. 262-281] та [29, с. 132-201] (точніше, твердження 14.2 можна вивести з теореми 22.1 у [29], деяких інших результатів там і властивостей гладких многовидів; див. також вправу 22.3(b) там же).

Означення 14.1. *Петлею* у точці x топологічного простору X зветься шлях, що починається і закінчується в x, тобто неперервне відображення $\gamma\colon [0,1] \to X$ таке, що $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Говорять, що петля γ в x *гомотопна постійній* (або *гомотопна нулю*), якщо існує неперервне відображення (*гомотопія*) $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ таке, що $F(t,0) = \gamma(t)$ і $F(t,1) = F(0,s) = F(1,s) = x$ для будь-яких $t,s \in [0,1]$. Лінійно зв'язний топологічний простір зветься *однозв'язним*, якщо будь-яка петля у будь-якій його точці гомотопна постійній.

Іншими словами, однозв'язність означає, що будь-яку петлю у будь-якій точці простору можна неперервно стягнути в точку: для будь-якого $s \in [0,1]$ відображення $F(\cdot, s)$ за означенням теж буде петлею в x, й ці петлі неперервно залежать від s, починаючи від γ при $s = 0$ і закінчуючи постійним відображенням у x при $s = 1$. Цю умову насправді достатньо перевірити в одній точці, тоді вона буде виконуватися і в інших.

Приклад 14.1. Прикладами однозв'язних топологічних просторів є $\mathbb{R}^n$, усі опуклі підмножини $\mathbb{R}^n$ (спробуйте це довести), сфери S^n при $n \geqslant 2$ та прямі добутки однозв'язних просторів.

Приклад 14.2. До неоднозв'язних топологічних просторів відносяться, наприклад, тори T^n (зокрема, коло S^1), добутки $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ при $m \geqslant 1$ та дійсні проєктивні простори $\mathbb{R}P^n$. Зауважимо, що всі простори цих прикладів лінійно зв'язні.

Означення 14.2. Трійка (X,Y,p), де $p\colon X \to Y$ – сюр'єктивне неперервне відображення топологічних просторів, зветься *накриттям*, якщо для будь-якої $y \in Y$ існує відкрита $U \ni y$ така, що $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, де

- усі U_α відкриті;
- $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ для будь-яких $\alpha \neq \beta \in A$ (тобто об'єднання диз'юнктне);
- обмеження $p|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to U$ є гомеоморфізмом для будь-якого $\alpha \in A$.

При цьому X називають *накриваючим простором* цього накриття, Y – його *базою* (а також говорять, що (X,Y,p) – накриття Y), p – *накриваючим відображенням* (або просто накриттям), $p^{-1}(y)$ – *шаром* накриття над точкою $y \in Y$. Якщо усі шари $p^{-1}(y)$ для $y \in Y$ складаються з k елементів, говорять, що накриття – k-*листове*. Накриття зветься *універсальним*, якщо його накриваючий простір однозв'язний.

Приклад 14.3. Будь-який гомеоморфізм $p\colon X \to Y$ задає (тривіальний) приклад накриття (X, Y, p). У цьому випадку в якості U можна взяти Y, а в якості єдиної U_α – X.

Вправа 14.1. Показати, що для будь-якого накриття (X, Y, p) відображення p відкрите, тобто для будь-якої відкритої $U \subset X$ її образ $p(U)$ відкритий в Y.

Твердження 14.1. *Якщо (X, Y, p) – накриття, простір X є лінійно зв'язним, а Y – однозв'язним, то p – гомеоморфізм. Зокрема, це накриття є універсальним.*

Твердження 14.2. *Для будь-якого зв'язного многовида Y існує універсальне накриття (X, Y, p), причому X є многовидом тієї ж вимірності. Якщо Y гладкий, то X теж гладкий, а гладке p є локальним дифеоморфізмом в околі кожної точки. При цьому X визначений однозначно з точністю до гомеоморфізма (дифеоморфізма у гладкому випадку).*

Приклад 14.4. Відображення $p\colon \mathbb{R}^n \to T^n\colon (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (e^{ix^1}, \ldots, e^{ix^n})$ визначає універсальне накриття тора $(\mathbb{R}^n, T^n, p)$. Також це накриття задовольняє попередньому твердженню. Перевірте ці факти самостійно або див. твердження 14.3 нижче.

Так само можна побудувати накриття простором $\mathbb{R}^n$ будь-якого добутку $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ за допомогою відображення

$$p\colon (x^1, \ldots, x^n) \mapsto \left(e^{ix^1}, \ldots, e^{ix^m}, x^{m+1}, \ldots, x^n\right).$$

Приклад 14.5. Аналогічним чином перевіряється, що відображення $\rho\colon S^3 \to \mathrm{SO}(3)$, що побудоване у прикладі 4.9, визначає дволистове універсальне накриття $(S^3, \mathrm{SO}(3), \rho)$ групи Лі $\mathrm{SO}(3)$, яке задовольняє попередньому твердженню.

Помітимо, що в обох попередніх прикладах універсальні накриття визначалися гомоморфізмами груп Лі, диференціали яких в одиницях були ізоморфізмами алгебр Лі (перевірте це для прикладу 14.4; для прикладу 14.5 це твердження наслідку 4.5, вправ 11.5 і 12.7).

Ці приклади демонструють, що з того, що диференціал в одиниці гомеоморфізма груп Лі Φ є ізоморфізмом алгебр Лі, взагалі кажучи, не випливає, що Φ є ізоморфізмом груп Лі (як саме?). Тим не менш, ми можемо дещо більше дізнатися про такі Φ у загальному випадку, використовуючи, зокрема, результати попереднього розділу. Наступне твердження також буде основним допоміжним результатом для анонсованої на початку розділу теореми про існування гомоморфізмів груп Лі.

Твердження 14.3. *Нехай G і H – групи Лі, H зв'язна, $\Phi\colon G \to H$ – гомоморфізм груп Лі такий, що $d_e\Phi$ – ізоморфізм алгебр Лі.*

<u>1.</u> *Трійка (G, H, Φ) є накриттям, зокрема, Φ є сюр'єктивним. Крім того, Φ є локальним дифеоморфізмом в околі кожної точки $a \in G$, тобто існують відкриті $U \ni a$, $V \ni \Phi(a)$ такі, що обмеження $\Phi\colon U \to V$ – дифеоморфізм.*

<u>2.</u> *Ядро $\operatorname{Ker}\Phi$ гомоморфізма Φ є нормальною вкладеною замкненою дискретною підгрупою Лі G.*

<u>3.</u> *Індукований сюр'єктивним гомоморфізмом Φ ізоморфізм груп*

$$\Psi\colon G/\operatorname{Ker}\Phi \to \Phi(G) = H\colon a\operatorname{Ker}\Phi \mapsto \Phi(a)$$

є гомеоморфізмом, якщо ввести на факторгрупі $G/\operatorname{Ker}\Phi$ фактортопологію канонічною проєкцією $p\colon G \to G/\operatorname{Ker}\Phi\colon a \mapsto a\operatorname{Ker}\Phi$.

Доведення.

<u>1.</u> Оскільки $d_e\Phi$ є лінійним ізоморфізмом, Φ – локальний дифеоморфізм в околі одиниці: існують відкриті $U \ni e$ у G і $V \ni e$ у H такі, що обмеження $\Phi\colon U \to V$ – дифеоморфізм. Оскільки H зв'язна, з пункту <u>3.</u> теореми 3.1 тоді випливає, що

$$\Phi(G) \subset H = H^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k \subset \Phi(G),$$

бо $V \subset \Phi(G)$, а $\Phi(G)$ – підгрупа H. Таким чином, $\Phi(G) = H$, тобто Φ – сюр'єктивний гомоморфізм (*епіморфізм*).

Покажемо тепер, що сюр'єктивне неперервне відображення $\Phi\colon G \to H$ задає накриття. Оскільки ліві зсуви H є гомеоморфізмами за твердженням 3.1, множини $L_{\Phi(a)}(V)$ для усіх $a \in G$ утворюють відкрите покриття H (тут також використали сюр'єктивність Φ). Перевіримо, що це саме ті околи точок H, існування яких вимагається у означенні 14.2, знайшовши їх прообрази. Оскільки $\Phi\colon U \to V$ – дифеоморфізм, будь-яка точка V має вигляд $\Phi(b)$ для $b \in U$, отже будь-яка точка $L_{\Phi(a)}(V)$ – вигляд $L_{\Phi(a)}\Phi(b) = \Phi(a)\,\Phi(b) = \Phi(ab)$ за гомоморфністю Φ, де $b \in U$. Точка $c \in G$ належить до прообразу цієї точки тоді й тільки тоді, коли $\Phi(ab) = \Phi(c)$, тобто $e = \Phi(ab)^{-1}\Phi(c) = \Phi((ab)^{-1}c)$ за гомоморфністю. Це означає, що $d := (ab)^{-1}c \in \operatorname{Ker}\Phi$, і при цьому $c = abd$. Таким чином, $c \in$

$\Phi^{-1}(L_{\Phi(a)}(V))$ тоді й тільки тоді, коли існують такі $b \in U$ і $d \in \operatorname{Ker}\Phi$, що $c = abd$. Іншими словами,

$$\Phi^{-1}(L_{\Phi(a)}(V)) = \{abd \mid b \in U,\ d \in \operatorname{Ker}\Phi\} = \bigcup_{d \in \operatorname{Ker}\Phi} L_a \circ R_d(U).$$

Покажемо, що це об'єднання задовольняє умовам означення 14.2 (у якості індексної множини A тут виступає $\operatorname{Ker}\Phi$). Оскільки L_a і R_d тут є гомеоморфізмами G за твердженням 3.1, усі множини $L_a \circ R_d(U)$ з цього об'єднання відкриті. Перевіримо його диз'юнктність. Нехай $L_a \circ R_{d_1}(U) \cap L_a \circ R_{d_2}(U) \neq \varnothing$ для деяких $d_1, d_2 \in \operatorname{Ker}\Phi$, тобто існують $b_1, b_2 \in U$ такі, що $ab_1d_1 = ab_2d_2$. Подіявши на ці добутки гомоморфізмом Φ, отримаємо

$$\Phi(a)\,\Phi(b_1) = \Phi(a)\,\Phi(b_1)\,\Phi(d_1) = \Phi(a)\,\Phi(b_2)\,\Phi(d_2) = \Phi(a)\,\Phi(b_2),$$

бо d_1 і d_2 належать до ядра Φ. Скоротивши на $\Phi(a)$, отримаємо $\Phi(b_1) = \Phi(b_2)$. Оскільки $\Phi\colon U \to V$ – дифеоморфізм, зокрема ін'єкція, це означає, що $b_1 = b_2$, тоді з $ab_1d_1 = ab_2d_2$ випливає, що $d_1 = d_2$. Звідси й маємо потрібну диз'юнктність: $L_a \circ R_{d_1}(U) \cap L_a \circ R_{d_2}(U) = \varnothing$ при $d_1 \neq d_2$. Нарешті, з'ясуємо, як виглядає обмеження Φ на кожну з цих множин. Аналогічно до міркувань вище, для будь-яких $d \in \operatorname{Ker}\Phi$ і $abd \in L_a \circ R_d(U)$ маємо

$$\Phi(abd) = \Phi(a)\,\Phi(b)\,\Phi(d) = \Phi(a)\,\Phi(b) = \Phi(a)\,\Phi(a^{-1}(abd)d^{-1}) =$$

$$= L_{\Phi(a)} \circ \Phi \circ L_{a^{-1}} \circ R_{d^{-1}}(abd).$$

Отже,

$$\Phi|_{L_a \circ R_d(U)} = L_{\Phi(a)} \circ \Phi \circ L_{a^{-1}} \circ R_{d^{-1}}\colon L_a \circ R_d(U) \to L_{\Phi(a)}(V).$$

Оскільки ліві та праві зсуви тут є дифеоморфізмами відповідних груп Лі за твердженням 3.1, а $\Phi\colon U \to V$ – дифеоморфізм, ця композиція також є дифеоморфізмом, зокрема гомеоморфізмом. Таким чином, ми не тільки завершили доведення того, що (G, H, Φ) – накриття, але й показали, що Φ – локальний дифеоморфізм в околі кожної точки $a \in G$, бо ця точка має відкритий окіл $L_a(U) = L_a \circ R_e(U)$ потрібного вигляду. Також локальну дифеоморфність можна продемонструвати, знайшовши диференціали цього відображення у кожній точці і пересвідчившися у тому, що це теж лінійні ізоморфізми (зробіть це).

2. За теоремою 13.4 маємо, що $\operatorname{Ker}\Phi$ є нормальною вкладеною підгрупою Лі G з алгеброю Лі $T_e\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Ker} d_e\Phi = 0$, бо ядро лінійного ізоморфізма нульове. Отже, $\operatorname{Ker}\Phi$ – нульвимірна вкладена підгрупа Лі, тобто індукована топологія цієї підгрупи є дискретною (див. приклад 2.3). Крім того, з доведення теореми 13.4 випливає, що $\operatorname{Ker}\Phi$ є замкненою підмножиною G.

3. Як відомо з алгебри, Ψ дійсно є ізоморфізмом груп, зокрема біекцією (за необхідності перевірте це самостійно). Його означення $\Psi(a\operatorname{Ker}\Phi) \coloneqq \Phi(a)$ еквівалентне умові $\Psi \circ p = \Phi$, тобто комутативності діаграми

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ G/\operatorname{Ker}\Phi \arrow[r, "\Psi"] & H \end{tikzcd}$$

Тому, зокрема, $p^{-1}(\Psi^{-1}(U)) = \Phi^{-1}(U)$ для будь-якої відкритої $U \subset H$. Оскільки Φ неперервне, цей прообраз відкритий у G, а отже $\Psi^{-1}(U)$ відкрита в $G/\operatorname{Ker}\Phi$ за означенням фактортопології. Тому Ψ неперервне. Звідти ж маємо, що образом будь-якої відкритої $U \subset G/\operatorname{Ker}\Phi$ є $\Psi(U) = \Psi(p(p^{-1}(U))) = \Phi(p^{-1}(U))$. Це відкрита підмножина H, бо $p^{-1}(U)$ відкрита за побудовою фактортопології, а Φ є відображенням накриття, як доведено у пункті 1., отже відкритим за вправою 14.1. Таким чином, біекція Ψ неперервна й відкрита, тобто дійсно є гомеоморфізмом.

■

Якщо прибрати тут умову зв'язності H, натомість вимагаючи, щоб G була зв'язною, то зв'язний неперервний образ $\Phi(G)$ буде міститися у зв'язній компоненті одиниці H^0, тому це твердження залишиться вірним з заміною H на H^0 у пунктах 1. і 3. Як зауважено в доведенні, слово "дискретна" в описі групи Лі $\operatorname{Ker}\Phi$ є синонімом слова "нульвимірна". Помітимо також, що група $G/\operatorname{Ker}\Phi$ з фактортопологією є топологічною групою (чому?), отже твердження пункту 3. означає, що $\Psi\colon G/\operatorname{Ker}\Phi \to H$ є ізоморфізмом топологічних груп. Далі в цьому курсі ми навчимося будувати гладку структуру на фактормножині групи Лі за замкненою підгрупою (див. теорему 23.1). Відносно такої структури $G/\operatorname{Ker}\Phi$ виявиться групою Лі (це твердження вправи 23.3), а Ψ – ізоморфізмом груп Лі (це тоді випливатиме з вправи 14.4 нижче).

Вправа 14.2. Перевірити, що в умовах попереднього твердження трійка $(G, G/\operatorname{Ker}\Phi, p)$ теж є накриттям. Це частковий випадок накриття простору орбіт за неперервною цілком розривною дією групи, де в даному випадку група $\operatorname{Ker}\Phi$ діє на топологічному просторі G справа: $a \cdot b := ba$ для $a \in \operatorname{Ker}\Phi$, $b \in G$ (див. [29, с. 167], а також розділ 22). Чи вірно це для довільного гомоморфізма груп Лі $\Phi\colon G \to H$?

Приклад 14.6. Розглянемо загальний випадок відображення

$$p\colon \mathbb{R}^n \to T^m \times \mathbb{R}^{n-m} \colon (x^1, \dots, x^n) \mapsto \left(e^{ix^1}, \dots, e^{ix^m}, x^{m+1}, \dots, x^n\right)$$

з прикладу 14.4. Як вже зазначалося, це гомоморфізм груп Лі, що задовольняє умові твердження 14.3. Тому $(\mathbb{R}^n, T^m \times \mathbb{R}^{n-m}, p)$ дійсно є універсальним накриттям, а p – локальним дифеоморфізмом в околі кожної точки. Його ядро має вигляд

$$\operatorname{Ker} p = \{(2\pi k^1, \dots, 2\pi k^m, 0, \dots, 0) \mid k^1, \dots, k^m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^m,$$

і це дійсно дискретна підгрупа Лі $\mathbb{R}^n$. Такі підгрупи називають *ґратками*, їх загальний вигляд наведений у прикладі 15.1 нижче. Пункт 3. попереднього твердження встановлює добре відомий з топології гомеоморфізм між простором орбіт $\mathbb{R}^n/\operatorname{Ker} p$ і $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Приклад 14.7. Гомоморфізм груп Лі $\rho\colon S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ з прикладів 4.9 і 14.5 теж задовольняє умові твердження 14.3, тому дійсно визначає двулистове універсальне накриття $(S^3, \mathrm{SO}(3), \rho)$ і є локальним дифеоморфізмом в околі кожної точки. Як було встановлено у пункті 2. вправи 4.7, $\operatorname{Ker}\rho = \{1, -1\}$, що, звичайно, є дискретною підгрупою Лі S^3. З пункту 3. твердження 14.3 та обговорення після нього випливає, що побудований у прикладі 4.9 ізоморфізм груп $\widetilde{\rho}\colon S^3/\{1,-1\} \to \mathrm{SO}(3)$ є гомеоморфізмом, більш того, при правильній побудові гладкої структури на факторгрупі $S^3/\{1,-1\}$ він перетворюється на ізоморфізм груп Лі. Можна показати, що ця гладка структура збігається зі стандартною гладкою структурою проєктивного простору $\mathbb{R}P^3$, довівши тим самим твердження вправи 4.8 про дифеоморфність $\mathbb{R}P^3$ і $\mathrm{SO}(3)$.

Спостереження прикладів 14.4 і 14.5 також можна узагальнити наступним чином з використанням твердження 14.2.

Вправа 14.3. Нехай G – зв'язна група Лі, а $(\widetilde{G}, G, p)$ – її гладке універсальне накриття з твердження 14.2. Тоді на $\widetilde{G}$ існує єдина структура групи Лі, для якої $p\colon \widetilde{G} \to G$ – гомоморфізм груп Лі. При цьому $d_e p$ є ізоморфізмом алгебр Лі цих груп.

Тому в подальшому за необхідності будемо говорити про *універсальне накриття* даної зв'язної групи Лі G як про однозначно визначену (з точністю до ізоморфізма, див. також твердження 15.1 нижче) однозв'язну групу Лі $\widetilde{G}$ з алгеброю Лі, що ізоморфна алгебрі Лі G. З прикладів 14.4 і 14.5 випливає, що такими універсальними накриттями груп Лі $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ (зокрема, $\mathrm{SO}(2) \cong S^1 = T^1$) і $\mathrm{SO}(3)$ є $\mathbb{R}^n$ і S^3 відповідно. Універсальним накриттям (дволистовим) групи Лі $\mathrm{SO}(n)$ при $n \geqslant 3$ є спінорна група $\mathrm{Spin}(n)$ (див. обговорення після вправи 4.11).

Тепер перейдемо нарешті до основної теореми цього розділу.

Теорема 14.1 (Існування та єдиність гомоморфізмів груп Лі)**.** *Нехай G і H – групи Лі, G однозв'язна (зокрема зв'язна), $\mathfrak{g} = T_eG$ і $\mathfrak{h} = T_eH$ – їхні алгебри Лі. Тоді для будь-якого гомоморфізма алгебр Лі $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ існує єдиний гомоморфізм груп Лі $\Phi\colon G \to H$ такий, що $d_e\Phi = \varphi$.*

Доведення. Єдиність тут означає, що для будь-яких двох гомоморфізмів груп Лі $\Phi, \widehat{\Phi}\colon G \to H$ якщо $d_e\Phi = \varphi = d_e\widehat{\Phi}$, то $\Phi = \widehat{\Phi}$. Оскільки G зв'язна, це в точності твердження 7.4. Таким чином, залишилося довести існування такого Φ.

Розглянемо прямий добуток груп Лі $G \times H$, тобто їх прямий декартовий добуток зі структурами прямих добутків груп та гладких многовидів. Це група Лі за вправою 2.3. У вправі 11.9 пропонувалося побудувати канонічний ізоморфізм між алгеброю Лі $G \times H$, тобто $T_{(e,e)}\, G \times H$, і прямою сумою алгебр Лі $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Це робиться наступним чином. Представимо $T_{(e,e)}\, G \times H$ як простір дотичних векторів до усіх гладких кривих, що проходять через (e, e) (як для матричних груп у розділі 5, але без вкладення у якийсь простір). З побудови структури прямого добутку гладких многовидів тоді випливає, що кожна така крива має вигляд $t \mapsto (\gamma(t), \nu(t))$, де γ і ν – гладкі криві у G і H відповідно, що одночасно проходять через їхні одиниці, тобто

$$T_{(e,e)}\, G \times H = \{(\gamma(t), \nu(t))'(t_0) \mid \gamma \in C^\infty((\alpha, \beta), G)\colon \gamma(t_0) = e,$$
$$\nu \in C^\infty((\alpha, \beta), H)\colon \nu(t_0) = e\}.$$

При цьому для кожної такої пари кривих $\gamma'(t_0) \in T_eG = \mathfrak{g}$ і $\nu'(t_0) \in T_eH = \mathfrak{h}$. Тому можна визначити відображення

$$T_{(e,e)}\, G \times H \to \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}\colon (\gamma(t), \nu(t))'(t_0) \mapsto \gamma'(t_0) + \nu'(t_0).$$

Залишилося перевірити, що воно коректно визначене і є ізоморфізмом алгебр Лі (зробіть це). Як зазначалося після вправи 11.9, ми будемо ототожнювати ці алгебри Лі, вважаючи, що у введених вище позначеннях $T_{(e,e)}\, G \times H = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ складається з сум вигляду $\gamma'(t_0) + \nu'(t_0)$. Розглянемо канонічні проєкції на множники:

$$\Pi\colon G \times H \to G\colon (a, b) \mapsto a, \quad \mathrm{P}\colon G \times H \to H\colon (a, b) \mapsto b.$$

Це гомоморфізми груп за означенням прямого добутку груп і гладкі відображення, бо у локальних координатах, що використовуються при побудові прямого добутку гладких многовидів, ці відображення виглядають як ортогональні проєкції евклідових просторів (перевірте це). Тому Π і P – гомоморфізми груп Лі, отже їхні диференціали в одиниці $\pi \coloneqq d_{(e,e)}\Pi\colon \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ і $\rho \coloneqq d_{(e,e)}\mathrm{P}\colon \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ повинні бути гомоморфізмами алгебр Лі за наслідком 11.2. Обчислимо π через його дію на дотичних векторах:

$$\pi(\gamma'(t_0) + \nu'(t_0)) = d_{(e,e)}\Pi(\gamma'(t_0) + \nu'(t_0)) = (\Pi(\gamma(t), \nu(t)))'(t_0) = \gamma'(t_0),$$

де $\gamma(t_0) = e$, $\nu(t_0) = e$. Таким чином, $\pi(x + y) = x$, і так само вставновлюємо, що $\rho(x + y) = y$, для будь-якого $x + y \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ (де $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$), тобто це канонічні проєкції на доданки прямої суми. Звичайно, те, що це гомоморфізми алгебр Лі, неважко перевірити й безпосередньо (зробіть це), більш того, такі проєкції будуть гомоморфізмами алгебр Лі й для довільної прямої суми алгебр Лі.

Отже, маємо гомоморфізм алгебр Лі $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Побудуємо його *графік* $\mathfrak{f} \coloneqq \{x + \varphi(x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Це підалгебра Лі. Дійсно, для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ маємо за означенням прямої суми та лінійністю φ

$$\lambda(x + \varphi(x)) + \mu(y + \varphi(y)) = (\lambda x + \mu y) + (\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)) =$$

$$= (\lambda x + \mu y) + \varphi(\lambda x + \mu y) \in \mathfrak{f},$$

тобто це векторний підпростір, і

$$[x + \varphi(x), y + \varphi(y)] = [x, y] + [\varphi(x), \varphi(y)] = [x, y] + \varphi([x, y]) \in \mathfrak{f}$$

за означенням прямої суми алгебр Лі та гомоморфністю φ, отже це дійсно підалгебра Лі в $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Тоді за теоремою 13.2 існує єдина зв'язна підгрупа Лі $F \subset G \times H$ така, що її алгеброю Лі є $T_eF = \mathfrak{f}$. Нашою задачею буде встановити, що F є, у свою чергу, графіком деякого гомоморфізма груп Лі Φ з диференціалом $d_e\Phi = \varphi$.

Далі позначатимемо через Π обмеження цієї канонічної проєкції на F: $\Pi\colon F \to G\colon (a, b) \mapsto a$. Це гомоморфізм груп Лі за наслідком 2.2. Його диференціалом у одиниці є, у свою чергу, обмеження π на $T_eF = \mathfrak{f}$ (див. обговорення на початку попереднього розділу):

$$d_e\Pi = \pi|_{\mathfrak{f}}\colon \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}\colon x + \varphi(x) \mapsto x.$$

Це гомоморфізм алгебр Лі і як диференціал гомоморфізма груп Лі в одиниці, і як обмеження гомоморфізма на підалгебру Лі (перевірте, що таке обмеження є гомоморфізмом алгебр Лі у загальному випадку) та біекція, бо має коректно визначене обернене відображення $x \mapsto x + \varphi(x)$. Отже, $d_e\Pi = \pi|_{\mathfrak{f}}$ є ізоморфізмом алгебр Лі $\mathfrak{f}$ і $\mathfrak{g}$, тобто $\Pi\colon F \to G$ задовольняє умовам твердження 14.3, оскільки G зв'язна. Зокрема, за пунктом 1. цього твердження (F, G, Π) є накриттям, а Π – локальним дифеоморфізмом у околі кожної точки F. Тоді, оскільки F лінійно зв'язна (нагадаємо ще раз, що для многовидів це те саме, що зв'язність), а G однозв'язна, Π є гомеоморфізмом за твердженням 14.1. Оскільки це гомеоморфізм і локальний дифеоморфізм у околі кожної точки, Π є дифеоморфізмом. Дійсно, умови гладкості неперервних відображень Π і Π^{-1} достатньо перевірити в околі кожної точки (вони локальні за своєю природою), а це якраз і гарантується локальною дифеоморфністю. Таким чином, $\Pi\colon F \to G$ – ізоморфізм груп Лі.

Обмеження $\mathrm{P}|_F\colon F \to H\colon (a, b) \mapsto b$ є гомоморфізмом груп Лі аналогічно до обмеження Π, і так само

$$d_e(\mathrm{P}|_F) = \rho|_{\mathfrak{f}}\colon \mathfrak{f} \to \mathfrak{h}\colon x + \varphi(x) \mapsto \varphi(x).$$

Розглянемо тепер композицію гомоморфізмів груп Лі $\Phi \coloneqq \mathrm{P}|_F \circ \Pi^{-1}\colon G \to H$. Це теж гомоморфізм груп Лі, диференціал якого в одиниці згідно з ланцюговим правилом визначений умовою

$$d_e\Phi(x) = d_e(\mathrm{P}|_F) \circ (d_e\Pi)^{-1}(x) = \rho|_{\mathfrak{f}} \circ (\pi|_{\mathfrak{f}})^{-1}(x) = \rho|_{\mathfrak{f}}\,(x + \varphi(x)) = \varphi(x)$$

для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$. Отже, $d_e\Phi = \varphi$, тому Φ є потрібним гомоморфізмом груп Лі. Зауважимо також, що F дійсно є його графіком: $F = \{(a, \Phi(a)) \mid a \in G\}$ (перевірте це).

■

Вправа 14.4 (Теорема Картана про гомоморфізм)**.** Показати, що якщо G і H – групи Лі, а $\Phi\colon G \to H$ – гомоморфізм топологічних груп, то Φ – гомоморфізм груп Лі (підказка: використати графік Φ та теорему 13.3 Картана про підгрупу).

15 Основна теорема теорії Лі

Тут буде завершено відповідь на питання про існування оберненого до функтора Лі, що було сформульоване у розділі 11. Якщо у попередньому розділі ми навчилися будувати гомоморфізми груп Лі за гомоморфізмами алгебр Лі, то тут наведемо результат про існування та єдиність групи Лі з даною алгеброю Лі, яке використовує лише ту ж саму додаткову умову однозв'язності. Почнемо з твердження про єдиність, що є простим наслідком результатів попереднього розділу.

Твердження 15.1. *Якщо алгебри Лі однозв'язних груп Лі G і H ізоморфні, то G і H ізоморфні.*

Доведення. Будемо як завжди позначати через $\mathfrak{g} = T_eG$ і $\mathfrak{h} = T_eH$ алгебри Лі цих груп. За умовою існує ізоморфізм алгебр Лі $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Оскільки G однозв'язна, за теоремою 14.1 тоді існує єдиний гомоморфізм груп Лі $\Phi\colon G \to H$ такий, що $d_e\Phi = \varphi$. Оскільки H є, зокрема, зв'язною, з пункту 1. твердження 14.3 випливає, що (G, H, Φ) є (універсальним) накриттям, а Φ – локальним дифеоморфізмом в околі кожної точки G. Тепер з (лінійної) зв'язності G, однозв'язності H і твердження 14.1 маємо, що Φ – гомеоморфізм. Оскільки це локальний дифеоморфізм в околі кожної точки, Φ є дифеоморфізмом (це перевіряється аналогічно до дифеоморфності Π у доведенні теореми 14.1), а отже ізоморфізмом груп Лі.

■

Це твердження можна було довести й без явного використання твердження 14.3, помітивши, що $\varphi^{-1}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ також є ізоморфізмом алгебр Лі, побудувавши гомоморфізм груп Лі $\Psi\colon H \to G$ такий, що $d_e\Psi = \varphi^{-1}$, і показавши, що Φ і Ψ взаємно обернені за допомогою єдиності в теоремі 14.1 (зробіть це). Як демонструють приклади розділу 11, однозв'язність обох груп Лі (зокрема зв'язність) тут суттєва.

Наслідок 15.1. *Будь-яка n-вимірна однозв'язна абелева група Лі G ізоморфна групі Лі $\mathbb{R}^n$.*

Доведення. Дійсно, n-вимірна алгебра Лі групи G є абелевою за твердженням 11.1, тому за наслідком 11.5 ізоморфна абелевій алгебрі Лі $\mathbb{R}^n$ однозв'язної групи Лі $\mathbb{R}^n$ (з операцією додавання; див. приклад 11.1). Тому група Лі G ізоморфна $\mathbb{R}^n$ за попереднім твердженням.

■

Також нам знадобиться наступна нетривіальна теорема з теорії представлень алгебр Лі.

Теорема 15.1 (Адо – Івасава)**.** *Будь-яка скінченновимірна алгебра Лі (над довільним полем) має точне скінченновимірне представлення.*

Доведення. Див. доведення загального випадку у [21, с. 219-227], випадку алгебр Лі над полем характеристики 0 (оригінальної теореми Адо) у [10, с. 86-90] або [36, с. 439-441], і також лише для дійсних та комплексних алгебр Лі (той випадок, який нам тільки й потрібен тут) у [15, с. 500-503] або [25, с. 662-669].

■

Теорема 15.2 (Основна теорема теорії Лі, "третя теорема Лі")**.** *Для будь-якої скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ існує і єдина з точністю до ізоморфізма однозв'язна група Лі з алгеброю Лі, що ізоморфна $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Єдиність з точністю до ізоморфізма – це доведене вище твердження 15.1.

Один зі способів довести існування – використати теорему 15.1 Адо. Згідно з нею, існує точне (тобто ін'єктивне) представлення $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ для деякого скінченновимірного векторного простору V над $\mathbb{R}$, зокрема, $\mathfrak{g} \simeq \rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$, як обговорювалося у розділі 12. Нагадаємо, що $\mathfrak{gl}(V)$ є алгеброю Лі групи Лі $\mathrm{GL}(V)$ за наслідками 12.1 і 12.2. Отже, за теоремою 13.2 існує єдина зв'язна підгрупа Лі $G \subset \mathrm{GL}(V)$ з алгеброю Лі $T_eG = \rho(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}$. З вправи 14.3 випливає тоді існування однозв'язної групи Лі $\widetilde{G}$ (універсального накриття G) з алгеброю Лі, що ізоморфна $\rho(\mathfrak{g})$, а отже й $\mathfrak{g}$.

∎

Доведення існування у попередній теоремі способами, що не спираються на теорему Адо, можна знайти у [13, с. 72-81], [25, с. 662] та [40, с. 257-259]. Формулювання оригінальних трьох теорем Лі, що стосувалися локального аналога груп Лі у застосуванні до симетрій диференціальних рівнянь, наведені у [10, с. 463-464] (див. також [16, с. 148-151], де номери сторінок дані за новішим перекладом). Попередня теорема у її сучасному формулюванні належить Картану (і зветься теоремою Картана у [36]). Теорема 15.1 і доведення теореми 15.2 за її допомогою демонструють важливість матричних груп і алгебр Лі: будь-яка скінченновимірна алгебра Лі виявляється ізоморфною матричній (підалгебрі Лі $\mathfrak{gl}(V) \simeq \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$, де $k = \dim V$, або $\mathfrak{gl}(V) \simeq \mathfrak{gl}(k, \mathbb{F})$ у випадку алгебри Лі над довільним полем $\mathbb{F}$), а будь-яка група Лі може бути побудована за допомогою матричної (підгрупи Лі $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$). Зауважимо, що при цьому існують групи Лі, що на відміну віх їхніх алгебр Лі не ізоморфні жодній матричній. Прикладом такої є універсальне накриття групи Лі $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, див. вправу 20 до лекції 2 у [8] або детальніше у [36, с. 417-420].

Якщо нам уже відома однозв'язна група Лі G з алгеброю Лі $T_eG = \mathfrak{g}$, що ізоморфна даній, ми можемо знайти усі зв'язні групи Лі G, алгебри Лі яких ізоморфні $\mathfrak{g}$ (а отже даній), наступним чином. Для будь-якої такої групи Лі H з алгеброю Лі $T_eH = \mathfrak{h}$ існує ізоморфізм алгебр Лі $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, а отже існує єдиний гомоморфізм груп Лі $\Phi\colon G \to H$ з $d_e\Phi = \varphi$ за теоремою 14.1. Тоді за твердженням 14.3 і обговоренням після нього (G, H, Φ) є універсальним накриттям H, що, у свою чергу, ізоморфна факторгрупі $G/\mathrm{Ker}\,\Phi$ (принаймні як топологічна група, але насправді і як група Лі також), де $\mathrm{Ker}\,\Phi$ є нормальною вкладеною дискретною підгрупою Лі в G.

Тому задача класифікації груп Лі H зводиться до задачі пошуку всіх таких підгруп $\operatorname{Ker}\Phi$ у G. Зауважимо, що при цьому фундаментальна група H ізоморфна $\operatorname{Ker}\Phi$ (див. [29, с. 178-179]).

Приклад 15.1. Застосуємо описану вище техніку до зв'язних абелевих груп Лі, продовжуючи тему наслідку 15.1. Відомо, що усі дискретні підгрупи групи Лі $\mathbb{R}^n$ мають вигляд

$$L(e_1, \dots, e_m) \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{m} k^i e_i \;\middle|\; k^1, \dots, k^m \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}^m$$

для деяких лінійно незалежних $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^n$, де $0 \leqslant m \leqslant n$ (це т. зв. *ґратки*; пор. з частковим випадком підгрупи $\operatorname{Ker} p$ у прикладі 14.6). Тоді можна показати, що факторгрупи $\mathbb{R}^n / L(e_1, \dots, e_m)$ ізоморфні $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Див. [13, с. 58-62]. Це означає, що у прикладі 11.1 були перелічені усі зв'язні абелеві групи Лі G з точністю до ізоморфізма, бо їхні алгебри Лі ізоморфні абелевим алгебрам Лі $\mathbb{R}^n$ за наслідком 11.5, а отже $G \cong T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ для якогось $0 \leqslant m \leqslant n$ згідно зі сказаним вище. Більш того, якщо відомо лише, що алгебра Лі зв'язної групи Лі G абелева, ці міркування залишаються вірними, отже G ізоморфна $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ й тому абелева. Зокрема, усі одновимірні алгебри Лі абелеві, як було зауважено наприкінці прикладу 11.1, а отже й усі одновимірні зв'язні групи Лі абелеві.

Наслідок 15.2. *Будь-яка n-вимірна зв'язна абелева група Лі G ізоморфна $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ для деякого $0 \leqslant m \leqslant n$. Якщо алгебра Лі зв'язної групи Лі G абелева, то й G абелева. Зокрема, будь-яка одновимірна зв'язна група Лі абелева та ізоморфна $\mathbb{R}$ або S^1.*

Вправа 15.1. Побудувати явно ізоморфізм груп Лі між зв'язною абелевою групою $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ з прикладу 4.7 та циліндром $T^1 \times \mathbb{R}^1 = S^1 \times \mathbb{R}$.

При цьому незв'язна група Лі з абелевою алгеброю Лі може й не бути абелевою. Наприклад, одновимірна незв'язна група $\mathrm{O}(2)$ неабелева (перевірте це, використавши її опис у прикладах 4.4 та 4.6). Це ще раз підкреслює суттєвість зв'язності, причому не тільки для попереднього наслідку, а й для багатьох інших результатів останніх трьох розділів.

16 Лівоінваріантні форми

У цьому розділі ми природним чином перенесемо поняття інваріантності з векторних полів (як у розділі 6) на форми на групі Лі. Тут знову всюди

G – деяка група Лі, а $T_eG = \mathfrak{g}$ – її алгебра Лі. Терміном "k-форма" ми будемо називати будь-яку форму на гладкому многовиді (тобто поле k-лінійних форм на його дотичних просторах), не обов'язково зовнішню.

Означення 16.1. k-форма ω на групі Лі G зветься *лівоінваріантною* (відповідно, *правоінваріантною*), якщо

$$\omega(b)(x_1, \dots, x_k) = \omega(ab)(d_bL_a(x_1), \dots, d_bL_a(x_k))$$

або, відповідно,

$$\omega(b)(x_1, \dots, x_k) = \omega(ba)(d_bR_a(x_1), \dots, d_bR_a(x_k))$$

для будь-яких $a, b \in G$, $x_1, \dots, x_k \in T_bG$.

Нагадаємо, що значення k-форми ω у $b \in G$ – це k-лінійна форма на просторі T_bG, тобто k-лінійне відображення $\omega(b)\colon \underbrace{T_bG \times \ldots \times T_bG}_{k} \to \mathbb{R}$. Оскільки $L_ab = ab$, d_bL_a діє з T_bG у $T_{ab}G$, тому рівності у попередньому означенні мають сенс, і так само для правоінваріантних форм і R_a. Умова цього означення еквівалентна тому, що $(L_a)^*_b\,\omega(ab) = \omega(b)$ (відповідно, $(R_a)^*_b\,\omega(ba) = \omega(b)$), де $(L_a)^*_b$ ($(R_a)^*_b$) позначає кодиференціал L_a (R_a) у довільній точці $b \in G$. Іншими словами, ω є лівоінваріантною (правоінваріантною) тоді й тільки тоді, коли $(L_a)^*\omega = \omega$ ($(R_a)^*\omega = \omega$) для будь-якого $a \in G$, тобто коли вона інваріантна під дією кодиференціалів лівих (правих) зсувів. Як і у випадку векторних полів, теорія для правоінваріантних форм будується майже дослівно так само, як для лівоінваріантних. Тому в даному розділі далі говоритимемо, як правило, лише про лівоінваріантні форми.

Дослідимо властивості лівоінваріантних k-форм так само, як ми це робили з лівоінваріантними векторними полями у розділі 6. Якщо покласти у попередньому означенні $a \coloneqq b^{-1}$ для деякого $b \in G$, то для будь-яких $x_1, \dots, x_k \in T_bG$ матимемо

$$\omega(b)(x_1, \dots, x_k) = \omega(e)(d_bL_{b^{-1}}(x_1), \dots, d_bL_{b^{-1}}(x_k))$$

Ця рівність однозначно визначає ω її значенням $\omega(e)$ в одиниці, так само, як це було для лівоінваріантних полів. Насправді вона, як і лівоінваріантні поля, однозначно визначена своїм значенням у будь-якій точці $a \in G$ (перевірте це), але нам вистачить значення у e.

Вправа 16.1. Вивести з цієї рівності, що будь-яка лівоінваріантна k-форма є гладкою (аналогічно до відповідного твердження про лівоінваріантні векторні поля).

Тепер нехай α – якась k-лінійна форма на $T_eG = \mathfrak{g}$. Покладемо

$$\omega_\alpha(a)(x_1, \ldots, x_k) \coloneqq \alpha(d_aL_{a^{-1}}(x_1), \ldots, d_aL_{a^{-1}}(x_k)) \tag{16.1}$$

для будь-яких $a \in G$, $x_1, \ldots, x_k \in T_aG$. З лінійності $d_aL_{a^{-1}}$ і k-лінійності форми α випливає, що $\omega_\alpha(a)$ є k-лінійною формою на T_aG у кожній точці $a \in G$, тобто ця умова визначає k-форму ω_α на G. Аналогічно до попередньої вправи перевіряється, що ця форма гладка. Покажемо, що вона лівоінваріантна. Дійсно, за її означенням (16.1) маємо для будь-яких $a, b \in G$, $x_1, \ldots, x_k \in T_bG$

$$\omega_\alpha(ab)(d_bL_a(x_1), \ldots, d_bL_a(x_k)) =$$

$$= \alpha(d_{ab}L_{(ab)^{-1}}(d_bL_a(x_1)), \ldots, d_{ab}L_{(ab)^{-1}}(d_bL_a(x_k))).$$

Оскільки за ланцюговим правилом і властивостями лівих зсувів

$$d_{ab}L_{(ab)^{-1}} \circ d_bL_a = d_b(L_{(ab)^{-1}} \circ L_a) = d_bL_{(ab)^{-1}a} = d_bL_{b^{-1}}, \tag{16.2}$$

потрібне нам значення $\omega_\alpha(ab)(d_bL_a(x_1), \ldots, d_bL_a(x_k))$ дорівнює

$$\alpha(d_bL_{b^{-1}}(x_1), \ldots, d_bL_{b^{-1}}(x_k)) = \omega_\alpha(b)(x_1, \ldots, x_k)$$

за (16.1), що й демонструє лівоінваріантність ω_α. При цьому $\omega_\alpha(e) = \alpha$ знову ж за (16.1), оскільки $d_eL_{e^{-1}} = d_e id_G = id_{\mathfrak{g}}$ є тотожним відображенням. Оскільки будь-яка лівоінваріантна k-форма, як побачили вище, має вигляд $\omega_{\omega(e)}$, відповідність $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ є біекцією між множиною k-лінійних форм на $\mathfrak{g}$ (що є векторним простором над полем $\mathbb{R}$) та множиною лівоінваріантних k-форм на G. Нарешті, безпосередньо з (16.1) випливає, що ця біекція лінійна, тобто $\omega_{\lambda\alpha+\mu\beta} = \lambda\omega_\alpha + \mu\omega_\beta$ для будь-яких k-лінійних форм α, β на $\mathfrak{g}$ і $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Зокрема, це разом із вправою 16.1 означає, що множина лівоінваріантних k-форм на G є векторним підпростором простору всіх гладких k-форм на G (над полем $\mathbb{R}$), що випливає і безпосередньо з означення (перевірте це). Таким чином, ми встановили наступний аналог наслідку 6.1.

Наслідок 16.1. *Лівоінваріантні k-форми на групі Лі G утворюють векторний підпростір у просторі гладких k-форм на G, а відповідність $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ задає лінійний ізоморфізм простору k-лінійних форм на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ групи G на цей підпростір.*

Згадаємо, що будь-яка гладка k-форма на гладкому многовиді однозначно визначена тим, як вона діє на гладкі векторні поля. Якщо ж подіяти лівоінваріантною k-формою ω_α на лівоінваріантні векторні поля

$X_{x_1}, \ldots, X_{x_k}$ на групі Лі G (де $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$, а α – k-лінійна форма на $\mathfrak{g}$), то згідно з означеннями отримаємо для кожної точки $a \in G$

$$\omega_\alpha(X_{x_1}, \ldots, X_{x_k})(a) = \omega_\alpha(a)(X_{x_1}(a), \ldots, X_{x_k}(a)) =$$

$$= \alpha(d_a L_{a^{-1}}(d_e L_a(x_1)), \ldots, d_a L_{a^{-1}}(d_e L_a(x_k))) = \alpha(x_1, \ldots, x_k),$$

де використали (16.2) при $b = e$. Тобто це постійна функція.

Наслідок 16.2. *Для будь-якої лівоінваріантної k-форми ω на групі Лі G та будь-яких лівоінваріантних векторних полів $X_1, \ldots, X_k$ на G значення $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ постійне.*

Вправа 16.2. Показати, що вірне й обернене: якщо ω – k-форма на групі Лі G така, що для будь-яких лівоінваріантних векторних полів $X_1, \ldots, X_k$ на G значення $\omega(X_1, \ldots, X_k)$ постійне, то ω лівоінваріантна.

Решту цього розділу присвятимо лівоінваріантним зовнішнім (тобто кососиметричним) формам на групах Лі. З означення зовнішнього добутку у [26, с. 35-36] та його асоціативності можна вивести, що *зовнішній добуток* гладких зовнішніх форм $\omega_1, \ldots, \omega_l$ на гладкому многовиді M, де ω_i – k_i-форма для $i = \overline{1, n}$, є гладкою зовнішньою $(k_1 + \ldots + k_l)$-формою $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l \coloneqq \mathrm{A}\,(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_l)$, де *тензорний добуток* $\otimes$ та *альтернування* A визначені у [26, с. 25-26, 35-36]. Ця формула нам знадобиться у явному вигляді лише при $k_1 = \ldots = k_l = 1$, коли $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l$ є l-формою:

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l\,(X_1, \ldots, X_l) = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} \operatorname{sign} \sigma\; \omega_1(X_{\sigma(1)}) \ldots \omega_l(X_{\sigma(l)}) \qquad (16.3)$$

для будь-яких гладких векторних полів $X_1, \ldots, X_l$ на M, де сума береться за усіма перестановками σ з l елементів (нагадаємо, що будь-яка 1-форма є зовнішньою).

Оскільки кодиференціали комутують з операціями тензорного добутку та альтернування (перевірте це, використовуючи означення з [26]), для будь яких лівоінваріантних зовнішніх форм $\omega_1, \ldots, \omega_l$ на групі Лі G та кожного $a \in G$

$$(L_a)^*(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l) = \mathrm{A}\,((L_a)^*\omega_1 \otimes \ldots \otimes (L_a)^*\omega_l) = \mathrm{A}\,(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_l) = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l,$$

що означає лівоінваріантність $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_l$.

Наслідок 16.3. *Зовнішній добуток лівоінваріантних зовнішніх форм на групі Лі є лівоінваріантною зовнішньою формою.*

Зокрема, для 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_l$ це також випливає з наслідку 16.2, вправи 16.2 та формули (16.3), бо для лівоінваріантних $X_1, \dots, X_l$ вираз у цій формулі буде постійним.

Нагадаємо також, що *(зовнішнім) диференціалом* зовнішньої гладкої k-форми ω на гладкому многовиді M зветься зовнішня гладка $(k+1)$-форма $d\omega$ така, що

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) \coloneqq \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i\left(\omega\left(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}(-1)^{i+j}\omega\left([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1}\right)\right)$$

для будь-яких гладких векторних полів $X_1, \dots, X_{k+1}$ на M, де $\widehat{X_i}$ та $\widehat{X_j}$ означають пропуски відповідних аргументів форми ω (див. [26, с. 43]). Тут $X_i\left(\omega\left(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}\right)\right)$ – це диференціювання гладкої функції $\omega\left(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}\right)$ за напрямком поля X_i. Зокрема, якщо ω – це лівоінваріантна зовнішня k-форма, а $X_1, \dots, X_{k+1}$ – лівоінваріантні поля на групі Лі $M = G$, то функції $\omega\left(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}\right)$ постійні за наслідком 16.2, і тому $X_i\left(\omega\left(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1}\right)\right) = 0$ для усіх $i = \overline{1, k+1}$, тобто у формулі для $d\omega$ вище залишаються лише члени з другого рядка. Вони знову ж є постійними за наслідком 16.2, бо дужки Лі лівоінваріантних полів лівоінваріантні за твердженням 9.1. Тому в силу вправи 16.2 форма $d\omega$ також лівоінваріантна.

Наслідок 16.4. *Диференціал будь-якої лівоінваріантної зовнішньої k-форми на групі Лі є лівоінваріантною зовнішньою $(k+1)$-формою.*

Зокрема, при $k = 1$ означення диференціала набуває вигляду

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\left(X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\right)$$

для довільних полів X, Y на M у загальному випадку та

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y])$$

для лівоінваріантних 1-форми ω та полів X, Y на групі Лі.

Як зазначалося перед наслідком 6.2, для кожного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g} = T_eG$ (тут і далі в розділі $n = \dim G$) відповідні лівоінваріантні векторні поля $\{X_i \coloneqq X_{e_i}\}_{i=1}^n$ утворюють *глобальний базис* *векторних полів* на групі Лі G (у сенсі означення 13.1 для тривіального розподілу $a \in G \mapsto T_aG$), тобто їхні значення утворюють базис дотичного простору у кожній точці G. Нехай тепер $\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ – дуальний базис лінійних форм (функціоналів) на $\mathfrak{g}$, тобто $\alpha^i(e_j) = \delta^i_j$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$ (символ Кронекера, 1 при $i = j$ і 0 при $i \neq j$). Вони однозначно визначаються цими умовами та дійсно утворюють базис спряженого простору $\mathfrak{g}^*$ (за необхідності перевірте це). Покладемо $\omega^i \coloneqq \omega_{\alpha^i}$ для $i = \overline{1, n}$. Тоді $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$ для усіх $i, j = \overline{1, n}$ за наслідком 16.2. Зокрема, це означає, що для кожної $a \in G$ форми $\{\omega^1(a), \dots, \omega^n(a)\}$ утворюють базис $(T_aG)^*$, що є дуальним до базиса $\{X_1(a), \dots, X_n(a)\}$ простору T_aG. Тому можемо назвати $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ *глобальним базисом* 1-*форм* на G, що *дуальний* до глобального базиса $\{X_1, \dots, X_n\}$ векторних полів. При цьому форми цього базиса однозначно визначені умовами $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$ (чому?).

Твердження 16.1 (Рівняння Маурера – Картана)**.** *Нехай* $\{C^k_{ij}\}^n_{i,j,k=1} \subset \mathbb{R}$ *– структурні константи алгебри Лі* $\mathfrak{g}$ *групи Лі* G *у базисі* $\{e_1, \dots, e_n\}$, *а* $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ *– глобальний базис* 1*-форм на* G*, що дуальний до глобального базиса векторних полів* $\{X_1, \dots, X_n\}$*, де* $X_i \coloneqq X_{e_i}$*,* $i = \overline{1, n}$*. Тоді*

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} C^k_{ij}\, \omega^i \wedge \omega^j \tag{16.4}$$

для будь-якого $k = \overline{1, n}$*.*

Доведення. Умова на $\{C^k_{ij}\}^n_{i,j,k=1}$ означає, що

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C^k_{ij} e_k$$

для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$ за означенням структурних констант. Тоді з твердження 9.1 та лінійності у наслідку 6.1 випливає, що

$$[X_i, X_j] = [X_{e_i}, X_{e_j}] = X_{[e_i, e_j]} = \sum_{k=1}^{n} C^k_{ij} X_{e_k} = \sum_{k=1}^{n} C^k_{ij} X_k$$

для будь-яких i та j (це випливає й безпосередньо з наслідку 11.6). З цього розкладення і наведеної вище формули для диференціала лівоінваріантної 1-форми маємо, що

$$d\omega^k(X_l, X_m) = -\frac{1}{2}\omega^k([X_l, X_m]) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{o=1}^{n} C^o_{lm}\,\omega^k(X_o) = -\frac{1}{2}\sum_{o=1}^{n} C^o_{lm}\delta^k_o = -\frac{1}{2}C^k_{lm}$$

для будь-яких $k, l, m = \overline{1, n}$. З іншого боку,

$$\omega^i \wedge \omega^j\,(X_l, X_m) = \frac{1}{2}(\omega^i(X_l)\,\omega^j(X_m) - \omega^i(X_m)\,\omega^j(X_l)) = \frac{1}{2}(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l)$$

для будь-яких $i, j, l, m = \overline{1, n}$ за формулою (16.3) (при $l = 2$ у позначеннях тієї формули). Цей вираз дорівнює $\frac{1}{2}$ при $i = l \neq j = m$, $-\frac{1}{2}$ при $i = m \neq j = l$ та 0 у решті випадків. Тоді

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C^k_{ij}\,\omega^i \wedge \omega^j\,(X_l, X_m) = -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} C^k_{ij}(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l) =$$

$$= -\frac{1}{4}C^k_{lm} + \frac{1}{4}C^k_{ml} = -\frac{1}{2}C^k_{lm} = d\omega^k(X_l, X_m)$$

для будь-яких l та m. Тут використали кососиметричність структурних констант $C^k_{lm} = -C^k_{ml}$, що випливає з їх означення та антикомутативності дужки Лі (див. також вправу 11.1). Оскільки $\{X_1, \ldots, X_n\}$ є глобальним базисом векторних полів, звідси за лінійністю дії форми на векторні поля й випливає потрібна рівність форм.

∎

Ці рівняння насправді не є специфічними для груп Лі: вони вірні й для довільного локального базиса $\{X_1, \ldots, X_n\}$ гладких векторних полів на відкритій підмножині U довільного гладкого многовида M (знову в сенсі означення 13.1 для тривіального розподілу) та дуального локального базиса $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ гладких 1-форм на U, що однозначно визначений умовами $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$, $i, j = \overline{1, n}$. Різниця лише в локальності та тому, що тепер константи $\{C^k_{ij}\}^n_{i,j,k=1} \subset \mathbb{R}$ у рівняннях (16.4) треба замінити на функції $\{f^k_{ij}\}^n_{i,j,k=1} \subset C^\infty(U)$ такі, що для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} f^k_{ij} X_k$$

на U (перевірте це, переконавшися, що доведення твердження 16.1 працює і в цьому контексті). Пор. також зі структурними рівняннями Картана з диференціальної геометрії (див., наприклад, [26, с. 80-82]).

Вправа 16.3. Показати, що рівність $d^2\omega \coloneqq d(d\omega) = 0$ (що вірна для будь-якої зовнішньої гладкої k-форми ω на будь-якому гладкому многовиді) у випадку лівоінваріантної зовнішньої k-форми ω на групі Лі випливає з тотожності Якобі (принаймні для $k = 1$). І навпаки, показати, що зі справедливості умови $d^2\omega = 0$ для будь-якої лівоінваріантної 1-форми ω на групі Лі випливає тотожність Якобі, що дає ще один спосіб довести наслідок 9.2.

Вправа 16.4. Показати, що якщо зовнішня k-форма ω на групі Лі є лівоінваріантною та правоінваріантною (т. зв. *біінваріантною*), то вона *замкнена*, тобто $d\omega = 0$. Чи вірне обернене твердження, тобто чи є будь-яка замкнена лівоінваріантна зовнішня k-форма на групі Лі також правоінваріантною? Див. [7, с. 308-309, 312-314] або [16, с. 141] (номери сторінок тут і далі дані за новішим перекладом), пор. також з обговоренням біінваріантних ріманових метрик у розділі 18 нижче.

У [16, с. 142-146] показано, як лівоінваріантні 1-форми та рівняння Маурера – Картана можна застосувати до доведення оригінальної третьої теореми Лі. Також інваріантні зовнішні форми можна використати для обчислення когомологій (де Рама) компактних груп Лі, як продемонстровано у [7, с. 304-314]. Виявляється, що це обчислення зводиться до дослідження кососиметричних форм на алгебрі Лі даної групи, які відповідають біінваріантним, а отже замкненим в силу вправи 16.4, формам на групі. Зокрема, за допомогою цієї техніки можна встановити, що на сфері S^n існує структура групи Лі тоді й тільки тоді, коли $n = 0$, 1 або 3 (див. також обговорення після наслідку 6.2). У [36, с. 397-407, 420-426] наведена лінійно-алгебраїчна конструкція *когомологій алгебри Лі* та показана ізоморфність цих когомологій та когомологій де Рама відповідної однозв'язної групи Лі, що обчислюються за допомогою лівоінваріантних форм, як згадано вище. Далі у [36] описується, як техніку когомологій алгебр Лі можна застосувати до доведення теореми Адо.

Вправа 16.5. Узагальнити поняття ліво- та правоінваріантності на довільні тензорні поля на групі Лі та дослідити їх властивості за аналогією з векторними полями та k-формами.

17 Інваріантні ріманові метрики на групах Лі

Нашим першим об'єктом вивчення в геометричній частині курсу будуть ріманові метрики на групах Лі. Враховуючи матеріал попереднього розділу, природно буде розглянути метрики на них, що є інваріантними формами. Мотивацією для цього буде, зокрема, бажання звести деякі диференціально-геометричні задачі до лінійно-алгебраїчних у термінах алгебр Лі, аналогічно до того, як у попередніх кількох розділах у таких термінах описувалися загальні структури, що пов'язані з групами Лі.

У цьому розділі, як і раніше, G – деяка n-вимірна група Лі, а $T_eG = \mathfrak{g}$ – її алгебра Лі. Ріманову метрику на G будемо зазвичай позначати через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а її значення у точці $a \in G$ – через $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$. Таким чином, $\langle\cdot,\cdot\rangle_a\colon T_aG \times T_aG \to \mathbb{R}$ – евклідовий скалярний добуток на T_aG, тобто білінійна симетрична додатно визначена форма, для кожної $a \in G$. Через $|\cdot|_a$ позначатимемо евклідову норму, що відповідає скалярному добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$: $|x|_a \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle_a}$ для будь-якого $x \in T_aG$.

Означення 17.1. Ріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на групі Лі G зветься *лівоінваріантною* (відповідно, *правоінваріантною*), якщо вона є лівоінваріантною (правоінваріантною) 2-формою. Метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ зветься *біінваріантною*, якщо вона лівоінваріантна і правоінваріантна.

Зазвичай від ріманової метрики вимагають також гладкість, але будь-яка лівоінваріантна (правоінваріантна, біінваріантна) метрика автоматично є гладкою в силу вправи 16.1 (та її аналога для правоінваріантних форм). Умови з означення 16.1 у нашому випадку набувають вигляду

$$\langle x, y\rangle_b = \langle d_bL_a(x), d_bL_a(y)\rangle_{ab}$$

для лівоінваріантної метрики та

$$\langle x, y\rangle_b = \langle d_bR_a(x), d_bR_a(y)\rangle_{ba}$$

для правоінваріантної, де $a, b \in G$, $x, y \in T_bG$ довільні. Отже, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ лівоінваріантна (відповідно, правоінваріантна) тоді й тільки тоді, коли $d_bL_a\colon T_bG \to T_{ab}G$ ($d_bR_a\colon T_bG \to T_{ba}G$) для усіх $a, b \in G$ є лінійними ізометріями евклідових просторів (зі значеннями метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ у відповідних точках). Як було зауважено після означення 16.1, ці умови можна також скорочено записати у термінах кодиференціалів: $(L_a)^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$ ($(R_a)^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$) для будь-якого $a \in G$. Разом з дифеоморфністю L_a (R_a), що випливає з твердження 3.1, вони означають, що усі L_a (R_a) є ізометріями цієї метрики.

Наслідок 17.1. *Ріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на групі Лі G є лівоінваріантною (відповідно, правоінваріантною) тоді й тільки тоді, коли $L_a\colon G \to G$ ($R_a\colon G \to G$) є ізометрією ріманового многовида $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ на себе для будь-якого $a \in G$.*

Знову ж, оскільки міркування для лівоінваріантних та правоінваріантних метрик майже дослівно повторюються, далі у цьому розділі будемо говорити лише про лівоінваріантні. З обговорення лівоінваріантних форм на початку розділу 16 випливає, що будь-яка лівоінваріантна метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ однозначно визначена своїм значенням $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ у одиниці (а також своїм значенням в будь-якій точці G). І навпаки: якщо $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – евклідовий скалярний добуток на $T_eG = \mathfrak{g}$, то вираз із рівняння (16.1)

$$\langle x, y\rangle_a \coloneqq \omega_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(a)(x, y) = \langle d_aL_{a^{-1}}(x), d_aL_{a^{-1}}(y)\rangle, \tag{17.1}$$

де $a \in G$, $x, y \in T_aG$ довільні, за наслідком 16.1 задає гладку лівоінваріантну 2-форму $\langle\cdot,\cdot\rangle = \omega_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ на G, значенням якої в одиниці є $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Те, що ця форма позначається так само, як її значення у одиниці, створює певні незручності, але не дуже значні, та є традиційним. Більш того, ця форма є симетричною, бо для будь-яких $a \in G$, $x, y \in T_aG$

$$\langle x, y\rangle_a = \langle d_aL_{a^{-1}}(x), d_aL_{a^{-1}}(y)\rangle = \langle d_aL_{a^{-1}}(y), d_aL_{a^{-1}}(x)\rangle = \langle y, x\rangle_a$$

за симетричністю скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Також для усіх $a \in G$ і ненульових векторів $x \in T_aG$

$$\langle x, x\rangle_a = \langle d_aL_{a^{-1}}(x), d_aL_{a^{-1}}(x)\rangle > 0,$$

оскільки $d_aL_{a^{-1}}(x) \neq 0$ (бо диференціали дифеоморфізмів є лінійними ізоморфізмами), а скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ додатно визначений. Таким чином, форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ додатно визначена для кожного a. Все це означає, що форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є рімановою метрикою. Разом із наслідком 16.1 це дозволяє зробити наступний висновок.

Наслідок 17.2. *Відповідність $\langle\cdot,\cdot\rangle \mapsto \omega_{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \langle\cdot,\cdot\rangle$ задає бієкцію між множинами евклідових скалярних добутків на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ групи Лі G та лівоінваріантних ріманових метрик на G. Зокрема, на будь-якій групі Лі існує лівоінваріантна ріманова метрика.*

Зауважимо, що ці множини вже не будуть векторними просторами: цьому заважає умова додатної визначеності. Втім, бієкція так само має властивість лінійності. Таким чином, вивчення лівоінваріантних метрик на G можна, як ми й сподівалися, звести до вивчення скалярних добутків на $\mathfrak{g}$. Лінійно-алгебраїчний об'єкт, який при цьому виникає, пару $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ зі скінченновимірної алгебри Лі над $\mathbb{R}$ і евклідового скалярного добутку на ній, інколи називають *метричною* (або *евклідовою*) *алгеброю Лі*.

Вправа 17.1. Вивести з основної теореми теорії Лі та попереднього наслідку, що для кожної метричої алгебри Лі $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ існує і єдина з точністю до ізоморфізма груп Лі, що є ізометрією ріманових многовидів, однозв'язна група Лі G з лівоінваріантною рімановою метрикою $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ така, що її алгебра Лі T_eG ізоморфна $\mathfrak{g}$, причому ізоморфізм алгебр Лі є ізометрією скалярних добутків $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_e$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Наслідок 16.2 і вправа 16.2 дають ще один критерій: ріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на групі Лі G лівоінваріантна тоді й тільки тоді, коли значення $\langle X, Y\rangle$ постійне для будь-яких лівоінваріантних векторних полів X та Y на G. Якщо при цьому метрика задається скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}$, $X = X_x$ і $Y = X_y$ для $x, y \in \mathfrak{g}$, то $\langle X, Y\rangle = \langle x, y\rangle$. Це разом з наслідком 11.6 означає наступне.

Наслідок 17.3. *Будь-яка лівоінваріантна ріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на групі Лі G задає евклідовий скалярний добуток на алгебрі Лі лівоінваріантних векторних полів на G такий, що ізоморфізм $x \mapsto X_x$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ групи G зі скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ на цю алгебру Лі є ізометрією. І навпаки, будь-який евклідовий скалярний добуток на алгебрі Лі лівоінваріантних векторних полів на G заданий деякою однозначно визначеною лівоінваріантною рімановою метрикою на G.*

Друге твердження тут вірне, бо будь-який такий скалярний добуток ми можемо спочатку перенести на $\mathfrak{g}$ за допомогою ізоморфізма $x \mapsto X_x$, а потім побудувати лівоінваріантну метрику на G за цим скалярним добутком (відновіть деталі самостійно). Евклідову норму, що відповідає скалярному добутку з попереднього наслідку, стандартно позначатимемо через $|\cdot|$: $|X| := \sqrt{\langle X, X\rangle}$ для будь-якого лівоінваріантного поля X.

Згадаємо, що одним зі способів побудови евклідового скалярного добутку на деякому скінченновимірному дійсному векторному просторі є задання його ортонормованого базиса. А саме, для будь-якого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ існує і єдиний скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ такий, що для нього цей базис ортонормований, тобто $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ для будь-яких $i, j = \overline{1, n}$ (за необхідності перевірте це). Зробивши це з якимось базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$, отримаємо скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}$, за яким побудуємо лівоінваріантну метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на G. Якщо тепер покласти $X_i := X_{e_i}$ для кожного $i = \overline{1, n}$, то, як пояснювалося перед формулюванням твердження 16.1, набір $\{X_1, \dots, X_n\}$ буде глобальним базисом векторних полів. Більш того, в алгебрі Лі лівоінваріантних векторних полів на G він буде базисом у звичайному сенсі (бо $x \mapsto X_x$ – лінійний ізоморфізм). Оскільки $\langle X_i, X_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ для усіх i та j за наслідком 17.3, цей базис також ортонормований. Звичайно, в силу згаданого наслідку ми могли не робити ці проміжні кроки, замість цього відразу однозначно задавши лівоінваріантну метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ якимось базисом лівоінваріантних векторних полів $\{X_1, \dots, X_n\}$ на G, який вона перетворить на ортонормований. Зокрема, для кожної $a \in G$ тоді $\langle X_i(a), X_j(a)\rangle_a = \delta_{ij}$ для усіх i та j, тобто $\{X_1(a), \dots, X_n(a)\}$ – ортонормований базис для скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ на T_aG.

Приклад 17.1. Розглянемо *тривимірну групу Гейзенберга*, яку ми представимо як матричну групу Лі

$$\mathrm{Nil} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Це дійсно група (точніше, підгрупа $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, бо визначники таких матриць дорівнюють 1), оскільки добуток будь-яких двох елементів цієї множини дорівнює

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+u & z+w+xv \\ 0 & 1 & y+v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nil},$$

і звідси неважко отримати вигляд оберненого до довільного елемента Nil:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & -z+xy \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nil}.$$

Ця група є тривимірним афінним підпростором 9-вимірного простору матриць $\mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$, тому відповідність

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z)$$

задає її дифеоморфізм на $\mathbb{R}^3$. Далі за необхідності ми будемо їх ототожнювати. Зокрема, Nil є тривимірним гладким многовидом, а (x, y, z) – глобальними координатами на ньому. У них згідно з отриманим вище відображення добутку і взяття оберненого мають вигляд

$$\mu \colon ((x, y, z), (u, v, w)) \mapsto (x+u, y+v, z+w+xv),$$

$$\iota \colon (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z+xy).$$

Вони гладкі, тому Nil є групою Лі. Оскільки це підпростір у $\mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$, Nil є вкладеним підмноговидом у $\mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ і $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, отже вкладеною підгрупою Лі. Також це вкладена підгрупа Лі у $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$, хоча б тому, що замкнена (чому?), а отже до неї можна застосувати теорему Картана. Вигляд добутку у цій групі нагадує дещо "погіршену" операцію звичайної абелевої $\mathbb{R}^3$. Але, як побачимо далі, це "незначне погіршення" групової структури призводить до драматичних геометричних відмінностей! Лівоінваріантні метрики на абелевій $\mathbb{R}^n$, що усі є евклідовими (чому?), ми розглянемо у наступному розділі (див. приклади 18.1 та 18.3), а тут почнемо будувати таку на групі Лі Nil.

Алгеброю Лі групи Nil за формулою (5.1) є

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}'(t_0) \;\middle|\; x, y, z \in C^\infty((\alpha, \beta), \mathbb{R})\colon x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \varkappa & \nu \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \varkappa, \lambda, \nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Далі позначатимемо її через $\mathfrak{nil}$. Зауважимо, що це дійсно підпростір $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, бо сліди таких матриць нульові, та підалгебра Лі, бо це алгебра Лі підгрупи Лі (це буде випливати й безпосередньо з обчислення дужок Лі її базисних векторів нижче). У якості базиса цієї алгебри Лі природним буде обрати вектори

$$e_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Серед попарних дужок Лі елементів цього базиса ненульовими є лише

$$[e_1, e_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_3 = -[e_2, e_1]$$

(перевірте, що інші дійсно нульові). Таким чином, у цьому базисі $C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1$, а решта структурних констант цієї алгебри Лі нульові. З прикладу 6.1 випливає, що лівоінваріантні векторні поля, які відповідають базисним векторам, мають вигляд

$$X_1 = X_{e_1}\colon \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = X_{e_2}\colon \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = X_{e_3}\colon \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Елементи глобального базиса векторних полів $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$, що відповідає глобальним координатам (x, y, z), є у кожній точці дотичними векторами до відповідних координатних ліній, тобто

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & t & z_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

і аналогічно

$$\frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(зауважимо, що на відміну від $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathfrak{nil}$ це визначені на всьому многовиді Nil векторні поля, що дорівнюють e_1, e_2, e_3 відповідно в одиниці групи). Таким чином, елементи глобального базиса лівоінваріантних полів на Nil, що відповідає базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебри Лі $\mathfrak{nil}$, мають вигляд

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\,\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{17.2}$$

Зауважимо, що $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3$, а решта попарних дужок Лі цих полів нульові. Саме так і повинно бути за твердженням 9.1, якщо врахувати обчислені вище попарні дужки Лі базисних векторів. Згідно зі сказаним перед даним прикладом, якщо задати на $\mathfrak{nil}$ скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ортонормованим базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$, то $\{X_1, X_2, X_3\}$ буде ортонормованим базисом лівоінваріантних векторних полів для відповідної лівоінваріантної метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$. У подальшому будемо розглядати на Nil саме таку стандартну метрику. Цікаво, що поля X_1 та X_2 нам уже зустрічалися в прикладі 13.4, де вони задавали стандартну контактну структуру на $\mathbb{R}^3$. Це спостереження означає, що ця структура (тобто розподіл) є лівоінваріантною відносно структури групи Лі Nil на $\mathbb{R}^3$.

Вправа 17.2. Визначити поняття "лівоінваріантний розподіл". Якою інформацією про такий розподіл він визначений однозначно (аналогічно до полів та форм)? Де ще у цьому курсі крім прикладу 13.4 зустрічався такий об'єкт?

Отже, нехай $\{X_1,\ldots,X_n\}$ – якийсь ортонормований базис лівоінваріантних векторних полів лівоінваріантної ріманової метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на групі Лі G. Як у обговоренні перед формулюванням твердження 16.1, побудуємо для нього дуальний базис форм $\{\omega^1,\ldots,\omega^n\}$, елементи якого є лівоінваріантними 1-формами, що однозначно визначені умовами дуальності $\omega^i(X_j)=\delta^i_j$ для будь-яких $i,j=\overline{1,n}$. До речі, цей базис є базисом простору лівоінваріантних 1-форм на G у звичайному сенсі. З умов дуальності та умов ортонормованості $\langle X_i,X_j\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ для усіх $i,j=\overline{1,n}$ випливає, що

$$\langle\cdot,\cdot\rangle=\sum_{i=1}^{n}(\omega^i)^2, \tag{17.3}$$

де $(\omega^i)^2$ позначає *симетричний квадрат*, тобто симетричний добуток 1-форми ω^i на себе: $(\omega^i)^2(X,Y)=\omega^i(X)\,\omega^i(Y)$ для будь-яких гладких векторних полів X та Y на G. Дійсно, ці дві форми однаково діють на поля з базиса $\{X_1,\ldots,X_n\}$, а отже й на будь-які інші (перевірте це). Це вірно й для дуального базиса 1-форм до локального ортонормованого базису векторних полів будь-якої ріманової метрики на гладкому многовиді.

Зауважимо також, що група Лі G є орієнтовною, як і будь-який паралелізовний гладкий многовид (див. наслідок 6.2). А саме, кожен глобальний базис лівоінваріантних векторних полів коректно задає орієнтації на усіх її дотичних просторах, що неперервно змінюються від точки до точки, а отже й орієнтацію на G. Задамо її нашим ортонормованим базисом $\{X_1,\ldots,X_n\}$. Тоді, зокрема, для метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ коректно визначена ріманова форма об'єму, яку ми будемо традиційно позначати через dV ($dV_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, якщо треба підкреслити, про яку метрику йдеться) і яка дорівнює

$$dV=\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^n. \tag{17.4}$$

Знову ж, це вірно (взагалі кажучи, локально) для будь-якого орієнтованого ріманового многовида. Перевірте цю рівність самостійно, порівнявши, наприклад, значення цих форм від аргументів $X_1,\ldots,X_n$, які повинні дорівнювати $\frac{1}{n!}$ (чому і чому цього буде достатньо?). Ця форма є лівоінваріантною за наслідком 16.3 як зовнішній добуток лівоінваріантних 1-форм. Більш того, рімановий об'єм кубовних (вимірних за Жорданом) підмножин G буде інваріантним відносно лівих зсувів L_a для усіх $a\in G$, оскільки L_a є ізометріями. А саме, за означенням ріманового об'єму

$$Vol(A)=\int\limits_A dV=\int\limits_{L_a(A)}(L_{a^{-1}})^*dV=\int\limits_{L_a(A)}dV=Vol\left(L_a(A)\right)$$

для будь-якої кубовної $A \subset G$, що й означає інваріантність. Друга рівність тут випливає з формули заміни змінних у інтегралі Рімана (перевірте це). Використаємо тепер наступну загальну теорему з теорії міри.

Теорема 17.1 (Ріса – Маркова – Какутані про представлення)**.** *Нехай X – локально компактний хаусдорфовий топологічний простір, а φ – невід'ємний лінійний функціонал на просторі фінітних неперервних функцій $C_c(X)$, тобто лінійне відображення $C_c(X) \to \mathbb{R}$ таке, що $\varphi(f) \geqslant 0$ для будь-якої $f \geqslant 0$. Тоді існує і єдина міра Радона μ на X така, що*

$$\varphi(f) = \int\limits_X f\,d\mu$$

для будь-якої $f \in C_c(X)$.

Доведення. Див. [23, с. 217-220] (сторінки дані за перекладом). ■

Нагадаємо, що група Лі G є локально компактною і хаусдорфовою, бо це многовид. Застосовуючи цю теорему до функціонала $\varphi\colon f \mapsto \int\limits_X f\,dV$, що визначений на фінітних неперервних функціях, лінійний і невід'ємний, отримаємо міру Радона μ на G таку, що, зокрема,

$$\mu(A) = \int\limits_X \chi_A\,d\mu = \varphi(\chi_A) = \int\limits_X \chi_A\,dV = \int\limits_A dV = Vol(A)$$

для будь-якої кубовної $A \subset G$, де χ_A – характеристична функція A (з доведення попередньої теореми можна вивести, що рівність з її формулювання у нашому випадку вірна й для будь-яких фінітних інтегровних за Ріманом функцій, не тільки неперервних), тобто міра μ продовжує рімановий об'єм Vol на борелівські підмножини G. Крім того, для будь-якого $a \in G$ з єдиності у цій теоремі та отриманої вище рівності $Vol = Vol \circ L_a$ випливає (як саме?), що $\mu = \mu \circ L_a$, тобто що $\mu(A) = \mu\left(L_a(A)\right)$ для будь-якої борелівської $A \subset G$. Це означає, що міра Радона μ теж лівоінваріантна, тобто є лівою мірою Хаара. З єдиності з точністю до множення на невід'ємне (якщо включати й нульову міру) число у теоремі 3.2 Хаара випливає тоді наступне.

Наслідок 17.4. *Будь-яка ліва міра Хаара на групі Лі G є з точністю до множення на невід'ємне число продовженням за теоремою 17.1 ріманового об'єму деякої лівоінваріантної ріманової метрики на G.*

Таким чином, ми отримали конкретну конструкцію міри Хаара на будь-якій групі Лі. З єдиності у теоремі Хаара випливає також, що неважливо, яку саме лівоінваріантну метрику на G при цьому використовувати: обравши одну, множачи її на невід'ємні константи і виконуючи описані вище процедури, ми отримаємо усі ліві міри Хаара на G.

Приклад 17.2. Продовжимо розглядати групу Лі Nil з прикладу 17.1 і введену там лівоінваріантну метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$. З формул (17.2) і умов $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$ для будь-яких i та j випливає, що дуальний до $\{X_1, X_2, X_3\}$ базис лівоінваріантних 1-форм має вигляд

$$\omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy, \quad \omega^3 = dz - x\,dy.$$

(перевірте це). Зауважимо, що з цих форм ненульовий диференціал має лише ω^3, і для неї з опису структурних констант $\mathfrak{nil}$ у прикладі 17.1 маємо

$$d\omega^3 = -dx \wedge dy = -\frac{1}{2}(dx \wedge dy - dy \wedge dx) = -\frac{1}{2}(C^3_{12}\,\omega^1 \wedge \omega^2 + C^3_{21}\,\omega^2 \wedge \omega^1),$$

тобто рівняння (16.4) Маурера – Картана дійсно виконуються (нульові доданки ми тут не виписували; також для $d\omega^1$ і $d\omega^2$ це просто рівності $0 = 0$). Крім того, з рівняння (17.3) отримуємо вигляд метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ у глобальних координатах (x, y, z):

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - x\,dy)^2 =$$

$$= dx^2 + (1 + x^2)dy^2 - 2x\,dy\,dz + dz^2.$$

Вправа 17.3. Вивести цю формулу безпосередньо з опису (17.1) лівоінваріантної метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$, знайшовши матриці диференціалів $d_A L_{A^{-1}}$ для елементів $A \in \mathrm{Nil}$ у базисі $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$.

Нарешті, ріманова форма об'єму нашої метрики на Nil згідно з формулою (17.4) має вигляд

$$dV = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = dx \wedge dy \wedge (dz - x\,dy) = dx \wedge dy \wedge dz.$$

Це евклідова форма об'єму, тобто рімановий об'єм будь-якої кубовної підмножини $A \subset \mathrm{Nil}$ дорівнює її евклідовому об'єму у E^3. Оскільки з евклідового об'єму за конструкцією з теореми 17.1 отримуємо міру Лебега на $\mathbb{R}^3$ (чому?), з наслідку 17.4 випливає, що усі ліві міри Хаара на Nil мають вигляд $\lambda\,\mu$, де μ – міра Лебега, а $\lambda \geqslant 0$. За обговоренням після цього наслідку, ми б отримали той самий результат, починаючи з будь-якої лівоінваріантної метрики на Nil.

Мотивуючись наслідком 16.2 і вправою 16.2, визначимо лівоінваріантність для афінних зв'язностей на групах Лі наступним чином.

Означення 17.2. Афінна зв'язність $\nabla\colon \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$ на групі Лі G зветься *лівоінваріантною*, якщо для будь-яких лівоінваріантних векторних полів X та Y на G поле $\nabla_X Y$ також лівоінваріантне.

Твердження 17.1. *Ріманова зв'язність (зв'язність Леві-Чивіти) ∇ будь-якої лівоінваріантної ріманової метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на групі Лі G лівоінваріантна. При цьому*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left([X, Y] - ad_X^* Y - ad_Y^* X\right)$$

і зокрема

$$\nabla_X X = -ad_X^* X$$

для будь-яких лівоінваріантних векторних полів X та Y на G.

Тут і далі ми неявно використовуватимемо у формулюваннях і обчисленнях вже згадану вище канонічну ізоморфність алгебр Лі лівоінваріантних полів на G і $\mathfrak{g}$ з наслідку 11.6, що забезпечується ізоморфізмом $X_x \mapsto x$. Зокрема, в силу цієї ізоморфності та означення 12.8 приєднані представлення цих алгебр Лі відповідають одне одному (у якому сенсі?), і для лівоінваріантних полів це представлення задається формулою $ad_X Y = [X, Y]$ для будь-яких X, Y. Тоді, оскільки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ є евклідовим скалярним добутком на лівоінваріантних полях за наслідком 17.3, у оператора приєднаного представлення ad_X для кожного X визначений спряжений відносно цього скалярного добутку оператор ad_X^* умовою

$$\langle ad_X^* Y, Z \rangle = \langle Y, ad_X Z \rangle = \langle Y, [X, Z] \rangle. \qquad (17.5)$$

Зауважимо також, що кожне лівоінваріантне поле однозначно визначене своїми добутками на інші лівоінваріантні поля (або лише на базисні) за властивістю скалярного добутку.

Доведення. Використаємо *формулу Кошуля* з ріманової геометрії (див, наприклад, [9, с. 43]). Згідно з нею, ріманова зв'язність ∇ будь-якої ріманової метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на гладкому многовиді M задовольняє умові

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X(\langle Y, Z \rangle) + Y(\langle Z, X \rangle) - Z(\langle X, Y \rangle) +$$

$$+ \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle$$

для будь-яких гладких векторних полів X, Y і Z на M. Зокрема, саме з цієї формули можна вивести, що у будь-якої ріманової метрики існує та єдина ріманова зв'язність (як саме?).

Застосуємо цю формулу до нашої лівоінваріантної метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на G, її ріманової зв'язності ∇ та лівоінваріантних полів X, Y і Z на G. Оскільки $X(\langle Y, Z\rangle)$ означає тут диференціювання функції $\langle Y, Z\rangle$ за напрямком поля Z, а ця функція постійна в силу наслідку 17.3, цей член правої частини формули Кошуля дорівнює нулю, і аналогічно два наступних. Отже, у нас залишається рівність

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle [X,Y], Z\rangle + \langle -ad_X Z, Y\rangle - \langle ad_Y Z, X\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\langle [X,Y] - ad_X^* Y - ad_Y^* X, Z\rangle$$

за формулою для приєднаного представлення та рівністю (17.5). Зокрема, цей вираз постійний, бо є скалярним добутком лівоінваріантних полів. Якщо тепер у якості Z взяти базисні лівоінваріантні поля X_i якогось ортонормованого базиса $\{X_1, \ldots, X_n\}$ для усіх $i = \overline{1,n}$ (скажімо, $X_i := X_{e_i}$ для кожного i, де $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – якийсь ортонормований базис $\mathfrak{g}$, як у обговоренні перед прикладом 17.1) і покласти $\lambda^i := \langle \nabla_X Y, X_i\rangle \in \mathbb{R}$ для кожного i, то, використовуючи властивість ортонормованого базису у кожній точці (як саме?), отримаємо, що $\nabla_X Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^i X_i$, а отже це поле є лівоінваріантним як лінійна комбінація лівоінваріантних (за наслідком 6.1). Оскільки його скалярні добутки на будь-яке лівоінваріантне поле Z дорівнюють таким для $\frac{1}{2}\left([X,Y] - ad_X^* Y - ad_Y^* X\right)$, ці лівоінваріантні поля рівні, як зауважувалося перед доведенням, тобто отримали потрібне твердження. Друга формула випливає з першої, бо $[X,X] = 0$ за антикомутативністю.

■

Наслідок 17.5. *Значення оператора (тензора) кривини* R *будь-якої лівоінваріантної афінної зв'язності* ∇*, зокрема, ріманової зв'язності лівоінваріантної ріманової метрики на групі Лі* G*, від будь-яких лівоінваріантних векторних полів* X*,* Y *і* Z *на* G

$$\mathrm{R}\,(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{17.6}$$

є лівоінваріантним векторним полем, тобто R *є лівоінваріантним* 3*-коваріантним* 1*-контраваріантним тензорним полем на* G*.*

Це випливає з попередніх означення та твердження. Звичайно, ми не давали означення лівоінваріантності для довільних тензорних полів, але якщо ви вірно виконали вправу 16.5, то цей наслідок повинен узгоджуватися з вашим означенням. Формула (17.6) для оператора кривини відповідає означенню з [9, с. 85] (або [26, с. 130-131]).

Лема 17.1. *Нехай* ∇ *–ріманова зв'язність лівоінваріантної ріманової метрики* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *на групі Лі* G*. Тоді*

$$\langle\nabla_Z X, Y\rangle = -\langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

для будь-яких лівоінваріантних векторних полів X *та* Y *і гладкого векторного поля* Z *на* G*.*

Доведення. Знову скористаємося тим, що функція $\langle X, Y\rangle$ постійна за наслідком 17.3, а отже її похідна $Z(\langle X, Y\rangle)$ нульова. Тоді за означенням ріманової зв'язності (точніше, за умовою її узгодженості з метрикою) маємо потрібне:

$$0 = Z(\langle X, Y\rangle) = \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.$$

■

Твердження 17.2. *Нехай* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *– лівоінваріантна ріманова метрика, а* X *та* Y *– лінійно незалежні лівоінваріантні векторні поля на групі Лі* G*. Тоді секційна кривина метрики* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *у точці* $a \in G$ *в напрямку площини (двовимірного векторного підпростору)* $\operatorname{span}\{X(a), Y(a)\} \subset T_aG$*, що породжена* $X(a)$ *та* $Y(a)$*, не залежить від* a *і дорівнює числу*

$$\mathrm{K}\,(X,Y) \coloneqq \frac{1}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}\left(-\langle ad_X^* X, ad_Y^* Y\rangle + \frac{1}{4}|ad_X^* Y + ad_Y^* X|^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{3}{4}|[X,Y]|^2 - \frac{1}{2}\langle[[X,Y],Y],X\rangle - \frac{1}{2}\langle[[Y,X],X],Y\rangle\right).$$

За властивостями лівоінваріантних полів, X та Y лінійно незалежні тоді й тільки тоді, коли $X(a)$ і $Y(a)$ лінійно незалежні для кожної $a \in G$ (або для деякої $a \in G$; перевірте це), тому усі ці секційні кривини коректно визначені. Зокрема, нормуючий вираз у знаменнику $|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2$ ненульовий для лінійно незалежних X та Y. Формулу з даного твердження можна використовувати й для обчислення секційної кривини метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $a \in G$ у напрямку довільної площини $\sigma \subset T_aG$. Для цього оберемо якийсь базис (тобто пару лінійно незалежних векторів) $\{x, y\} \subset \sigma$ цієї площини і продовжимо вектори x та y лівоінваріантними полями X та Y відповідно на G (тобто такими, що $X(a) = x$, $Y(a) = y$; чому так можна зробити?). Тоді секційна кривина $\langle\cdot,\cdot\rangle$ у напрямку σ дорівнює

$\mathrm{K}\,(X, Y)$ в силу даного твердження. Також можна сказати, що $\mathrm{K}\,(X, Y)$ – це кривина у напрямку двовимірного лівоінваріантного розподілу, що породжений X та Y (як у прикладі 13.4; див. також вправу 17.2).

Доведення. За формулою для секційної кривини ([9, с. 94] або [26, с. 192]), потрібне нам значення для кожної $a \in G$ дорівнює

$$\frac{\langle \mathrm{R}(a)\,(X(a), Y(a))Y(a), X(a)\rangle_a}{|X(a)|_a^2|Y(a)|_a^2 - \langle X(a), Y(a)\rangle_a^2},$$

тобто значенню в точці a функції

$$\mathrm{K}\,(X, Y) = \frac{\langle \mathrm{R}\,(X, Y)Y, X\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

що постійна (не залежить від a) в силу наслідків 17.3 та 17.5. Отже, нам залишилось довести формулу для кривини, перетворивши числівник цього виразу. В силу формул (17.5) і (17.6), твердження 17.1, попередньої леми та антикомутативності, це можна зробити наступним чином:

$$\langle \mathrm{R}\,(X, Y)Y, X\rangle = \langle \nabla_X\nabla_Y Y, X\rangle - \langle \nabla_Y\nabla_X Y, X\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]}Y, X\rangle =$$

$$= -\langle \nabla_Y Y, \nabla_X X\rangle + \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X\rangle - \frac{1}{2}\langle [[X, Y], Y], X\rangle + \frac{1}{2}\langle ad^*_{[X,Y]}Y, X\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\langle ad^*_Y[X, Y], X\rangle = -\langle -ad^*_Y Y, -ad^*_X X\rangle + \frac{1}{4}\langle [X, Y] - ad^*_X Y - ad^*_Y X,$$

$$[Y, X] - ad^*_Y X - ad^*_X Y\rangle - \frac{1}{2}\langle [[X, Y], Y], X\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, [[X, Y], X]\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\langle [X, Y], [Y, X]\rangle = -\langle ad^*_X X, ad^*_Y Y\rangle + \frac{1}{4}|ad^*_X Y + ad^*_Y X|^2 - \frac{1}{4}|[X, Y]|^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\langle [[X, Y], Y], X\rangle - \frac{1}{2}\langle [[Y, X], X], Y\rangle - \frac{1}{2}|[X, Y]|^2,$$

що й дає після приведення подібних потрібну формулу.

■

Наслідок 17.6. *Секційні кривини будь-якої лівоінваріантної рімановою метрики на групі Лі G мають у всіх точках G одну й ту саму множину значень, якою є деякий відрізок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Зокрема, будь-яка така метрика має обмежену зверху та знизу секційну кривину.*

Доведення. Те, що секційні кривини у всіх точках приймають одні й ті самі значення, випливає з попереднього твердження і обговорення після його формулювання, адже кожній площині у дотичному просторі кожної точки $a \in G$ відповідає лівоінваріантний двовимірний розподіл, секційна кривина на значеннні якого в будь-якій іншій точці приймає те ж значення. Те, що в кожній точці a такою множиною є відрізок, вірне для будь-якого ріманового многовида і випливає з того, що секційна кривина є неперервною функцією на множині площин $\sigma \subset T_a G$ (грассманіані), що є компактним зв'язним гладким многовидом (див. обговорення після означення 13.1 а також приклади 22.10 і 23.1 далі в цьому курсі).

■

Твердження 17.3. *Нехай $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – лівоінваріантна ріманова метрика, а X – лівоінваріантне векторне поле на групі Лі G. Будь-яка інтегральна траєкторія X є геодезичною $\langle \cdot, \cdot \rangle$ тоді й тільки тоді, коли $ad_X^* X = 0$.*

Доведення. За означенням інтегральної траєкторії, $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ для кожної такої кривої γ і будь-якого $t \in \mathbb{R}$ (нагадаємо, що областю визначення γ є $\mathbb{R}$ в силу твердження 6.1), отже довжина $|\gamma'(t)|_{\gamma(t)} = |X(\gamma(t))|_{\gamma(t)} = |X(e)|_e$ постійна за наслідком 17.3. Тому γ є геодезичною тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $t \in \mathbb{R}$

$$0 = (\nabla_{\gamma'} \gamma')(t) = (\nabla_X X)(\gamma(t)) = -ad_X^* X,$$

де останній вираз не залежить від t в силу твердження 17.1 (і звідти ж беремо формулу для нього). Також тут використано те, що поле X продовжує визначене уздовж γ векторне поле γ' на весь многовид G, тому коваріантна похідна γ' уздовж кривої може бути обчислена як обмеження $\nabla_X X$ на γ. Таким чином, отримали подібну умову.

■

З доведення також випливає, що умова цього твердження еквівалентна геодезичності деякої інтегральної траєкторії X. Такі геодезичні на групах Лі з лівоінваріантними метриками називають *однорідними.* Як відомо з пункту 2. твердження 7.1, вони мають вигляд $\gamma(t) = a \exp tx$, $t \in \mathbb{R}$, де $a \in G$ довільна, а $x = X(e) \in \mathfrak{g}$ (тобто $X = X_x$). При $a = e$ це однопараметричні підгрупи G.

Приклад 17.3. Повернемося ще раз до групи Лі Nil з прикладів 17.1 та 17.2, розглянутої там лівоінваріантної метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ та її ортонормованого базиса лівоінваріантних векторних полів $\{X_1, X_2, X_3\}$, що задається формулами (17.2). Згадаємо, що $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3$, а решта попарних дужок Лі цих полів нульові. Тоді з рівняння (17.5) випливає, що

$$\langle ad_{X_1}^* X_2, X_1 \rangle = \langle X_2, [X_1, X_1] \rangle = 0,$$

$$\langle ad_{X_1}^* X_2, X_2 \rangle = \langle X_2, [X_1, X_2] \rangle = \langle X_2, X_3 \rangle = 0,$$

$$\langle ad^*_{X_1}X_2, X_3\rangle = \langle X_2, [X_1, X_3]\rangle = 0,$$

отже $ad^*_{X_1}X_2 = 0$, і

$$\langle ad^*_{X_2}X_1, X_1\rangle = \langle X_1, [X_2, X_1]\rangle = -\langle X_2, X_3\rangle = 0,$$

$$\langle ad^*_{X_2}X_1, X_2\rangle = \langle X_1, [X_2, X_2]\rangle = 0,$$

$$\langle ad^*_{X_2}X_1, X_3\rangle = \langle X_1, [X_2, X_3]\rangle = 0,$$

отже $ad^*_{X_2}X_1 = 0$. Тому за твердженням 17.1

$$\nabla_{X_1}X_2 = \frac{1}{2}\big([X_1, X_2] - ad^*_{X_1}X_2 - ad^*_{X_2}X_1\big) = \frac{1}{2}X_3,$$

$$\nabla_{X_2}X_1 = \frac{1}{2}\big([X_2, X_1] - ad^*_{X_2}X_1 - ad^*_{X_1}X_2\big) = -\frac{1}{2}X_3.$$

Аналогічно встановлюємо, що

$$\langle ad^*_{X_1}X_3, X_1\rangle = \langle ad^*_{X_1}X_3, X_3\rangle = 0,$$

бо $[X_1, X_1] = [X_1, X_3] = 0$, і

$$\langle ad^*_{X_1}X_3, X_2\rangle = \langle X_3, [X_1, X_2]\rangle = \langle X_3, X_3\rangle = 1,$$

тому $ad^*_{X_1}X_3 = X_2$ (нагадаємо, що базис $\{X_1, X_2, X_3\}$ ортонормований). Так само маємо

$$\langle ad^*_{X_3}X_1, X_i\rangle = \langle X_1, [X_3, X_i]\rangle = 0$$

для кожного $i = \overline{1, 3}$, тому $ad^*_{X_3}X_1 = 0$, отже

$$\nabla_{X_1}X_3 = \frac{1}{2}\big([X_1, X_3] - ad^*_{X_1}X_3 - ad^*_{X_3}X_1\big) = -\frac{1}{2}X_2,$$

$$\nabla_{X_3}X_1 = \frac{1}{2}\big([X_3, X_1] - ad^*_{X_3}X_1 - ad^*_{X_1}X_3\big) = -\frac{1}{2}X_2.$$

Аналогічно,

$$\langle ad^*_{X_2}X_3, X_1\rangle = \langle X_3, [X_2, X_1]\rangle = -\langle X_3, X_3\rangle = -1,$$

$$\langle ad^*_{X_2}X_3, X_2\rangle = \langle ad^*_{X_2}X_3, X_3\rangle = 0,$$

бо $[X_2, X_2] = [X_2, X_3] = 0$, тому $ad^*_{X_2}X_3 = -X_1$. Також

$$\langle ad^*_{X_3}X_2, X_i\rangle = \langle X_2, [X_3, X_i]\rangle = 0$$

для кожного $i = \overline{1,3}$, тому $ad^*_{X_3}X_2 = 0$, і звідси

$$\nabla_{X_2}X_3 = \frac{1}{2}\big([X_2, X_3] - ad^*_{X_2}X_3 - ad^*_{X_3}X_2\big) = \frac{1}{2}X_1,$$

$$\nabla_{X_3}X_2 = \frac{1}{2}\big([X_3, X_2] - ad^*_{X_3}X_2 - ad^*_{X_2}X_3\big) = \frac{1}{2}X_1.$$

Нарешті,

$$\langle ad^*_{X_i}X_i, X_j\rangle = \langle X_i, [X_i, X_j]\rangle = 0$$

для будь-яких $i, j = \overline{1,3}$ (бо $[X_i, X_j]$ – це або 0, або $\pm X_3$, але тоді $i \neq 3$), а отже для усіх $i = \overline{1,3}$

$$\nabla_{X_i}X_i = -ad^*_{X_i}X_i = 0.$$

Зокрема, всі інтегральні траєкторії полів X_1, X_2 та X_3 будуть геодезичними в силу твердження 17.3.

Вправа 17.4. Знайти вигляд цих траєкторій у групі Nil при ототожненні її з $\mathbb{R}^3$ (це можна зробити, знайшовши експоненційне відображення цієї групи Лі, в силу зауваження перед цим прикладом, але простіше вивести з вигляду полів (17.2)). Показати, що інтегральні траєкторії лівоінваріантного векторного поля $X_1 + X_2$ теж є геодезичними і при цьому не є евклідовими прямими.

Вправа 17.5. Чи існує лівоінваріантне векторне поле на Nil, інтегральні траєкторії якого не є геодезичними? Якщо так, то як вони виглядають у Nil при ототожненні з $\mathbb{R}^3$? Чи є серед них евклідові прямі?

Існування геодезичних, що не є евклідовими прямими, та прямих, що не є геодезичними, демонструє відмінність геометричних властивостей даної метрики від властивостей евклідової.

Тепер обчислимо секційні кривини цієї метрики у напрямку двовимірного розподілу, що визначений двома довільними лінійно незалежними лівоінваріантними полями X та Y. Розкладемо їх за нашим базисом:

$$X = \sum_{i=1}^{3} \mu^i X_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^{3} \nu^i X_i.$$

Позначимо

$$\lambda^1 := \mu^2\nu^3 - \mu^3\nu^2, \quad \lambda^2 := \mu^3\nu^1 - \mu^1\nu^3, \quad \lambda^3 := \mu^1\nu^2 - \mu^2\nu^1.$$

Тобто це координати "стандартного" векторного добутку двох векторів (μ^1, μ^2, μ^3) і (ν^1, ν^2, ν^3) у тривимірному просторі. Зокрема, з формули довжини векторного добутку тоді випливає, що

$$|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2 = |X|^2|Y|^2 - |X|^2|Y|^2\cos^2\varphi =$$
$$= |X|^2|Y|^2\sin^2\varphi = (\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2,$$

де φ – кут між X та Y, і це значення додатне, бо поля лінійно незалежні. Знайдемо тепер числівник формули з твердження 17.2, тобто вираз $\langle \mathrm{R}\,(X, Y)Y, X\rangle$. Перш за все обчислимо дужку Лі:

$$[X, Y] = (\mu^1\nu^2 - \mu^2\nu^1)X_3.$$

Звідси випливає, зокрема, що $[[X, Y], Z] = 0$ для будь-яких лівоінваріантних полів X, Y і Z на Nil, бо дужка Лі X_3 з будь-яким лівоінваріантним полем нульова (алгебри Лі з такою властивістю називають *нільпотентними кроку* 2, детальніше вони будуть обговорюватися у розділі 20). Тому два останніх доданки у формулі для $\langle \mathrm{R}\,(X, Y)Y, X\rangle$ дорівнюють нулю: $-\frac{1}{2}\langle[[X, Y], Y], X\rangle - \frac{1}{2}\langle[[Y, X], X], Y\rangle = 0$. Обчислимо спряжені оператори приєднаного представлення, використавши лінійність та знайдені вище значення для базисних полів:

$$ad^*_X X = -\mu^2\mu^3X_1 + \mu^1\mu^3X_2, \quad ad^*_Y Y = -\nu^2\nu^3X_1 + \nu^1\nu^3X_2,$$
$$ad^*_X Y = -\mu^2\nu^3X_1 + \mu^1\nu^3X_2, \quad ad^*_Y X = -\mu^3\nu^2X_1 + \mu^3\nu^1X_2.$$

Звідси за формулою з твердження 17.2, враховуючи сказане вище, маємо

$$\langle \mathrm{R}\,(X, Y)Y, X\rangle = -\langle ad^*_X X, ad^*_Y Y\rangle + \frac{1}{4}|ad^*_X Y + ad^*_Y X|^2 - \frac{3}{4}|[X, Y]|^2 =$$
$$= -\mu^2\mu^3\nu^2\nu^3 - \mu^1\mu^3\nu^1\nu^3 + \frac{1}{4}(\mu^2\nu^3 + \mu^3\nu^2)^2 + \frac{1}{4}(\mu^1\nu^3 + \mu^3\nu^1)^2 -$$
$$-\frac{3}{4}(\mu^1\nu^2 - \mu^2\nu^1)^2 = \frac{1}{4}(\lambda^1)^2 + \frac{1}{4}(\lambda^2)^2 - \frac{3}{4}(\lambda^3)^2.$$

Таким чином,

$$\mathrm{K}\,(X, Y) = \frac{\langle \mathrm{R}\,(X, Y)Y, X\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} = \frac{\frac{1}{4}((\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2) - \frac{3}{4}(\lambda^3)^2}{(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2}.$$

Цей вираз для усіх можливих пар лівоінваріантних полів X та Y приймає усі значення з проміжку $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$ (чому?). Тоді секційні кривини $\langle\cdot,\cdot\rangle$ у кожній точці Nil будуть змінюватися у цих межах згідно з наслідком 17.6. Отже, Nil з метрикою $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є рімановим многовидом знакозмінної кривини: ця метрика виявилася зовсім не схожою на евклідову.

Вправа 17.6. Знайти тензор Річчі, кривини Річчі та скалярну кривину даної метрики.

Відповідь на останню вправу можна знайти у роботі [32], у розділах 4–6 якої дана повна класифікація тривимірних метричних алгебр Лі, а отже й однозв'язних груп Лі з лівоінваріантними метриками (див. вправу 17.1), з точністю до ізоморфізма, що є ізометрією, у тому числі опис усіх лівоінваріантних метрик на Nil та їхніх геометричних характеристик. А саме, там показано, що для будь-якої такої метрики існує такий ортонормований базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебри Лі $\mathfrak{nil}$, що $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = \lambda e_3$ для деякого дійсного $\lambda > 0$, а решта попарних дужок Лі нульові. Деяка поки що незнайома термінологія, що зустрічається у цій роботі, буде введена у кількох подальших розділах.

Вправа 17.7. Дослідити описану вище загальну лівоінваріантну метрику на Nil за аналогією з дослідженою у прикладах 17.1–17.3 (для якої $\lambda = 1$). Чи відрізняється цей загальний випадок суттєво від вже описаного? Зокрема, у яких межах змінюються секційні кривини такої метрики?

Вправа 17.8. Користуючися отриманою у вправі 11.2 класифікацією двовимірних алгебр Лі (див. також приклад наприкінці лекції 2 у [8]), аналогічно до [32] знайти класифікацію метричних двовимірних алгебр Лі з точністю до ізоморфізма, що є ізометрією. Обчислити секційні (тобто гауссові) кривини відповідних лівоінваріантнихріманових метрик, що повинні бути постійними за наслідком 17.6.

Вправа 17.9. Нехай G – група Лі з лівоінваріантною метрикою $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ – деякий базис алгебри Лі $\mathfrak{g}$ цієї групи, а $\{X_i := X_{e_i}\}_{i=1}^n$ – відповідний базис лівоінваріантних полів (не обов'язково ортонормовний для $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Знайти формули, що виражають (постійні в силу твердження 17.1 та наслідку 17.5) символи Кристоффеля ріманової зв'язності, коефіцієнти тензорів кривини та Річчі у базисі $\{X_1, \dots, X_n\}$ і скалярну кривину метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ через структурні константи $\mathfrak{g}$ та метричні коефіцієнти скалярного добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ у базисі $\{e_1, \dots, e_n\}$ (або, що те ж саме, коефіцієнти $\langle \cdot, \cdot \rangle$ у $\{X_1, \dots, X_n\}$).

18 Біінваріантні ріманові метрики. Унімодулярність

У цьому та трьох наступних розділах будуть розглянуті питання, що пов'язані з біінваріантними метриками та групами Лі, що їх допускають. Ми будемо керуватися переважно розділом 7 роботи [32].

Нехай G – група Лі з алгеброю Лі $T_eG = \mathfrak{g}$. Як було встановлено у попередньому розділі (наслідок 17.2), кожному евклідовому скалярному добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}$ відповідає лівоінваріантна ріманова метрика на G, що позначається теж через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, і навпаки. Згідно з означенням 17.1, ця метрика буде біінваріантною тоді й тільки тоді, коли вона правоінваріантна. Згідно з наслідком 17.1, це еквівалентне тому, що відображення правого зсуву R_a є ізометрією для будь-якого $a \in G$, тобто що d_bR_a є лінійною ізометрією для будь-яких $a, b \in G$ (нагадаємо, що усі R_a є дифеоморфізмами за твердженням 3.1). Нашою першою метою буде переписати цю умову в термінах скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$: будь-який скалярний добуток задає лівоінваріантну метрику, але не будь-який – біінваріантну.

Лема 18.1. *Лівоінваріантна ріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на групі Лі G буде біінваріантною тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $a \in G$ існує точка $b \in G$ така, що d_bR_a – лінійна ізометрія. Зокрема, метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є біінваріантною тоді й тільки тоді, коли d_eR_a – лінійна ізометрія для усіх $a \in G$.*

Доведення. Необхідність у першій з цих рівносильностей випливає зі згаданого вище наслідку 17.1. Доведемо достатність. Нехай відомо, що d_bR_a – лінійна ізометрія. Згідно з наслідком 17.1, потрібно перевірити, що d_cR_a теж буде лінійною ізометрією для будь-якої $c \in G$. Позначимо $d := bc^{-1}$, тобто $b = dc = L_dc$. Для будь-якого $f \in G$ маємо очевидну рівність $R_af = fa = d^{-1}dfa = L_{d^{-1}} \circ R_a \circ L_d(f)$, що означає $R_a = L_{d^{-1}} \circ R_a \circ L_d$. Тоді за ланцюговим правилом

$$d_cR_a = d_{R_a(L_dc)}L_{d^{-1}} \circ d_{L_dc}R_a \circ d_cL_d = d_{ba}L_{d^{-1}} \circ d_bR_a \circ d_cL_d,$$

тому d_cR_a дійсно є лінійною ізометрією як композиція ізометрій: d_bR_a є такою за припущенням, а диференціали лівих зсувів $d_{ba}L_{d^{-1}}$ і d_cL_d – за лівоінваріантністю метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ та наслідком 17.1.

Друга рівносильність в умові випливає з першої та наслідку 17.1.

■

Твердження 18.1. *Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – лівоінваріантна ріманова метрика на групі Лі G, що відповідає скалярному добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на її алгебрі Лі $\mathfrak{g}$.*

1. *Метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є біінваріантною тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $a \in G$ оператор Ad_a приєднаного представлення G є лінійною ізометрією скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

2. *Якщо метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є біінваріантною, то для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$ оператор ad_x приєднаного представлення $\mathfrak{g}$ є антисамоспряженим відносно скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$, тобто $ad_x^* = -ad_x$. Якщо група G зв'язна, то вірне й обернене твердження.*

Доведення. Нагадаємо що Ad_a для $a \in G$ і ad_x для $x \in \mathfrak{g}$ є лінійними операторами на $\mathfrak{g}$, тому ці твердження мають сенс.

1. Згідно з попередньою лемою, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ є біінваріантною тоді й тільки тоді, коли $d_e R_a$ – лінійна ізометрія для будь-якого $a \in G$. Оскільки усі $d_b L_a$ для $b \in G$ є ізометріями за лівоінваріантністю $\langle \cdot, \cdot \rangle$ та наслідком 17.1, ця умова, у свою чергу, еквівалентна ізометричності для будь-якого $a \in G$ оператора

$$Ad_a = d_e C_a = d_e(L_a \circ R_{a^{-1}}) = d_{a^{-1}} L_a \circ d_e R_{a^{-1}},$$

що й дає потрібну необхідну та достатню умову.

2. Розглянемо множину лінійних ізометрій $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (скінченновимірного) евклідового простору $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, тобто метричної алгебри Лі, з операцією композиції. Нескладно перевірити, що це група (зробіть це; така група вже вводилася у розділах 1 та 12, див. приклад 12.2 і вправи 12.3 та 12.6), більш того, вона є замкненою підгрупою групи Лі $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (чому?), а отже її підгрупою Лі за теоремою Картана, зокрема групою Лі. Згадаємо, що умову ізометричності лінійного оператора $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ можна переписати в термінах спряженості: a – ізометрія тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$

$$\langle x, y \rangle = \langle a(x), a(y) \rangle = \langle a^* \circ a(x), y \rangle,$$

що за властивостями скалярного добутку рівносильно умові $a^* \circ a = id$, тобто $a^* = a^{-1}$ (саме звідси можна вивести включення $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$). Тому цю групу ізометричних операторів можна описати наступним чином:

$$\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \{a \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid a \circ a^* = a^* \circ a = id\} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g}).$$

Зокрема, звідси добре видно, що відображення, яке ставить у відповідність кожному оператору його матрицю у деякому фіксованому ортонормованому базисі, є ізоморфізмом $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ на $\mathrm{O}(n)$ (де $n = \dim G$), бо композиціям операторів відповідають добутки матриць, спряженню – транспонування, а тотожному оператору – одинична матриця (перевірте, що це ізоморфізм груп Лі). Більш того, з цього опису, аналогічно до того, як це було зроблено для групи $\mathrm{O}(n)$ у розділі 5, випливає, що алгебра Лі цієї групи має вигляд

$$\mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \coloneqq T_{id}\, \mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \{x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid x + x^* = 0\},$$

а її дужкою Лі є операторний комутатор: $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ для $x, y \in \mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Тут знову ж, як до цього у наслідку 12.2, користуємося тим, що група $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ є підмноговидом у просторі $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, а отже її дотичні простори, зокрема $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ можна ототожнити з підпросторами цього простору, і операторним аналогом формули (5.1). Перевірте, що ця алгебра Лі дійсно така. Для цього може знадобитися наступна вправа.

Вправа 18.1. Показати, що $(e^x)^* = e^{x^*}$ для будь-якого $x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ (відносно довільного евклідового скалярного добутку на $\mathfrak{g}$). Якій властивості матричної експоненти відповідає ця рівність?

З цього опису випливає, зокрема, що під дією описаної вище відповідності операторів та матриць (що тепер буде ізоморфізмом алгебр Лі), $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ відобразиться на $\mathfrak{so}(n)$.

Отже, нехай метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ біінваріантна. Згідно з пунктом 1., тоді $Ad_a \in \mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ для будь-якого $a \in G$, тобто образ гомоморфізма груп Лі $Ad\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (див. твердження 12.1) лежить у $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Тоді за теоремою 13.4

$$ad(\mathfrak{g}) = (d_e Ad)(\mathfrak{g}) = T_{id} Ad(G) \subset T_{id}\,\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle).$$

Це й означає згідно з наведеним вище описом $\mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, що $ad_x^* = -ad_x$ для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$.

Вправа 18.2. Вивести антисамоспряженість оператора ad_x для кожного $x \in \mathfrak{g}$ безпосередньо з опису диференціала відображення Ad у термінах дотичних векторів до кривих, використавши для цього операторну експоненту.

Нехай тепер G зв'язна і відомо, що $ad_x^* = -ad_x$ для кожного $x \in \mathfrak{g}$. Застосуємо до гомоморфізма груп Лі Ad твердження 7.3, отримавши рівність $Ad \circ \exp = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})} \circ ad$, тобто комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}} \\ G & \xrightarrow{Ad} & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Нагадаємо, що тут $\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}$ – операторна експонента. Як завжди, коли нам потрібно вивести властивість гомоморфізма груп Лі з властивості його диференціала в одиниці, знайдемо такі відкриті $U \ni 0$

у $\mathfrak{g}$ і $V \ni e$ у G, що $\exp\colon U \to V$ – дифеоморфізм, позначимо $(\exp|_U)^{-1}$ через $\exp^{-1}$ і застосуємо цю комутативність до довільного $a \in V$: $Ad_a = e^{ad_{\exp^{-1}(a)}}$. В силу вправи 18.1 та антисамоспряженості операторів представлення ad маємо для кожного $a \in V$

$$Ad_a^* = (e^{ad_{\exp^{-1}(a)}})^* = e^{ad^*_{\exp^{-1}(a)}} = e^{-ad_{\exp^{-1}(a)}} = (e^{ad_{\exp^{-1}(a)}})^{-1} = Ad_a^{-1},$$

де передостання рівність випливає з пункту 5. твердження 7.1 для операторної експоненти $\exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g})}$. Згідно з міркуваннями вище, це означає, що Ad_a – лінійна ізометрія $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Далі знову ж стандартним чином застосуємо пункт 3. теореми 3.1 до зв'язної групи Лі G:

$$G = G^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k,$$

тобто для кожного $a \in G$ існують $a_1, \ldots, a_k \in V$ такі, що $a = a_1 \ldots a_k$. Тоді з гомоморфності Ad і доведеного випливає, що $Ad_a = Ad_{a_1} \circ \ldots \circ Ad_{a_k}$ теж є лінійною ізометрією, а отже метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ біінваріантна за пунктом 1.

■

Для кожного $x \in \mathfrak{g}$ умова антисамоспряженості оператора приєднаного представлення $ad_x^* = -ad_x$ з пункту 2. цього твердження означає, що

$$\langle ad_x^* y, z\rangle = \langle -ad_x y, z\rangle = -\langle [x,y], z\rangle = \langle [y,x], z\rangle$$

для будь-яких $y, z \in \mathfrak{g}$ в силу твердження 12.3 (або узгодженого з ним означення 12.8). З іншого боку,

$$\langle ad_x^* y, z\rangle = \langle y, ad_x z\rangle = \langle y, [x,z]\rangle$$

за означенням спряженого оператора (пор. з рівнянням (17.5) для лівоінваріантних векторних полів). Таким чином, ця умова антисамоспряженості еквівалентна рівності $\langle [y,x], z\rangle = \langle y, [x,z]\rangle$ для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Перепозначивши вектори і узагальнивши на довільні алгебри Лі та форми на них, отримаємо з цього наступне важливе означення.

Означення 18.1. Білінійна форма b на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ зветься *інваріантною*, якщо

$$b([x,y],z) = b(x,[y,z])$$

для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Наслідок 18.1. *Якщо лівоінваріантна ріманова метрика на групі Лі G, що відповідає скалярному добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на її алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, є біінваріантною, то $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є інваріантною формою на $\mathfrak{g}$. Якщо група G зв'язна, то вірне й обернене твердження.*

Доведення. Це просто переформулювання пункту 2. твердження 18.1 у термінах інваріантних форм.

■

З узагальненням поняття інваріантності на k-форми на $\mathfrak{g}$, що, як згадувалося наприкінці розділу 16, використовуються при обчисленні когомологій де Рама компактних груп Лі, можна познайомитися у [7, с. 308-309, 312-314]. Така інваріантність теж еквівалентна біінваріантності відповідної лівоінваріантної форми на G у випадку зв'язної G. Тут вона нам не знадобиться.

Приклад 18.1. Будь-яка білінійна форма на будь-якій абелевій алгебрі Лі є інваріантною тривіальним чином. З цього спостереження, твердження 11.1 і попереднього наслідку випливає, що будь-яка лівоінваріантна ріманова метрика на будь-якій абелевій зв'язній групі Лі є біінваріантною. Нагадаємо, що усі такі групи Лі ізоморфні прямим добуткам $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ за наслідком 15.2.

Приклад 18.2. Група Лі SO(3) зв'язна за твердженням 4.1. У прикладі 11.10 було встановлено, що базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ її алгебри Лі $\mathfrak{so}(3)$, що описаний у (11.2), має ненульові попарні дужки Лі

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3,\ [e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1,\ [e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2.$$

Скалярний добуток, для якого цей базис ортонормований, є інваріантною формою (це властивість "інваріантності змішаного добутку" з курсу аналітичної геометрії). Тому відповідна лівоінваріантна метрика є біінваріантною за попереднім наслідком. Те ж саме (для відповідної метрики) вірне й для універсального накриття SO(3) – групи $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$ (див. твердження 4.2), алгебра Лі $\mathfrak{su}(2)$ якої ізоморфна $\mathfrak{so}(3)$ за вправою 11.5 (або за загальною властивістю універсальних накрить груп Лі, що сформульована у вправі 14.3).

Твердження 18.2. *Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – біінваріантна ріманова метрика на групі Лі G, ∇ – її ріманова зв'язність,* R *– оператор (тензор) кривини,* K *– секційна кривина, X, Y і Z – довільні лівоінваріантні векторні поля на G. Тоді*

1. $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$;

2. $\mathrm{R}\,(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$*;*

3. якщо X та Y лінійно незалежні, то $\mathrm{K}\,(X,Y) = \frac{\frac{1}{4}|[X,Y]|^2}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}$.

Доведення.

1. Оскільки алгебра Лі лівоінваріантних полів на G ізоморфна та ізометрична $\mathfrak{g}$ за наслідками 11.6 і 17.3, з пункту 2. твердження 18.1 випливає, що оператори приєднаного представленя цієї алгебри Лі також антисамоспряжені. Тоді за твердженням 17.1 маємо

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left([X,Y] - ad_X^* Y - ad_Y^* X\right) = \frac{1}{2}\left([X,Y] + ad_X Y + ad_Y X\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left([X,Y] + [X,Y] + [Y,X]\right) = \frac{1}{2}[X,Y].$$

2. За формулою (17.6) і попереднім пунктом,

$$\mathrm{R}\,(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z =$$

$$= \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \frac{1}{2}[[X,Y],Z] = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z],$$

де остання рівність випливає з тотожності Якобі.

3. Тут $\mathrm{K}\,(X,Y)$ розуміємо у сенсі твердження 17.2. Можна було б скористатися формулою з цього твердження, але простіше обчислити безспосередньо. В силу попереднього пункту,

$$\langle \mathrm{R}\,(X,Y)Y,X\rangle = -\frac{1}{4}\langle [[X,Y],Y],X\rangle = -\frac{1}{4}\langle [X,Y],[Y,X]\rangle = \frac{1}{4}|[X,Y]|^2,$$

де друга рівність знову ж випливає з того, що алгебра Лі лівоінваріантних полів на G ізоморфна та ізометрична $\mathfrak{g}$, а отже $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є на ній інваріантним добутком в силу наслідку 18.1. Тоді з означення секційної кривини отримуємо потрібне:

$$\mathrm{K}\,(X,Y) = \frac{\langle \mathrm{R}\,(X,Y)Y,X\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2} = \frac{\frac{1}{4}|[X,Y]|^2}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}.$$

■

Таким чином, ріманова зв’язність та тензор кривини біінваріантної метрики на групі Лі G не залежать від самої метрики – лише від факту її біінваріантності та G (точніше, її алгебри Лі). Як пояснено після формулювання твердження 17.2, формулу з пункту 3. попереднього твердження можна застосовувати й для обчислення довільних секційних кривин. Звідси, зокрема, випливає наступне.

Наслідок 18.2. *Будь-яка біінваріантна ріманова метрика на групі Лі має невід'ємну секційну кривину.*

Приклад 18.3. У прикладі 17.3 були досліджені кривини певної лівоінваріантної метрики на тривимірній групі Гейзенберга Nil і встановлено, що її секційна кривина знакозмінна. В силу попереднього наслідку, це означає, що дана метрика не є біінваріантною (втім, це можна було б вивести і з вигляду її ріманової зв'язності та пункту 1. твердження 18.2). Більш того, з результатів роботи [32] випливає (див. обговорення наприкінці прикладу 17.3), що будь-яка лівоінваріантна метрика на Nil має знакозмінну кривину, а отже біінваріантних метрик на цій групі Лі не існує. У [32] можна знайти й інші приклади тривимірних груп Лі, усі лівоінваріантні метрики на яких мають знакозмінну або від'ємну кривину. Таким чином, ці групи Лі не допускають біінваріантних метрик.

Приклад 18.4. Для абелевих груп Лі з прикладу 18.1 формули твердження 18.2 дають $\nabla = \mathrm{R} = \mathrm{K} = 0$ для лівоінваріантних аргументів, звідки випливає, що така метрика пласка (зауважимо, що це вірно й для незв'язних абелевих груп Лі з лівоінваріантними метриками: $\nabla = 0$ для лівоінваріантних аргументів за твердженням 17.1, а решта випливає з цього). Пласкість метрики означає, що група Лі G з нею локально ізометрична евклідовому простору в околі кожної точки (див. [9, с. 152]). Зокрема, на групі $\mathbb{R}^n$ при ототожненні її дотичних просторів з $\mathbb{R}^n$ будь-яка лівоінваріантна метрика приймає в усіх точках одне й те саме значення згідно з формулою (17.1), бо ліві зсуви є паралельними перенесеннями, а отже мають тривіальні диференціали. Таким чином, ця метрика евклідова, а отже пласка, як і повинно бути.

Приклад 18.5. Для біінваріантних метрик на групах SO(3) і SU(2), що були описані у прикладі 18.2, і будь-яких двох лінійно незалежних лівоінваріантних полів X та Y дужка Лі $[X, Y]$ виглядає у координатах ортонормованого базиса лівоінваріантних полів $\{X_1, X_2, X_3\}$, що відповідає $\{e_1, e_2, e_3\}$, як стандартний векторний добуток векторів у тривимірному евклідовому просторі, тому вірна формула для його довжини:

$$|[X,Y]|^2 = |X|^2|Y|^2 \sin^2\varphi = |X|^2|Y|^2 - |X|^2|Y|^2\cos^2\varphi = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2,$$

де φ – кут між X та Y, тому за пунктом 3. твердження 18.2 секційні кривини цих метрик дорівнюють $\frac{1}{4}$ у напрямках лівоінваріантних розподілів, а отже в усіх напрямках. Таким чином, ці групи ізометричні, принаймні локально в околі кожної точки (знову див. [9, с. 152]), тривимірній сфері, стандартна метрика якої домножена на 4 (як для сфери радіуса 2).

Вправа 18.3. Показати, що введена нами біінваріантна метрика на групі $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$ дійсно має такий вигляд (глобально).

Більш того, вірний наступний результат, що є наслідком класифікації Берже і Уоллечем однорідних просторів додатної секційної кривини (про цей більш загальний випадок ми поговоримо пізніше).

Теорема 18.1 (Уоллеч)**.** *Якщо на однозв'язній групі Лі існує лівоінваріантна ріманова метрика додатної секційної кривини, то ця група Лі ізоморфна* $\mathrm{SU}(2)$

Доведення. Див. [46].

■

Твердження 18.3. *Гладка крива в групі Лі G з біінваріантною рімановою метрикою є геодезичною тоді й тільки тоді, коли це проміжок інтегральної траєкторії деякого лівоінваріантного векторного поля на G (з точністю до заміни параметра). Зокрема, G з такою метрикою є повним рімановим многовидом.*

Доведення. Згідно з твердженням 17.3, інтегральна траєкторія лівоінваріантного поля X є геодезичною лівоінваріантної метрики тоді й тільки тоді, коли $ad_X^* X = 0$, але у випадку біінваріантної метрики цей вираз дорівнює $-ad_X X = -[X, X] = 0$ (знову ж з ізоморфності та ізометричності алгебри Лі лівоінваріантних полів на G і $\mathfrak{g}$ та пункту 2. твердження 18.1), тому усі такі траєкторії геодезичні. З іншого боку, для кожної точки $a \in G$ і вектора $x \in T_a G$ крива γ, що визначена умовою $\gamma(t) := a \exp t\, d_a L_{a^{-1}}(x)$, є інтегральною траєкторією лівоінваріантного поля $X_{d_a L_{a^{-1}}(x)}$ згідно з пунктом 2. твердження 7.1, де $d_a L_{a^{-1}}(x) \in \mathfrak{g}$, а отже геодезичною (повною, бо визначена на $\mathbb{R}$), при цьому вона проходить через a у напрямку x: $\gamma(0) = a$ і

$$\gamma'(0) = X_{d_a L_{a^{-1}(x)}}(a) = d_e L_a \circ d_a L_{a^{-1}}(x) = d_a(L_a \circ L_{a^{-1}})(x) = d_a L_e(x) = x$$

за ланцюговим правилом і властивостями лівих зсувів. В силу єдиності геодезичних, усі геодезичні даної метрики тоді повинні бути з точністю до заміни параметра проміжками таких кривих. Повнота G тоді випливає в силу теореми Хопфа – Рінова – Кон-Фоссена (див., наприклад, [9, с. 78-79]) з того, що такі інтегральні траєкторії є повними геодезичними.

■

Вправа 18.4. Показати, що група Лі G є повним рімановим многовидом для будь-якої лівоінваріантної метрики на ній (див. також розділ 24).

Іншими словами, геодезичні будь-якої біінваріантної метрики є в точності однорідними та, як і зв'язність з кривиною (див. зауваження після твердження 18.2), не залежать від самої метрики, лише від її біінваріантності та структури групи. Зокрема, звідси випливає співпадіння ріманового експоненційного відображення зі "звичайним", що згадувалося після означення 7.1.

Наслідок 18.3. *Ріманове експоненційне відображення будь-якої біінваріантної ріманової метрики на групі Лі G в її одиниці збігається з експоненційним відображенням G.*

Доведення. Дійсно, згідно з доведенням попереднього твердження геодезична біінваріантної метрики, що проходить через одиницю $e \in G$ у напрямку вектора $x \in \mathfrak{g} = T_eG$, має вигляд $\gamma(t) = \exp tx$. Тому образом точки x під дією ріманового експоненційного відображення згідно з його означенням (див., наприклад, [26, с. 137]) буде $\gamma(1) = \exp x$. Зокрема, це відображення визначене на усьому просторі $\mathfrak{g} = T_eG$.

■

Завершимо цей розділ розглядом ще однієї корисної загальної властивості груп Лі, що пов'язана з біінваріантністю.

Означення 18.2. Локально компактна хаусдорфова топологічна група зветься *унімодулярною*, якщо будь-яка її ліва міра Хаара є також правою мірою Хаара.

Оскільки за теоремою 3.2 Хаара усі ліві та праві міри Хаара на даній групі пропорційні, цю умову достатньо перевірити для однієї міри. Як було встановлено у наслідку 17.4, у випадку групи Лі G ліву міру Хаара можна побудувати за допомогою форми об'єму якоїсь лівоінваріантної ріманової метрики на G. Більш того, з міркувань попереднього розділу випливає, що лівоінваріантність цієї міри еквівалентна лівоінваріантності ріманового об'єму, і, очевидно, те ж має місце для правоінваріантності. Зокрема, для групи Лі з біінваріантною метрикою ліві та праві зсуви є ізометріями, а отже зберігають рі947ановий об'єм.

Наслідок 18.4. *Якщо на групі Лі G існує біінваріантна ріманова метрика, то G є унімодулярною.*

Спробуємо дати критерій унімодулярності в термінах структури групи Лі G. Нагадаємо, що орієнтацію на G ми задавали ортонормованим базисом лівоінваріантних полів $\{X_1, \dots, X_n\}$ метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тоді її ріманова форма об'єму згідно з рівнянням (17.4) має вигляд $dV = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$

для базису 1-форм $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$, що дуальний до $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Згадаємо також, що рімановий об'єм лівоінваріантний, бо

$$Vol\left(L_a(A)\right) = \int\limits_{L_a(A)} dV = \int\limits_{L_a(A)} (L_{a^{-1}})^* dV = \int\limits_{A} dV = Vol(A)$$

для будь-яких $a \in G$ і кубовної множини $A \subset G$, де друга рівність випливає з лівоінваріантності форми dV. Зауважимо, що у передостанній рівності тут, що фактично є формулою заміни змінних у інтегралі Рімана, ми використали те, що ліві зсуви зберігають обрану орієнтацію (чому?), а отже інтеграли від форми $(L_{a^{-1}})^* dV$ завжди невід'ємні. Для правих зсувів на довільні $a \in G$ аналогічним чином маємо

$$Vol\left(R_a(A)\right) = \int\limits_{R_a(A)} dV,$$

$$Vol(A) = \int\limits_{A} dV = \pm \int\limits_{R_a(A)} (R_{a^{-1}})^* dV,$$

де знак у останньому виразі залежить від того, чи зберігає правий зсув $R_{a^{-1}}$ орієнтацію. Більш точно, йдеться про збереження чи зміну орієнтації диференціалами цього відображення, причому вона або всюди зберігається, або всюди змінюється (перевірте це аналогічно до доведення леми 18.1). Порівнюючи ці вирази для усіх кубовних $A \subset G$, ми можемо зробити наступний висновок.

Наслідок 18.5. *Група Лі G є унімодулярною тоді й тільки тоді, коли для кожного $a \in G$ виконується $(R_a)^* dV = dV$ або $(R_a)^* dV = -dV$, де dV – форма об'єму якоїсь лівоінваріантної ріманової метрики на G.*

Згадаємо тепер, як обчислюється дія кодиференціала на n-форму. Для довільного гладкого відображення $F \colon G \to G$ і кожної точки $b \in G$ нам зручно буде записувати матрицю диференціала $d_b F$ відображення F у базисах $\{X_1(b), \ldots, X_n(b)\}$ і $\{X_1(F(b)), \ldots, X_n(F(b))\}$ просторів $T_b G$ і $T_{F(b)} G$ відповідно: $d_b F(X_i(b)) = \sum\limits_{j=1}^{n} dF_i^j(b) X_j(F(b))$ для кожного $i = \overline{1, n}$, де компоненти матриці dF_i^j будуть таким чином гладкими функціями на G. За означенням кодиференціала,

$$(F^* dV)(b)(X_1(b), \ldots, X_n(b)) = dV(F(b))(d_b F(X_1(b)), \ldots, d_b F(X_n(b))) =$$

$$= dV(F(b)) \left(\sum_{j_1=1}^{n} dF_1^{j_1}(b) X_{j_1}(F(b)), \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} dF_n^{j_n}(b) X_{j_n}(F(b)) \right)$$

для будь-якої $b \in G$. Згадаємо, що форма dV є зовнішньою (кососиметричною). Це означає, зокрема, що підставляння у неї аргументів, що повторюються, дає нуль. Тому у попередньому виразі залишаються лише набори індексів $\{j_1, \ldots, j_n\}$, що є перестановками усіх натуральних чисел від 1 до n. Тоді за полілінійністю та кососиметричнійстю цієї форми маємо:

$$dV(F(b))\left(\sum_{j_1=1}^{n} dF_1^{j_1}(b)X_{j_1}(F(b)), \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} dF_n^{j_n}(b)X_{j_n}(F(b))\right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} dF_1^{\sigma(1)}(b) \ldots dF_n^{\sigma(n)}(b)\; dV(F(b))(X_{\sigma(1)}(F(b)), \ldots, X_{\sigma(n)}(F(b))) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} dF_1^{\sigma(1)}(b) \ldots dF_n^{\sigma(n)}(b)\; \operatorname{sign}\sigma\; dV(F(b))(X_1(F(b)), \ldots, X_n(F(b))) =$$

$$= \det(dF_i^j(b))_{i,j=1}^n\; dV(F(b))(X_1(F(b)), \ldots, X_n(F(b))) = \frac{1}{n!}\,\det(dF_i^j(b))_{i,j=1}^n,$$

де передостання рівність випливає з означення детермінанта, а остання – з того, що $dV(X_1, \ldots, X_n) = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n!}$ за формулою (16.3) зовнішнього добутку 1-форм. Тому

$$(F^*dV)(b)(X_1(b), \ldots, X_n(b)) = \pm dV(b)(X_1(b), \ldots, X_n(b)) = \pm\frac{1}{n!}$$

тоді й тільки тоді, коли $\det(dF_i^j(b))_{i,j=1}^n = \pm 1$. Оскільки n-форми dV і F^*dV однозначно визначені своєю дією на якийсь базис у кожній точці, отримаємо наступне.

Наслідок 18.6. *Нехай $F\colon G \to G$ – гладке відображення. Тоді умова $F^*dV = \pm dV$ еквівалентна тому, що визначник матриці диференціала d_bF у базисах $\{X_1(b), \ldots, X_n(b)\}$ і $\{X_1(F(b)), \ldots, X_n(F(b))\}$ дорівнює ± 1 для кожної $b \in G$.*

Тут і вище "$\pm$" означає або всюди плюс, або всюди мінус. Звідси випливає, зокрема, що всі визначники матриць диференціалів лівих зсувів дорівнюють 1, бо dV лівоінваріантна, а умови наслідку 18.5 зводяться до того, що визначники матриць диференціалів правих зсувів дорівнюють 1 або -1. Тепер у нас все є для формулювання і доведення критеріїв унімодулярності, що нагадують твердження 18.1 (критерії біінваріантності метрики), хоча у їхньому формулюванні й не згадується явно жодна метрика: унімодулярність є, нагадаємо, властивістю групи Лі.

Твердження 18.4. *1. Група Лі G є унімодулярною тоді й тільки тоді, коли $|\det Ad_a| = 1$ для будь-якого $a \in G$.*

2. Якщо група Лі G з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$ є унімодулярною, то $\operatorname{Tr} ad_x = 0$ для будь-якого $x \in \mathfrak{g}$. Якщо група G зв'язна, то вірне й обернене твердження.

Доведення.

1. Згідно з наслідками 18.5 і 18.6, G унімодулярна тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $a, b \in G$ модуль визначника матриці диференціала d_bR_a у певних базисах дорівнює 1. Із доведення леми 18.1 і сказаного вище про визначники матриць диференціалів лівих зсувів випливає (як саме?), що необхідне та достатнє виконання цієї умови при $b = e$. Оскільки матриця $d_{a^{-1}}L_a$ має визначник 1, унімодулярність G таким чином еквівалентна тому, що $|\det Ad_a| = |\det(d_{a^{-1}}L_a \circ d_eR_{a^{-1}})| = 1$ для кожного $a \in G$, де вираз для Ad_a взятий з доведення пункту 1. твердження 18.1. Зауважимо, що Ad_a є лінійним оператором на $\mathfrak{g}$, тому його детермінант визначений незалежно від вибору базиса. Також цей критерій вже ніяк не використовує лівоінваріантну метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ або її форму об'єму dV.

2. Доведення цього пункту (точніше, його виведення з попереднього пункту) майже дослівно повторює доведення пункту 2. твердження 18.1. Замість групи $\mathrm{O}(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ треба розглянути групу операторів, що зберігають об'єм:

$$\mathrm{SL}^{\pm}(\mathfrak{g}) := \{a \in \operatorname{End}(\mathfrak{g}) \mid |\det a| = 1\} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g}).$$

   Це група Лі з алгеброю Лі

$$\mathfrak{sl}(\mathfrak{g}) := T_{id}\,\mathrm{SL}^{\pm}(\mathfrak{g}) = \{x \in \operatorname{End}(\mathfrak{g}) \mid \operatorname{Tr} x = 0\}.$$

   Вправа 18.5. Перевірити це твердження та відновити решту доведення пункту 2.

■

Ці критерії пояснюють, чому скінченновимірна алгебра Лі (над довільним полем) теж інколи зветься *унімодулярною*, якщо сліди всіх операторів її приєднаного представлення нульові. Зауважимо, що якщо G – зв'язна унімодулярна група Лі, то $\det Ad_a = 1$ для будь-якого $a \in G$. Це випливає з неперервності функції $a \mapsto \det Ad_a$ на G і того, що Ad_e є тотожним оператором, або з доведення пункту 2. попереднього твердження.

Приклад 18.6. Ми вже знаємо з наслідку 18.4, що всі групи Лі, на яких існують біінваріантні метрики, унімодулярні. Виконання для таких груп критеріїв попереднього твердження також випливає з відповідних пунктів твердження 18.1: якщо Ad_a – ізометрія, то $|\det Ad_a| = 1$ (за описом ізометрій у термінах спряжених операторів аналогічно до ортогональних матриць, див. доведення пункту <u>1.</u> твердження 18.1), і якщо ad_x антисамоспряжений, то $\operatorname{Tr} ad_x = 0$ (перевірте це).

Приклад 18.7. Як було встановлено у прикладі 17.2, ліва міра Хаара групи Nil є (з точністю до множення на константу) мірою Лебега, а тому є правою. Отже, ця група Лі унімодулярна. Перевіримо для неї безпосередньо виконання умови пункту <u>2.</u> твердження 18.4 (нагадаємо, що Nil зв'язна, тому цього теж достатньо для унімодулярності). Оскільки для базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ її алгебри Лі $\mathfrak{nil}$, що був описаний у прикладі 17.1, ненульовими попарними дужками Лі є лише $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$, оператор $ad_{e_3} = [e_3, \cdot]$ нульовий, $ad_{e_1} e_2 = [e_1, e_2] = e_3$ і ad_{e_1} дорівнює нулю на решті базисних векторів, і аналогічно $ad_{e_2} e_1 = [e_2, e_1] = -e_3$ і нуль на інших базисних векторах. Таким чином, матриці цих операторів у нашому базисі мають вигляд:

$$ad_{e_1} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ ad_{e_2} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ ad_{e_3} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки сліди усіх цих матриць нульові, з лінійності приєднаного представлення та сліду випливає, що дійсно $\operatorname{Tr} ad_x = 0$ для будь-якого $x \in \mathfrak{nil}$.

Вправа 18.6. Обчислити оператори Ad_A групи Nil (див. приклад 12.6) і переконатися у тому, що їхні визначники дорівнюють 1 (як і повинно бути для зв'язної унімодулярної групи Лі згідно з зауваженням після твердження 18.4).

Вправа 18.7. Показати, що група $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ унімодулярна (до речі, чи є вона зв'язною?).

Вправа 18.8. Навести приклад неунімодулярної групи Лі (див. [32]).

Деякі достатні умови унімодулярності групи Лі перелічені у [25, с. 535]. У подальших розділах ми побачимо, що з деяких з них випливає також існування біінваріантної метрики на цій групі, а з деяких – взагалі кажучи, не випливає.

19 Групи Лі, що допускають біінваріантну метрику. Випадок простої групи

У цьому розділі ми почнемо з'ясовувати відповідь на наступне питання: яким необхідним та достатнім умовам повинна задовольняти група Лі G (або її алгебра Лі), щоб на ній існувала біінваріантна ріманова метрика (у цьому випадку говоритимемо, що група *допускає* таку метрику) і якими можуть бути такі метрики? Деякі необхідні умови ми вже отримали у наслідках 18.2 та 18.4: G повинна бути многовидом, що допускає ріманову метрику невід'ємної секційної кривини, та унімодулярною групою. Втім, це достатньо широкі класи гладких многовидів та груп Лі.

Як і раніше, через $\mathfrak{g} = T_eG$ будемо позначати алгебру Лі групи Лі G, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток на $\mathfrak{g}$ та відповідну лівоінваріантну ріманову метрику на G. Як було встановлено у пункті 2. твердження 18.1 та у наслідку 18.1, для зв'язної G ця метрика є біінваріантною тоді й тільки тоді, коли усі оператори ad_x приєднаного представлення $\mathfrak{g}$ антисамоспряжені відносно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ або, що те ж саме, коли скалярний добуток $\langle \cdot, \cdot \rangle$ є інваріантною формою. У загальному випадку ці умови є принаймні необхідними. Таким чином, поставлену задачу можна звести до лінійно-алгебраїчної задачі опису алгебр Лі, на яких існують інваріантні скалярні добутки, та самих таких добутків.

Тим не менш, диференціально-геометричні міркування тут залишаються корисними, як зараз побачимо. З наслідку 17.5 випливає, що тензор Річчі Ric (див., наприклад, [26, с. 233-234]) будь-якої лівоінваріантної метрики на G є (симетричною) лівоінваріантною 2-формою, тобто значення $\mathrm{Ric}\,(X, Y)$ постійне для будь-яких лівоінваріантних полів X та Y на G в силу наслідку 16.2. Обчислимо цей тензор для довільної біінваріантної метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Як було зазначено після твердження 18.2, тензор кривини цієї метрики насправді не залежить від метрики (лише від факту її біінваріантності), а визначений структурою групи, тому те ж саме повинне бути вірним і для тензора Річчі. Нехай $n = \dim G$ і $\{X_1, \dots, X_n\}$ – ортонормований базис лівоінваріантних полів для $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Згідно з означенням тензора Річчі та формулою з пункту 2. твердження 18.2 для тензора кривини біінваріантної метрики,

$$\mathrm{Ric}\,(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{R}\,(X_i, X)Y, X_i \rangle = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \langle [[X_i, X], Y], X_i \rangle =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \langle [Y, [X, X_i]], X_i \rangle = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \langle ad_Y (ad_X X_i), X_i \rangle = -\frac{1}{4} \mathrm{Tr}\,(ad_Y \circ ad_X)$$

для будь-яких лівоінваріантних полів X та Y на G за описом сліда оператора у термінах ортонормованого базиса. Зауважимо, що ця форма дійсно ніяк не пов'язана з самою метрикою $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Вона визначена для будь-якої скінченновимірної алгебри Лі та є, як побачимо далі, дуже корисною для дослідження алгебраїчних властивостей таких алгебр.

Означення 19.1. Нехай $\mathfrak{g}$ – скінченновимірна алгебра Лі над полем $\mathbb{F}$. Її *формою Кіллінга* зветься відображення

$$\mathcal{K} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F} \colon (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y).$$

Оператори приєднаного представлення ad_x і ad_y визначені для будь-якої алгебри Лі згідно з означенням 12.8, і їхня композиція є лінійним оператором на скінченновимірному просторі $\mathfrak{g}$, а тому має коректно визначений слід.

Твердження 19.1. *Форма Кіллінга будь-якої скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ є інваріантною симетричною білінійною формою на $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Білінійність форми Кіллінга $\mathcal{K}$ випливає з лінійності ad_x за x (бо це представлення $\mathfrak{g}$), білінійності композиції та лінійності сліду (перевірте це). Її симетричність випливає з інваріантності сліду композиції операторів відносно їх переставляння (яку можна вивести, наприклад, з відповідної властивості сліду добутку матриць):

$$\mathcal{K}(y, x) = \mathrm{Tr}\,(ad_y \circ ad_x) = \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y) = \mathcal{K}(x, y)$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$. Нарешті, перевіримо інваріантність. З означення форми Кіллінга та того, що ad є представленням $\mathfrak{g}$ (див. обговорення перед означенням 12.8), маємо

$$\mathcal{K}([x, y], z) = \mathrm{Tr}\,(ad_{[x,y]} \circ ad_z) = \mathrm{Tr}\,((ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x) \circ ad_z) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - \mathrm{Tr}\,(ad_y \circ ad_x \circ ad_z) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y \circ ad_z) - \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_z \circ ad_y) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ (ad_y \circ ad_z - ad_z \circ ad_y)) = \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_{[y,z]}) = \mathcal{K}(x, [y, z])$$

для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{g}$, що й потрібно. Четверта рівність тут випливає з тієї ж інваріантності сліду: ми просто переставили ad_y і $ad_x \circ ad_z$ місцями. ■

Приклад 19.1. Оскільки приєднане представлення будь-якої абелевої алгебри Лі нульове, її форма Кіллінга також нульова.

Приклад 19.2. У прикладі 18.7 були обчислені матриці операторів приєднаного представлення векторів базису $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебри Лі $\mathfrak{nil}$ у тому ж базисі. Оскільки усі квадрати та попарні добутки цих матриць дорівнюють нулю (переконайтеся у цьому), зокрема, мають нульові сліди, $\mathcal{K}(e_i, e_j) = \mathrm{Tr}\,(ad_{e_i} \circ ad_{e_j}) = 0$ для усіх $i, j = \overline{1, 3}$, тому за білінійністю форма Кіллінга цієї алгебри Лі нульова. Таким чином, $\mathfrak{nil}$ є прикладом неабелевої алгебри Лі з нульовою формою Кіллінга.

Приклад 19.3. З вигляду попарних дужок Лі

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3,\ [e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1,\ [e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2.$$

базиса (11.2) алгебри Лі $\mathfrak{so}(3)$ з прикладу 11.10 отримуємо наступні значення операторів приєднаного представлення від базисних векторів:

$$ad_{e_1} e_2 = e_3,\ ad_{e_1} e_3 = -e_2,\ ad_{e_2} e_1 = -e_3,$$

$$ad_{e_2} e_3 = e_1,\ ad_{e_3} e_1 = e_2,\ ad_{e_3} e_2 = -e_1,$$

решта значень нульові. Таким чином, матриці цих операторів у базисі $\{e_1, e_2, e_3\}$ мають наступний вигляд:

$$ad_{e_1}\colon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ ad_{e_2}\colon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ad_{e_3}\colon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходячи сліди квадратів та попарних добутків цих матриць, отримуємо $\mathcal{K}(e_i, e_j) = \mathrm{Tr}\,(ad_{e_i} \circ ad_{e_j}) = -2\delta_{ij}$ для усіх $i, j = \overline{1, 3}$. Зокрема, форма Кіллінга $\mathfrak{so}(3)$ від'ємно визначена. Помітимо також, що $\mathrm{Tr}\, e_i\, e_j = -2\delta_{ij} = \mathcal{K}(e_i, e_j)$ для усіх i та j, хоча матриці e_1, e_2 та e_3 й не збігаються з матрицями відповідних операторів приєднаного представлення. Звідси отримуємо наступний вираз для форми Кіллінга цієї матричної алгебри Лі: $\mathcal{K}(x, y) = \mathrm{Tr}\, xy$ для будь-яких $x, y \in \mathfrak{so}(3)$ (бо це так для елементів базису і обидві сторони білінійні). Виявляється, що його можна узагальнити й на $\mathfrak{so}(n)$ для довільного n.

Твердження 19.2. *Нехай $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ – форма Кіллінга алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тоді для будь-яких поля $\mathbb{F}$ і натурального n*

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})}(x, y) = 2n\mathrm{Tr}\, xy - 2\mathrm{Tr}\, x\, \mathrm{Tr}\, y,$$

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})}(x, y) = 2n\mathrm{Tr}\, xy,$$

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{so}(n)}(x, y) = (n-2)\mathrm{Tr}\, xy$$

для усіх матриць x та y з відповідних алгебр Лі.

Доведення. Див., наприклад, [36, с. 381-384] (вираз для $\mathcal{K}_{\mathfrak{so}(n)}$ там обчислено з одруківкою) або перевірити самостійно. Зауважимо, що друга з цих формул випливає з першої, леми 20.2 наступного розділу і того, що $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F})$ є ідеалом у $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ (див. приклад 11.3).

■

Третя формула попереднього твердження при $n = 1$ означає просто $\mathcal{K}_{\mathfrak{so}(1)} = 0$, бо $\mathfrak{so}(1) = \{0\}$. Таким чином, форми Кіллінга $\mathfrak{so}(1)$ і $\mathfrak{so}(2)$ нульові. Так і повинно бути за прикладом 19.1, бо ці алгебри Лі абелеві (0-вимірна і 1-вимірна відповідно). При $n = 3$ формула узгоджується з обчисленою у попередньому прикладі. У подальшому ми також позначатимемо форму Кіллінга $\mathfrak{g}$ через $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$, якщо у цьому буде необхідність.

Вправа 19.1. Обчислити форми Кіллінга інших матричних алгебр Лі, що були описані у розділах 5 і 11.

Наслідок 19.1. *Тензор Річчі* Ric *будь-якої біінваріантної ріманової метрики на групі Лі G визначено умовою*

$$\mathrm{Ric}\,(X,Y) = -\frac{1}{4}\,\mathcal{K}(X,Y)$$

для будь-яких лівоінваріантних полів X та Y на G.

Тут ми знову ж маємо на увазі ізоморфність та ізометричність алгебр Лі лівоінваріантних полів на G і $\mathfrak{g}$ з наслідків 11.6 і 17.3, звідки випливає, зокрема, відповідність між їхніми формами Кіллінга $\mathcal{K}$, які ми практично ототожнюємо. В отриманій раніше формулі ми поміняли місцями X та Y, використавши симетричність $\mathcal{K}$ (твердження 19.1).

Питання про існування біінваріантних метрик ми почнемо досліджувати для спеціального класу алгебр та груп Лі – простих. Традиційно для лінійної алгебри векторний підпростір (у даному випадку – ідеал алгебри Лі $\mathfrak{g}$) будемо називати *тривіальним*, якщо він дорівнює $\{0\}$ або усьому простору $\mathfrak{g}$.

Означення 19.2. Алгебра Лі зветься *простою*, якщо вона неабелева та не містить нетривіальних ідеалів. Зв'язна група Лі зветься *простою*, якщо її алгебра Лі проста.

Якщо $\mathfrak{g}$ – абелева алгебра Лі, то будь-який її векторний підпростір $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ є (абелевим) ідеалом, бо $[x, y] = 0 \in \mathfrak{a}$ для будь-яких $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{g}$. Якщо $0 < \dim \mathfrak{a} < \dim \mathfrak{g}$, цей ідеал нетривіальний. Таким чином, окремо вимагаючи неабелевість у означенні простоти, ми просто виключаємо алгебри Лі вимірностей 0 і 1: починаючи з вимірності 2, неабелевість випливає з неіснування нетривіальних ідеалів.

Тут і в наступному розділі алгебраїчні властивості груп Лі (такі як простота) будуть вводитися лише для зв'язних груп у термінах їх алгебр Лі. При цьому в загальних означеннях для алгебр Лі мається на увазі алгебра довільної вимірності й над довільним полем, якщо не вказане інше. У якості задачі корисно кожного разу знаходити відповідні загальні означення для груп (наприклад, у главі 10 книги [45] та іншій алгебраїчній літературі) та перевіряти їх еквівалентність нашим (це може виявитися не дуже простим). Так, загальне означення простої групи можна знайти у [45, с. 461]. Його відповідність нашому для зв'язних груп Лі випливає з твердження 13.1 і теореми 13.2 (щоправда, воно все ж включатиме одновимірні групи, які у теорії Лі традиційно не вважають простими). Те ж відноситься і до деяких інших понять, таких як центр алгебри Лі з означення 19.3 нижче: для зв'язної групи Лі відповідною підгрупою Лі буде її центр, означення якого наведене у [45, с. 444] (перевірте це; див. також вправу 22.3).

Вправа 19.2. Показати, що не існує простих двовимірних алгебр Лі, а отже й груп (використати результати вправи 11.2 або приклад наприкінці лекції 2 у [8]).

Приклад 19.4. Тривимірна алгебра Лі $\mathfrak{so}(3)$, а отже й зв'язна група Лі $\mathrm{SO}(3)$ (а також $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$, як зазначалося у прикладі 18.2) прості. Дійсно, нехай $\sum_{i=1}^{3} \lambda^i e_i \neq 0$ – базисний вектор якогось її одновимірного ідеала $\mathfrak{a}$, де $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис (11.2). Тоді з вигляду дужок Лі цього базиса (див., скажімо, приклад 18.2) за означенням ідеала випливає, що $\lambda^3 e_2 - \lambda^2 e_3 = \left[\sum_{i=1}^{3} \lambda^i e_i, e_1\right] \in \mathfrak{a}$. Але цей вектор повинен бути пропорційний базисному, тобто $0 = \lambda\lambda^1$, $\lambda^3 = \lambda\lambda^2$ і $-\lambda^2 = \lambda\lambda^3$ для коефіцієнта пропорційності λ, що можливе лише при $\lambda^2 = \lambda^3 = 0$. Аналогічно беручи дужку Лі з e_2, отримуємо $\lambda^1 = \lambda^3 = 0$, протиріччя. Отже, одновимірних ідеалів у цієї алгебри Лі не існує. Неіснування двовимірних теж можна перевірити безпосередньо, але простіше вивести з леми 20.3 наступного розділу: оскільки на $\mathfrak{so}(3)$ існує інваріантний скалярний добуток (знову див. приклад 18.2), ортогональне доповнення відносно нього до будь-якого двовимірного ідеала було б одновимірним ідеалом.

Вправа 19.3. Показати, що тривимірна алгебра Лі $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ проста (а отже й група $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, якщо показати її зв'язність). Див. [19, с. 18-19].

Твердження 19.3. <u>*1.*</u> *Алгебра Лі $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ проста для будь-яких натуральних $n \geqslant 2$ і поля $\mathbb{F}$ характеристики 0.*

2. *Алгебра Лі* $\mathfrak{so}(n)$ *проста для* $n = 3$ *і будь-яких натуральних* $n \geqslant 5$.

3. *Алгебра Лі* $\mathfrak{su}(n)$ *проста для будь-яких натуральних* $n \geqslant 2$.

Доведення. Див. приклад 19.4 і [42, с. 124-132]. Наведене там доведення простоти $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ для випадку $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ залишається вірним для будь-якого поля характеристики 0.

■

Зазвичай у літературі простота перелічених алгебр Лі виводиться з більш "просунутої" структурної теорії (і лише при $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ та $\mathbb{R}$ для $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$), але за посиланням вище наведені безпосередні доведення. Нагадаємо, що 6-вимірна алгебра Лі $\mathfrak{so}(4)$ ізоморфна $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ за вправою 11.10, а отже є прямою сумою двох тривимірних ідеалів (див. твердження 11.3) і не є простою.

Означення 19.3. *Центром* алгебри Лі $\mathfrak{g}$ зветься

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \coloneqq \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall\, y \in \mathfrak{g}\ [x, y] = 0\}.$$

За означеннями, алгебра Лі $\mathfrak{g}$ абелева тоді й тільки тоді, коли $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Також помітимо, що $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ є ядром приєднаного представлення $ad \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (чому?), а отже ідеалом $\mathfrak{g}$ за лемою 13.2, але ми перевіримо цей факт безпосередньо.

Лема 19.1. *Центр будь-якої алгебри Лі є її абелевим ідеалом.*

Доведення. Дійсно, для будь-яких x та y з центра $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$, будь-яких $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ і кожного $z \in \mathfrak{g}$

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z] = 0$$

за білінійністю дужки Лі, тому $\lambda x + \mu y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Отже, це векторний підпростір $\mathfrak{g}$. Оскільки $[x, y] = 0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ для будь-яких $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ та $y \in \mathfrak{g}$, це дійсно абелевий ідеал.

■

Наслідок 19.2. *Центр будь-якої простої алгебри Лі нульовий.*

Доведення. За попередньою лемою і зауваженням перед нею, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ – ідеал простої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \mathfrak{g}$, бо $\mathfrak{g}$ неабелева. Оскільки вона не містить нетривіальних ідеалів, тоді $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

■

Приклад 19.5. Центром алгебри Лі $\mathfrak{nil}$, що описана у прикладі 17.1, є одновимірний підпростір, натягнутий на базисний вектор e_3 (у позначеннях згаданого прикладу). Дійсно, вектор $x = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda^i e_i$ належить до центру тоді й тільки тоді, коли $[x, e_1] = [x, e_2] = [x, e_3] = 0$, що еквівалентне $\lambda^1 = \lambda^2 = 0$, бо ненульовими попарними дужками Лі елементів цього базиса є лише $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3$. Зокрема, $\mathfrak{nil}$ непроста за попереднім наслідком (а отже й зв'язна група Лі Nil теж).

Твердження 19.4. *Якщо на простій скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ існує інваріантний скалярний добуток (тобто якщо це алгебра Лі простої групи Лі, що допускає біінваріантну ріманову метрику), то форма Кіллінга $\mathfrak{g}$ від'ємно визначена.*

Доведення. Нехай $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – інваріантний скалярний добуток на $\mathfrak{g}$, а $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – якийсь ортонормований відносно нього базис. Тоді квадрат будь-якого $x \in \mathfrak{g}$ відносно форми Кіллінга дорівнює

$$\mathcal{K}(x, x) = \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_x) = \sum_{i=1}^{n} \langle ad_x(ad_x e_i), e_i \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle ad_x e_i, ad_x^* e_i \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle ad_x e_i, ad_x e_i \rangle = -\sum_{i=1}^{n} |ad_x e_i|^2,$$

де передостання рівність випливає зі встановленої перед означенням 18.1 еквівалентності між інваріантністю скалярного добутку і антисамоспряженістю операторів приєднаного представлення. Таким чином, $\mathcal{K}(x, x) \leqslant 0$ і $\mathcal{K}(x, x) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $ad_x e_i = 0$ для усіх $i = \overline{1, n}$. Оскільки $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис, це означає, що $ad_x = 0$, тобто $[x, y] = ad_x y = 0$ для будь-якого $y \in \mathfrak{g}$, що еквівалентне $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Оскільки центр $\mathfrak{g}$ нульовий за наслідком 19.2, тоді $x = 0$. Отже, $\mathcal{K}(x, x) < 0$ при $x \neq 0$, що й означає від'ємну визначеність $\mathcal{K}$. Зауваження про алгебру Лі простої групи, що допускає біінваріантну метрику, випливає з наслідку 18.1 і того, що прості групи Лі за означенням зв'язні.

■

Наслідок 19.3. *Якщо форма Кіллінга $\mathcal{K}$ скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ від'ємно визначена, зокрема, якщо $\mathfrak{g}$ проста і на ній існує інваріантний скалярний добуток, то $-\mathcal{K}$ є інваріантним скалярним добутком на $\mathfrak{g}$. Якщо при цьому $\mathfrak{g}$ є алгеброю Лі зв'язної групи Лі G, то $-\mathcal{K}$ задає біінваріантну ріманову метрику на G.*

Доведення. Це випливає з твердження 19.1 та попереднього твердження: в його умовах симетрична інваріантна білінійна форма $-\mathcal{K}$ додатно визначена, тобто перетворюється на інваріантний скалярний добуток. Твердження про метрику на G випливає з наслідку 18.1.

■

Твердження 19.5. *Будь-яка зв'язна група Лі, форма Кіллінга алгебри Лі якої від'ємно визначена, зокрема, будь-яка проста група Лі, що допускає біінваріантну ріманову метрику, компактна.*

Доведення. На групі Лі G з умови в будь-якому разі існує біінваріантна ріманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$: якщо форма Кіллінга $\mathcal{K}$ алгебри Лі G від'ємно визначена, то $-\mathcal{K}$ задає біінваріантну метрику на G в силу наслідку 19.3 та зв'язності G. Тензор Річчі метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ має на лівоінваріантних полях вигляд $\mathrm{Ric} = -\frac{1}{4}\mathcal{K}$ за наслідком 19.1, а отже є у кожній точці G додатно визначеною формою за умовою або твердженням 19.4. Оскільки кривини Річчі у кожній точці G приймають одні й ті ж самі найменше і найбільше значення (це випливає з наслідку 17.6 або може бути встановлене аналогічно до нього, бо кривина Річчі у кожній точці є неперервною функцією на проєктивному просторі, який є компактом, а тензор Річчі є інваріантною формою), кривина Річчі $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обмежена знизу додатним числом. Оскільки G повна за твердженням 18.3 та зв'язна, вона тоді компактна в силу теореми Майєрса (див., наприклад, [9, с. 140-141]).

■

Приклад 19.6. Форма Кіллінга $\mathcal{K}$ алгебри Лі $\mathfrak{so}(n)$ згідно з твердженням 19.2 задається формулою $\mathcal{K}(x,y) = (n-2)\mathrm{Tr}\, xy$ для $x, y \in \mathfrak{so}(n)$. Зокрема, для будь-якої матриці $x = (x_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathfrak{so}(n)$ маємо

$$\mathcal{K}(x,x) = (n-2)\mathrm{Tr}\, x^2 = (n-2)\sum_{i,j=1}^n x_{ij}x_{ji} = -(n-2)\sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2,$$

оскільки ця матриця кососиметрична за означенням $\mathfrak{so}(n)$: $x_{ij} = -x_{ji}$ для усіх i та j. Нехай $n \geqslant 3$. Тоді $\mathcal{K}(x,x) \leqslant 0$ і $\mathcal{K}(x,x) = 0$ означає, що $x_{ij} = 0$ для усіх i та j, тобто $x = 0$. Таким чином, форма Кіллінга $\mathfrak{so}(n)$ від'ємно визначена при $n \geqslant 3$. Тоді $-\mathcal{K}$ задає біінваріантну метрику на групі Лі $\mathrm{SO}(n)$ (що є зв'язною за твердженням 4.1) за наслідком 19.3, а сама $\mathrm{SO}(n)$ компактна за попереднім твердженням. При цьому тривіальна група $\mathrm{SO}(1)$ (приклад 4.1) та група $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$ (приклад 4.4) теж компактні, і абелева $\mathrm{SO}(2)$ допускає біінваріантну метрику в силу прикладу 18.1. Зауважимо, що ми ніде тут не використовували простоту.

Приклад 19.7. З твердження 19.2 також випливає, що форма Кіллінга $\mathcal{K}$ алгебри Лі $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ має вигляд $\mathcal{K}(x,y) = 2n\mathrm{Tr}\,xy$ для $x,y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Ця форма знакозмінна при $n \geqslant 2$, бо, скажімо, для

$$x \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad y \coloneqq \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & \iddots & & \\ & 0 & & 0 & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}$$

маємо $\mathcal{K}(x,x) = 2n\mathrm{Tr}\,x^2 = 4n$ і $\mathcal{K}(y,y) = 2n\mathrm{Tr}\,y^2 = -4n$ (див. також більш детальне дослідження цієї форми у прикладі 20.5 наступного розділу). Група Лі $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ зв'язна, як показано у [25, с. 114-118], а отже проста при $n \geqslant 2$ в силу твердження 19.3. Тоді з твердження 19.4 випливає, що $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ не допускає біінваріантну метрику для усіх $n \geqslant 2$. Більш того, з цього і твердження 19.7 нижче випливатиме, що $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ некомпактна (звичайно, тривіальна група $\mathrm{SL}(1,\mathbb{R})$ з прикладу 4.1 є компактною).

Твердження 19.6. *Для будь-яких двох інваріантних скалярних добутків $\langle\cdot,\cdot\rangle$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ на простій скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ (а отже й для будь-яких двох біінваріантних ріманових метрик $\langle\cdot,\cdot\rangle$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ на простій групі Лі) існує таке дійсне $\lambda > 0$, що $\langle\cdot,\cdot\rangle' = \lambda\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Доведення. Як і будь-яку білінійну форму, $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ можна виразити через скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ за допомогою деякого лінійного оператора $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$: $\langle x,y\rangle' = \langle a(x),y\rangle$ для будь-яких $x,y \in \mathfrak{g}$. Те, що $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ теж є скалярним добутком, означає, що цей оператор самоспряжений і додатно визначений відносно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. З інваріантності обох цих добутків тоді випливає, що

$$\langle a([x,y]),z\rangle = \langle [x,y],z\rangle' = \langle x,[y,z]\rangle' = \langle a(x),[y,z]\rangle = \langle [a(x),y],z\rangle$$

для усіх $x,y,z \in \mathfrak{g}$. З властивостей скалярного добутку тоді маємо, що $a([x,y]) = [a(x),y]$ для усіх x та y. Якщо при цьому x – власний вектор a, що відповідає власному значенню μ, то $a([x,y]) = [\mu x,y] = \mu[x,y]$, тобто $[x,y]$ для будь-якого $y \in \mathfrak{g}$ теж є власним вектором a, що відповідає μ. Отже, усі власні підпростори a є ідеалами $\mathfrak{g}$. Оскільки $\mathfrak{g}$ проста, вони усі повинні дорівнювати $\{0\}$ або $\mathfrak{g}$. З іншого боку, оскільки a – самоспряжений оператор на скінченновимірному дійсному просторі $\mathfrak{g}$, цей простір повинен бути прямою сумою власних підпросторів a, що відповідають дійсним власним значенням. Це означає, що $\mathfrak{g}$ є таким підпростором для деякого власного значення λ, тобто $a = \lambda\, id$. При цьому $\lambda > 0$, бо a додатно визначений. Таким чином, $\langle x, y\rangle' = \langle a(x), y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ для усіх $x, y \in \mathfrak{g}$, що й було потрібно. Твердження для біінваріантних метрик випливає з твердження для інваріантних скалярних добутків в силу наслідку 18.1 та лінійної відповідності між ними.

■

Наслідок 19.4. *Якщо на простій скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ існує інваріантний скалярний добуток, то він має вигляд $\lambda\mathcal{K}$, де $\lambda < 0$, а $\mathcal{K}$ – форма Кіллінга $\mathfrak{g}$. Якщо на простій групі Лі з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$ існує біінваріантна ріманова метрика, то вона відповідає скалярному добутку $\lambda\mathcal{K}$. Зокрема, усі такі метрики ейнштейнові.*

Доведення. Це випливає з твердження 19.6, наслідків 19.3 і 18.1. *Ейнштейновість* (тобто пропорційність тензора Річчі та метрики з постійним коефіцієнтом, див. [5]) тоді маємо з наслідку 19.1.

■

Приклад 19.8. У прикладі 18.2 було розглянуто інваріантний скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на простій (див. приклад 19.4) алгебрі Лі $\mathfrak{so}(3)$, для якого базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ з (11.2) є ортонормованим. З іншого боку, у прикладі 19.3 було встановлено, що форма Кіллінга $\mathfrak{so}(3)$ задовольняє умовам $\mathcal{K}(e_i, e_j) = -2\delta_{ij}$ для усіх $i, j = \overline{1, 3}$. Це означає, що $\langle\cdot,\cdot\rangle = -\frac{1}{2}\mathcal{K}$, як і повинно бути за попереднім наслідком. Зокрема, $\langle x, y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} xy$ для будь-яких $x, y \in \mathfrak{so}(3)$ за формулою для форми Кіллінга з прикладу 19.3 (або твердження 19.2). Крім того, вираження $\langle\cdot,\cdot\rangle$ через форму Кіллінга дає ще одне доведення інваріантності цього скалярного добутку.

Загальнотопологічна властивіть компактності, що виникла у твердженні 19.5, насправді грає важливу роль у алгебраїчних характеристиках груп Лі. Зокрема, вона дозволяє довести твердження, що сильніше оберненого до твердження 19.5.

Твердження 19.7. *На будь-якій компактній групі Лі існує біінваріантна ріманова метрика.*

Доведення. Отже, нехай G – компактна група Лі. Оберемо на її алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ якийсь скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Розглянемо на G яку-небудь правоінваріантну форму об'єму dV правоінваріантної ріманової метрики, що відповідає цьому або іншому скалярному добутку аналогічно до конструкції для лівоінваріантного випадку у розділі 17. При цьому ми так само вводимо орієнтацію за допомогою ортонормованого базиса правоінваріантних полів цієї метрики. Можна було б розглянути і просто праву міру Хаара (за "правоінваріантним" аналогом наслідку 17.4). Покладемо для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$

$$\langle x, y\rangle' := \int\limits_G \langle Ad_a x, Ad_a y\rangle \, dV(a) \in \mathbb{R}.$$

Цей інтеграл існує, бо функція $a \mapsto \langle Ad_a x, Ad_a y\rangle$ гладка (чому?), а G компактна. Така процедура інколи зветься *усередненням* скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ за дією приєднаного представлення G. За лінійністю операторів Ad_a та інтеграла й білінійністю $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ є білінійною формою на $\mathfrak{g}$, симетричною, бо $\langle\cdot,\cdot\rangle$ симетричний. Нехай $x \in \mathfrak{g}$ ненульовий. Тоді $Ad_a x \neq 0$, бо оператори будь-якого представлення невироджені, а отже $\langle Ad_a x, Ad_a x\rangle > 0$. бо $\langle\cdot,\cdot\rangle$ додатно визначений. Оскільки $a \mapsto \langle Ad_a x, Ad_a x\rangle$ – гладка додатна функція на G, її інтеграл додатний, тобто $\langle x, x\rangle' > 0$. Таким чином, форма $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ додатно визначена і є скалярним добутком на $\mathfrak{g}$.

Нехай тепер $b \in G$. Оскільки $Ad_a \circ Ad_b = Ad_{ab}$ за означенням представлення (див. також твердження 12.1),

$$\langle Ad_b x, Ad_b y\rangle' = \int\limits_G \langle Ad_a(Ad_b x), Ad_a(Ad_b y)\rangle \, dV(a) = \int\limits_G \langle Ad_{ab} x, Ad_{ab} y\rangle dV(a).$$

для будь-яких $x, y \in \mathfrak{g}$. Виконаємо у цьому інтегралі заміну змінних дифеоморфізмом $R_b \colon G \to G$ (див. твердження 3.1). Оскільки композицією функції $a \mapsto \langle Ad_{ab} x, Ad_{ab} y\rangle$ і оберненого дифеоморфізма $(R_b)^{-1} = R_{b^{-1}} \colon a \mapsto ab^{-1}$ буде $a \mapsto \langle Ad_a x, Ad_a y\rangle$, а $R_{b^{-1}}$ зберігає орієнтацію за її побудовою (див. міркування перед наслідком 18.5), маємо

$$\int\limits_G \langle Ad_{ab} x, Ad_{ab} y\rangle \, dV(a) = \int\limits_{R_b(G)} \langle Ad_a x, Ad_a y\rangle \, (R_{b^{-1}})^* dV(a) =$$

$$= \int\limits_G \langle Ad_a x, Ad_a y\rangle \, dV(a) = \langle x, y\rangle',$$

де передостання рівність випливає з дифеоморфності R_b і правоінваріантності dV. Отже, $\langle Ad_b x, Ad_b y\rangle' = \langle x, y\rangle'$ для будь-яких $b \in G$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Тоді лівоінваріантна ріманова метрика на G, що відповідає скалярному добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle'$, є біінваріантною за критерієм пункту <u>1.</u> твердження 18.1. Зауважимо, що зв'язність G у цьому критерії не використовується.

■

Зокрема, будь-яка компактна група Лі унімодулярна за наслідком 18.4. Тепер ми можемо остаточно відповісти на питання про існування біінваріантних метрик на простих групах Лі, а також описати ці метрики.

Теорема 19.1. *Проста група Лі G допускає біінваріантну ріманову метрику тоді й тільки тоді, коли є компактною. Будь-яка така метрика відповідає скалярному добутку $\lambda\mathcal{K}$ на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ групи G, де $\lambda < 0$, а $\mathcal{K}$ – форма Кіллінга $\mathfrak{g}$, і є ейнштейновою.*

Доведення. Це комбінація тверджень 19.5, 19.7 та наслідку 19.4. ∎

20 Розв'язні та напівпрості алгебри Лі

Цей розділ присвячений введенню деяких понять і конструкцій для алгебр Лі, що допоможуть нам узагальнити результати попереднього розділу на довільні групи Лі. Центральною тут є властивість напівпростоти алгебри Лі, що узагальнює простоту, але виявляється, що вона тісно пов'язана з "протилежною" у деякому сенсі властивістю розв'язності. За замовчуванням тут розглядаються алгебри Лі довільної вимірності й над довільним полем, крім випадків, коли вказане інше, зокрема, коли йдеться про групи Лі. Почнемо з серії допоміжних лем.

Лема 20.1. *Якщо $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ – ідеали алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ – ідеал алгебр Лі $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{g}$. Зокрема, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.*

Доведення. Нагадаємо, що позначення $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ вводилося після означення 11.4 і означає лінійну оболонку усіх попарних дужок Лі $[x,y]$ для $x\in\mathfrak{a}$ і $y\in\mathfrak{b}$. Оскільки усі такі дужки лежать в $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ за означенням ідеала, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ є векторним підпростором $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$, а отже й $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. Для будь-яких $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{b}$ і $z\in\mathfrak{g}$ запишемо тотожність Якобі:

$$[[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y].$$

Тут за означенням ідеала $[y,z]\in\mathfrak{b}$ і $[z,x]\in\mathfrak{a}$, тому права сторона належить до $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$, а отже й ліва. Тоді з належності $[[x,y],z]$ до $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ та білінійності дужки Лі випливає, що $[w,z]\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ й для будь-якого $w\in[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ (і $z\in\mathfrak{g}$). Таким чином, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ – ідеал $\mathfrak{g}$, а отже й $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ (що є ідеалом $\mathfrak{g}$, зокрема підалгеброю Лі, за означенням як перетин ідеалів). ∎

Лема 20.2. *Нехай $\mathfrak{a}$ – ідеал скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тоді його форма Кіллінга є обмеженням на $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ форми Кіллінга $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Позначимо форми Кіллінга $\mathfrak{g}$ і $\mathfrak{a}$ через $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ і $\mathcal{K}_{\mathfrak{a}}$ відповідно. Оберемо у $\mathfrak{g}$ базис $\{e_1,\dots,e_n\}$ так, що $\{e_1,\dots,e_m\}$ – базис $\mathfrak{a}$. Для будь-яких $x, y \in \mathfrak{a}$ значення $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y)$ є сумою діагональних елементів матриці оператора $ad_x \circ ad_y \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ у цьому базисі. При цьому $ad_x \circ ad_y(e_i) = [x, [y, e_i]] \in \mathfrak{a}$ для кожного $i = \overline{1, n}$, бо $\mathfrak{a}$ – ідеал. Тому i-тий діагональний елемент матриці $ad_x \circ ad_y \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, тобто коефіцієнт біля e_i у розкладенні $ad_x \circ ad_y(e_i)$ за базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, буде дорівнювати i-тому діагональному елементу матриці оператора $ad_x \circ ad_y \colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ у базисі $\{e_1, \ldots, e_m\}$ при $i = \overline{1, m}$ і нулю при $i = \overline{m+1, n}$. Це означає, що слід $\mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y)$ буде таким же, як слід цього оператора на $\mathfrak{a}$, і буде дорівнювати таким чином $\mathcal{K}_{\mathfrak{a}}(x, y)$. Отже, дійсно $\mathcal{K}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{K}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$.

■

Лема 20.3. *Для будь-якої інваріантної симетричної білінійної форми b на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ та ідеалу $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ його ортогональне доповнення відносно b*

$$\mathfrak{a}^{\perp} \coloneqq \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall\, y \in \mathfrak{a}\; b(x, y) = 0\}$$

теж є ідеалом.

Доведення. Для будь-яких $x, y \in \mathfrak{a}^{\perp}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ (якщо $\mathfrak{g}$ – алгебра Лі над полем $\mathbb{F}$) і $z \in \mathfrak{a}$ маємо за білінійністю $b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda b(x, z) + \mu b(y, z) = 0$, тому $\lambda x + \mu y \in \mathfrak{a}^{\perp}$. Отже, $\mathfrak{a}^{\perp}$ є векторним підпростором $\mathfrak{g}$. Для будь-яких $x \in \mathfrak{a}^{\perp}$, $y \in \mathfrak{g}$ і $z \in \mathfrak{a}$ з інваріантності b випливає, що $b([x, y], z) = b(x, [y, z]) = 0$, бо $\mathfrak{a}$ – ідеал, і отже $[y, z] \in \mathfrak{a}$. Звідси $[x, y] \in \mathfrak{a}^{\perp}$. Таким чином, $\mathfrak{a}^{\perp}$ – дійсно ідеал.

■

Лема 20.4. *Для будь-якої невиродженої інваріантної симетричної білінійної форми b на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ ортогональним доповненням відносно неї підпростору $\mathfrak{g}' \coloneqq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ є центр $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Для будь-яких $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $y, z \in \mathfrak{g}$ з інваріантності b випливає, що $b(x, [y, z]) = b([x, y], z) = 0$ за означенням центра. Тому за білінійністю $b(x, w) = 0$ й для будь-якого $w \in \mathfrak{g}'$, тобто $x \in (\mathfrak{g}')^{\perp}$. Отже, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset (\mathfrak{g}')^{\perp}$.

І навпаки, для будь-яких $x \in (\mathfrak{g}')^{\perp}$, $y, z \in \mathfrak{g}$ знову ж в силу інваріантності маємо $b([x, y], z) = b(x, [y, z]) = 0$, бо $[y, z] \in \mathfrak{g}'$, тобто $[x, y]$ належить до ядра форми b. Оскільки вона невироджена, $[x, y] = 0$. Таким чином, $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, що доводить включення $(\mathfrak{g}')^{\perp} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ та рівність $(\mathfrak{g}')^{\perp} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

■

Як бачимо, невиродженість тут потрібна для доведення лише одного з включень. Цей результат узгоджується з лемою 20.3, бо $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ є ідеалом за лемою 20.1, а $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ – за лемою 19.1. Зауважимо, що у доведеннях двох попередніх лем ми ніде не використовували симетричність b, але вона потрібна хоча б для того, щоб не розрізняти "ліві" та "праві" ортогональні доповнення чи невиродженість. В будь-якому разі, усі форми, до яких ми будемо застосовувати ці леми, будуть симетричними.

Тепер перейдемо до означень та прикладів.

Означення 20.1. Для $k \in \mathbb{Z}_+$ *k-тий похідний ідеал* $\mathfrak{g}^{(k)}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ визначається за індукцією наступним чином:

$$\mathfrak{g}^{(0)} \coloneqq \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{(1)} \coloneqq \mathfrak{g}' = \left[\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}\right],\ \ldots,\ \mathfrak{g}^{(k)} \coloneqq \left(\mathfrak{g}^{(k-1)}\right)' = \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right].$$

Для $k \in \mathbb{N}$ *k-тий степінь* $\mathfrak{g}^k$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ визначається за індукцією наступним чином:

$$\mathfrak{g}^1 \coloneqq \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^2 \coloneqq \mathfrak{g}' = \left[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}\right],\ \ldots,\ \mathfrak{g}^k \coloneqq \left[\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}\right].$$

Наслідок 20.1. *Усі похідні ідеали та степені алгебри Лі $\mathfrak{g}$ є її ідеалами. При цьому*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(k-1)} \supset \mathfrak{g}^{(k)} \supset \ldots,$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{k-1} \supset \mathfrak{g}^k \supset \ldots.$$

Доведення. Це випливає з леми 20.1: на кожному кроці індуктивної побудови $\mathfrak{g}^{(k)} = \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right]$ (відповідно, $\mathfrak{g}^k = \left[\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}\right]$) є згідно з нею ідеалом $\mathfrak{g}$, бо $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ (відповідно, $\mathfrak{g}^{k-1}$ і $\mathfrak{g}$) – ідеали $\mathfrak{g}$. Крім того, $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k-1)}$ і $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}^{k-1}$ для усіх k (і є ідеалами у цих ідеалах) теж за цією лемою.

■

Означення 20.2. Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ зветься

- *розв'язною*, якщо $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ для деякого $k \in \mathbb{Z}_+$;
- *нільпотентною*, якщо $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.

Зв'язна група Лі зветься *розв'язною* (відповідно, *нільпотентною*), якщо її алгебра Лі розв'язна (нільпотентна).

Лема 20.5. *Для будь-якої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ вірне включення $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. Зокрема, будь-яка нільпотентна алгебра Лі (а отже й група Лі) є розв'язною.*

Доведення. Перевіримо це включення за індукцією. Дійсно, $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1$, і у припущенні $\mathfrak{g}^{(k-1)} \subset \mathfrak{g}^k$ маємо

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \left[\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}\right] \subset \left[\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}\right] = \mathfrak{g}^{k+1}$$

для будь-якого k. Тоді якщо $\mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$ для деякого k, то й $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$. ■

Показник k такий, що $\mathfrak{g}^{(k)} \neq \{0\}$ і $\mathfrak{g}^{(k+1)} = \{0\}$ (відповідно, $\mathfrak{g}^k \neq \{0\}$ і $\mathfrak{g}^{k+1} = \{0\}$) інколи зветься *ступінню* (або *кроком*) *розв'язності* (відповідно, *нільпотентності*) алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Приклад 20.1. Будь-яка абелева алгебра Лі $\mathfrak{g}$ є нільпотентною, бо $\mathfrak{g}^2 = \{0\}$, а отже розв'язною.

Вправа 20.1. Показати, що будь-яка двовимірна алгебра Лі є розв'язною (це можна вивести з результатів вправи 11.2).

Приклад 20.2. Усі *строго верхньотрикутні* матриці з $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$, тобто ті, у яких на головній діагоналі й під нею стоять лише нулі, утворюють неабелеву при $n \geqslant 3$ нільпотентну, а отже розв'язну, підалгебру Лі $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, бо $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})^n = \{0\}$ (перевірте це). Зокрема, $\mathfrak{n}(3, \mathbb{R})$ – це алгебра Лі $\mathfrak{nil}$ з прикладу 17.1.

Приклад 20.3. Усі *верхньотрикутні* матриці з $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$, у яких під головною діагоналлю стоять лише нулі, утворюють розв'язну, але не нільпотентну при $n \geqslant 2$ (абелеву при $n = 1$) підалгебру Лі $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, бо $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})^{(k)} = \{0\}$ для будь-якого $k \geqslant \log_2 n + 1$, але $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})^k = \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})^2 = \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ для усіх $k \geqslant 2$ (перевірте це).

Вправа 20.2. Описати однозв'язні матричні групи Лі, що відповідають алгебрам Лі з двох попередніх прикладів (при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$).

Приклади 20.2 і 20.3 відіграють важливу роль у дослідженні довільних розв'язних та нільпотентних алгебр Лі, зокрема, у доведенні наведеної нижче теореми 20.1 для випадку алгебраїчно замкненого поля. Див., наприклад, [19, с. 23-36].

Вправа 20.3. Показати, що група $\mathrm{E}(2)$ рухів стандартної евклідової площини E^2, що зберігають орієнтацію, є групою Лі, яка дифеоморфна (але не ізоморфна!) $S^1 \times \mathbb{R}^2$, зокрема зв'язна. Показати, що вона розв'язна, але не нільпотентна. Це можна зробити, представивши елементи $\mathrm{E}(2)$ у вигляді матриць з $\mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ таких, що дія руху на точку $(x, y) \in E^2$ відповідає множенню матриці на вектор-стовпчик $(x, y, 1)^T$, і обчисливши матричну алгебру Лі $\mathfrak{e}(2) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ цієї групи.

Вправа 20.4. Показати, що матрична група

$$\mathrm{Sol} := \left\{ \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

є групою Лі, яка дифеоморфна (але теж, звичайно, не ізоморфна) $\mathbb{R}^3$, зокрема зв'язна. Показати, що вона розв'язна, але не нільпотентна, обчисливши її матричну алгебру Лі $\mathfrak{sol} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Які перетворення площини відповідають матрицям з групи Sol при аналогічному до попередньої вправи ототожненні?

Вправа 20.5. Показати, що будь-яка скінченновимірна нільпотентна алгебра Лі (а отже й група Лі) унімодулярна. Тут може стати у нагоді наведена нижче вправа 20.7. Навести приклад неунімодулярної розв'язної алгебри Лі (його можна знайти у вимірності 2, див. вправу 20.1).

Загальна класифікація розв'язних алгебр Лі з точністю до ізоморфізма невідома, але існують класифікації у конкретних невеликих вимірностях. Також відомо, що будь-яка однозв'язна розв'язна (зокрема нільпотентна) n-вимірна група Лі дифеоморфна $\mathbb{R}^n$ (див., наприклад, [25, с. 106]). Тому довільні зв'язні розв'язні групи Лі можна досліджувати, знаходячи дискретні підгрупи такої групи, аналогічно до дослідження зв'язних абелевих груп Лі у розділі 15 (і так само вони виявляються усі дифеоморфними $T^m \times \mathbb{R}^{n-m}$).

Теорема 20.1 (Критерій Картана розв'язності)**.** *Скінченновимірна алгебра Лі* $\mathfrak{g}$ *над полем характеристики* 0 *з формою Кіллінга* $\mathcal{K}$ *є розв'язною тоді й тільки тоді, коли* $\mathcal{K}(x, [y, z]) = 0$ *для будь-яких* $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Доведення. Див. доведення загального випадку у [10, с. 61-63], [21, с. 69-82], [36, с. 385-392] або [40, с. 74-75], випадку алгебри Лі над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{F}$ характеристики 0 у [19, с. 35] і випадку, коли $\mathbb{F}$ – підполе $\mathbb{C}$, у [25, с. 50,52-54].

■

Умову цього критерію в силу білінійності $\mathcal{K}$ часто записують у вигляді $\mathcal{K}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') = \mathcal{K}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$.

Приклад 20.4. Як було встановлено у прикладі 19.2, форма Кіллінга дійсної алгебри Лі $\mathfrak{nil}$ нульова, тому критерій Картана виконується. І дійсно, вона нільпотентна, зокрема розв'язна, як відомо з прикладу 20.2.

Вправа 20.6. Перевірити виконання критерію Картана для інших прикладів розв'язних алгебр Лі, що були наведені у цьому розділі.

Для будь-якої простої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ перший похідний ідеал $\mathfrak{g}'$ ненульовий, бо $\mathfrak{g}$ неабелева. Оскільки це ідеал (див. наслідок 20.1), тоді $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ в силу простоти, а отже й $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g} \neq \{0\}$ для будь-якого k за індукцією. Тому прості алгебри Лі нерозв'язні, зокрема не є нільпотентними. Узагальнимо тепер поняття простої алгебри Лі наступним чином.

Означення 20.3. Алгебра Лі зветься *напівпростою*, якщо вона не містить ненульових розв'язних ідеалів. Зв'язна група Лі зветься *напівпростою*, якщо її алгебра Лі напівпроста.

За означенням, якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}$ напівпроста і розв'язна, то $\mathfrak{g} = \{0\}$, бо $\mathfrak{g}$ є своїм власним розв'язним ідеалом. Як бачимо, ніщо в означенні не забороняє напівпростій алгебрі Лі бути нульовою, на відміну від простої, а ось одновимірною вона бути не може, бо тоді стане своїм власним ненульовим абелевим (а отже розв'язним за прикладом 20.1) ідеалом. Двовимірних напівпростих алгебр Лі теж не існує, бо усі двовимірні розв'язні за вправою 20.1.

Твердження 20.1. *Алгебра Лі є напівпростою тоді й тільки тоді, коли вона не містить ненульових абелевих ідеалів.*

Доведення. Необхідність тут випливає безпосередньо з означення, бо абелеві ідеали є розв'язними (див. приклад 20.1).

Доведемо достатність. Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}$ не містить ненульових абелевих ідеалів, і $\mathfrak{a}$ – якийсь її розв'язний ідеал. Зауважимо, що усі його похідні ідеали $\mathfrak{a}^{(k)}$ для $k \in \mathbb{Z}_+$ є ідеалами $\mathfrak{g}$. Це виводиться індуктивно з того, що $\mathfrak{a}$ – ідеал, і леми 20.1 аналогічно до доведення наслідку 20.1. Отже, $\mathfrak{a}$ розв'язний, тобто $\mathfrak{a}^{(k)} = \{0\}$ для деякого $k \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $k = 0$, то $\mathfrak{a} = \{0\}$. В іншому випадку $\{0\} = \mathfrak{a}^{(k)} = [\mathfrak{a}^{(k-1)}, \mathfrak{a}^{(k-1)}]$ означає, що ідеал $\mathfrak{a}^{(k-1)}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ абелевий, тому $\mathfrak{a}^{(k-1)} = \{0\}$ за умовою. Повторюючи ці міркування, отримаємо, що (при $k \geqslant 2$) $\mathfrak{a}^{(k-2)} = \{0\}$ і так далі до $\mathfrak{a} = \{0\}$. Таким чином, $\mathfrak{g}$ напівпроста за означенням.

■

Наслідок 20.2. *Будь-яка проста алгебра Лі (а отже й група Лі) є напівпростою.*

Доведення. Дійсно, якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}$ проста, то для будь-якого її абелевого ідеала $\mathfrak{a}$ маємо $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$, бо $\mathfrak{g}$ неабелева, а отже $\mathfrak{a} = \{0\}$ в силу простоти. Тоді $\mathfrak{g}$ напівпроста в силу попереднього твердження.

■

Наступний корисний критерій напівпростоти, як зараз побачимо, випливає з критерію Картана розв'язності. Зауважимо, що достатність тут не використовує цей критерій та вірна для скінченновимірних алгебр Лі над довільним полем.

Теорема 20.2 (Критерій Картана напівпростоти)**.** *Скінченновимірна алгебра Лі над полем характеристики* 0 *є напівпростою тоді й тільки тоді, коли її форма Кіллінга невироджена.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}$ з умови напівпроста. За означенням, ядром її форми Кіллінга $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ є ортогональне доповнення $\mathfrak{g}^\perp$ до $\mathfrak{g}$ відносно цієї форми. Це ідеал за лемою 20.3 і властивостями форми Кіллінга (твердження 19.1), отже для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{g}^\perp$ в силу леми 20.2 маємо (зауважимо, що $[y, z] \in \mathfrak{g}^\perp$, бо це підалгебра Лі) $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}^\perp}(x, [y, z]) = \mathcal{K}_\mathfrak{g}(x, [y, z]) = 0$, оскільки $x \in \mathfrak{g}^\perp$. Тому ідеал $\mathfrak{g}^\perp$ розв'язний за критерієм Картана розв'язності, а отже нульовий за означенням напівпростоти. Отже, $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ невироджена.

Для доведення достатності припустимо, що форма $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ невироджена. В силу твердження 20.1, для демонстрації напівпростоти $\mathfrak{g}$ достатньо показати, що будь-який її абелевий ідеал $\mathfrak{a}$ нульовий. Нехай y – довільний елемент такого $\mathfrak{a}$. Тоді для будь-яких $x, z \in \mathfrak{g}$

$$(ad_x \circ ad_y)^2(z) = ad_x \circ ad_y \circ ad_x \circ ad_y(z) = [x, [y, [x, [y, z]]]] = 0,$$

бо $[y, z] \in \mathfrak{a}$, отже $[x, [y, z]] \in \mathfrak{a}$, і тому $[y, [x, [y, z]]] = 0$, оскільки $\mathfrak{a}$ є абелевим. Отже, $(ad_x \circ ad_y)^2 = 0$ для кожного $x \in \mathfrak{g}$. Далі використаємо наступний загальний факт лінійної алгебри (пор. з теоремою Енгеля для нільпотентних алгебр Лі, див. [19, с. 25-27]).

Вправа 20.7. Показати, що якщо лінійний оператор a на скінченновимірному векторному просторі V (над довільним полем) *нільпотентний*, тобто $a^k = 0$ для деякого натурального k, то існує базис V, у якому матриця a строго верхньотрикутна, а отже $\mathrm{Tr}\, a = 0$ (підказка: розглянути послідовність підпросторів $\mathrm{Ker}\, a \subset \mathrm{Ker}\, a^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}\, a^k = V$).

Таким чином, $\mathcal{K}_\mathfrak{g}(x, y) = \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y) = 0$ для усіх $x \in \mathfrak{g}$, тобто y належить до ядра $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$, що за умовою є нульовим. Отже, дійсно $\mathfrak{a} = \{0\}$, і $\mathfrak{g}$ напівпроста.

■

Приклад 20.5. У прикладі 19.6 було встановлено, що форма Кіллінга алгебри Лі $\mathfrak{so}(n)$ від'ємно визначена при $n \geqslant 3$, а отже невироджена. Тому $\mathfrak{so}(n)$ напівпроста в силу критерію Картана. Згідно з твердженням 19.3, при $n \neq 4$ насправді виконана сильніша (див. наслідок 20.2) умова: ця алгебра Лі проста.

Приклад 20.6. В силу твердження 19.2, форма Кіллінга $\mathcal{K}$ алгебри Лі $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ задається виразом $\mathcal{K}(x, y) = 2n\mathrm{Tr}\, xy$ для будь-яких $x, y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Нехай $n \geqslant 2$ (при $n = 1$ ця алгебра Лі нульова). Будемо тут позначати через $e_{ij} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ для $i, j = \overline{1, n}$ матрицю, у якої на перетині i-того рядка та j-того стовпчика стоїть 1, а решта компонент нульові. Зокрема, матриці з прикладу 19.7 тоді можна записати як $x = e_{11} - e_{nn}$ та $y =$

$e_{1n} - e_{n1}$. Тоді матриці $f_i \coloneqq e_{11} + \ldots + e_{ii} - i\, e_{i+1\,i+1}$ для $i = \overline{1, n-1}$, $e_{ij} + e_{ji}$ і $e_{ij} - e_{ji}$ для усіх $1 \leqslant i < j \leqslant n$ утворюють ортогональний відносно $\mathcal{K}$ базис $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ (перевірте це), причому $\mathcal{K}(f_i, f_i) = 2ni(i+1)$, $\mathcal{K}(e_{ij} + e_{ji}, e_{ij} + e_{ji}) = 4n$ і $\mathcal{K}(e_{ij} - e_{ji}, e_{ij} - e_{ji}) = -4n$ для усіх i та j. Таким чином, форма $\mathcal{K}$ невироджена принаймні для полів $\mathbb{F}$ характеристики 0 (чому?), а при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ її сигнатура дорівнює $\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$. Отже, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ напівпроста за критерієм Картана. Насправді, ми знаємо, що у випадку поля $\mathbb{F}$ характеристики 0 знову ж виконана сильніша умова простоти в силу твердження 19.3.

Для невиродженої симетричної білінійної форми b на скінченновимірному векторному просторі $\mathfrak{g}$ сума вимірностей довільного векторного підпростору $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ та його ортогонального доповнення $\mathfrak{a}^\perp$ відносно b завжди дорівнює вимірності $\mathfrak{g}$, але $\mathfrak{g}$ не обов'язково буде прямою сумою цих підпросторів (або навіть просто сумою). Зауважимо також, що при виконанні згаданої умови $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp$ на вимірності $\mathfrak{g}$ є прямою сумою $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}^\perp$, тобто $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$, тоді й тільки тоді, коли $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. За необхідності перевірте ці факти. Якщо $\mathfrak{a}$ – ідеал алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а форма b ще й інваріантна, то $\mathfrak{a}^\perp$ теж буде ідеалом за лемою 20.3. Тоді якщо $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ як векторний простір, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ як алгебра Лі в силу твердження 11.3 (тут ми ототожнюємо канонічно ізоморфні за цим твердженням алгебру Лі та пряму суму, що будемо робити й далі для усіх прямих сум довільної скінченної кількості ідеалів).

Лема 20.6. *Якщо $\mathfrak{a}$ – ідеал скінченновимірної напівпростої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0, а $\mathfrak{a}^\perp$ – його ортогональне доповнення відносно форми Кіллінга $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$.*

Доведення. Оскільки $\mathfrak{a}^\perp$ є ідеалом $\mathfrak{g}$ за лемою 20.3 і твердженням 19.1, $\mathfrak{b} \coloneqq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ – теж ідеал $\mathfrak{g}$ (це вірно для перетину будь-яких двох ідеалів просто за означенням). Тоді для будь-яких $x, y, z \in \mathfrak{b}$ маємо для відповідних форм Кіллінга за лемою 20.2 і враховуючи, що $[y, z] \in \mathfrak{b}$, $\mathcal{K}_\mathfrak{b}(x, [y, z]) = \mathcal{K}_\mathfrak{g}(x, [y, z]) = 0$, оскільки, наприклад, $x \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ і $[y, z] \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}^\perp$. Таким чином, ідеал $\mathfrak{b}$ розв'язний за критерієм Картана, тому нульовий за напівпростотою $\mathfrak{g}$.

■

Наслідок 20.3. *Нехай $\mathfrak{a}$ – ідеал скінченновимірної напівпростої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0. Тоді $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ є прямою (у сенсі алгебр Лі) ортогональною відносно форми Кіллінга сумою (прямим ортогональним розкладенням $\mathfrak{g}$).*

Доведення. Це випливає з попередньої леми, обговорення перед нею і невиродженості форми Кіллінга $\mathfrak{g}$, що має місце в силу критерію Картана напівпростоти.

■

Наслідок 20.4. *Якщо скінченновимірна алгебра Лі $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0 напівпроста, то $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$*

Доведення. Оскільки $\mathfrak{g}'$ – ідеал $\mathfrak{g}$ (див. наслідок 20.1), за попереднім наслідком і лемою 20.4 (яка використовує невиродженість та інші властивості форми Кіллінга $\mathfrak{g}$, що випливають з критерію Картана напівпростоти та твердження 19.1 відповідно) маємо $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus (\mathfrak{g}')^{\perp} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$, бо $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ як абелевий ідеал $\mathfrak{g}$ (за лемою 19.1 і твердженням 20.1).

■

Як і у випадку простої алгебри Лі, в умовах попереднього наслідку $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$ й для довільного k. З умови $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, взагалі кажучи, не випливає, що $\mathfrak{g}$ напівпроста (спробуйте знайти контрприклад).

Вправа 20.8. Вивести з попереднього наслідку, що в його умовах будь-який гомоморфізм з $\mathfrak{g}$ в абелеву алгебру Лі нульовий. За допомогою цього показати, що $\mathfrak{g}$ унімодулярна, отже, зокрема, напівпрості групи Лі унімодулярні (підказка: розглянути гомоморфізм $x \mapsto \operatorname{Tr} ad_x$ у $\mathbb{R}$). Чи вірно це для довільної скінченновимірної напівпростої алгебри Лі?

Лема 20.7. *Будь-який ідеал скінченновимірної напівпростої алгебри Лі над полем характеристики 0 є напівпростим.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{g}$ – алгебра Лі з умови, $\mathfrak{a}$ – її ідеал, а $\mathfrak{b}$ – розв'язний ідеал $\mathfrak{a}$. За наслідком 20.3, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ – пряме розкладення алгебри Лі. Це означає, зокрема, що довільний елемент $\mathfrak{g}$ має вигляд $x + y$, де $x \in \mathfrak{a}$ і $y \in \mathfrak{a}^{\perp}$. Для будь-якого $z \in \mathfrak{b}$ тоді $[z, x + y] = [z, x] + [z, y] = [z, x] \in \mathfrak{b}$, бо $\mathfrak{b}$ – ідеал $\mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ і $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] = \{0\}$ за означенням прямої суми алгебр Лі, а отже $[z, y] = 0$. Таким чином, $\mathfrak{b}$ – розв'язний ідеал $\mathfrak{g}$, тому $\mathfrak{b} = \{0\}$ за напівпростотою $\mathfrak{g}$. Це, у свою чергу, означає виконання означення напівпростоти для алгебри Лі $\mathfrak{a}$.

■

Вправа 20.9. Чи вірні твердження попередніх наслідку і леми для довільної напівпростої алгебри Лі?

Твердження 20.2. 1. *Будь-яка скінченновимірна напівпроста алгебра Лі $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0 є прямою (у сенсі алгебр Лі)* *сумою своїх простих ідеалів* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$*, що попарно ортогональні відносно форми Кіллінга* $\mathfrak{g}$*:*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i.$$

2. *Якщо алгебра Лі* $\mathfrak{g}$ *є скінченною прямою (у сенсі алгебр Лі) сумою своїх простих ідеалів, то вона напівпроста.*

Доведення.

1. З обговорення після означення 19.2 випливає, що якщо у алгебри Лі $\mathfrak{g}$ не існує нетривіальних ідеалів, то вона або проста, або має вимірність 0 чи 1 (і є абелевою). Як було зазначено після означення 20.3, одновимірна алгебра Лі не може бути напівпростою. Якщо ж $\mathfrak{g}$ нульова або проста, то ми вже отримали потрібне. В іншому випадку у неї існує нетривіальний ідеал $\mathfrak{a}$. Тоді за наслідком 20.3 маємо пряме ортогональне відносно форми Кіллінга розкладення алгебри Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$, де $0 < \dim \mathfrak{a}, \dim \mathfrak{a}^{\perp} < \dim \mathfrak{g}$ за умовою нетривіальності $\mathfrak{a}$. Ідеали $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}^{\perp}$ є напівпростими алгебрами Лі за лемою 20.7. Тому кожен з них знову ж або простий, або до нього можна застосувати ту ж процедуру, що й до $\mathfrak{g}$ (нульовим він бути вже не може в силу нетривіальності). Якщо, скажімо, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^{\perp}$, де $\mathfrak{b}$ – нетривіальний ідеал $\mathfrak{a}$, то, повторюючи доведення леми 20.7, демонструємо, що $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{b}^{\perp}$ є ідеалами не тільки в $\mathfrak{a}$, але й у $\mathfrak{g}$ (зробіть це). Вони ортогональні відносно форми Кіллінга $\mathfrak{a}$, що є обмеженням на $\mathfrak{a}$ форми Кіллінга $\mathfrak{g}$ за лемою 20.2, і ортогональні до $\mathfrak{a}^{\perp}$ відносно форми Кіллінга $\mathfrak{g}$, бо до нього ортогональний $\mathfrak{a}$. Таким чином, $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^{\perp} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$, де сума є прямою за узагальненням твердження 11.3 на три доданки, бо вони всі є ідеалами $\mathfrak{g}$, і всі доданки попарно ортогональні відносно форми Кіллінга $\mathfrak{g}$. При цьому $0 < \dim \mathfrak{b}, \dim \mathfrak{b}^{\perp} < \dim \mathfrak{a}$ за нетривіальністю. Нарешті, $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{b}^{\perp}$ є напівпростими за лемою 20.7. Повторимо цю процедуру тепер для них, а також для доданків аналогічного розкладення $\mathfrak{a}^{\perp}$, якщо воно є, і так далі. Оскільки на кожному етапі скінченні вимірності ідеалів строго зменшуються, цей процес буде завершено після скінченної кількості кроків, коли ми в усіх розкладеннях дійдемо до простих ідеалів. Отримане розкладення $\mathfrak{g}$ тоді має потрібні за умовою властивості з індуктивних міркувань, бо, як ми показали, мало їх на кожному кроці побудови.

2. Отже, нехай $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$, де $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ – прості ідеали $\mathfrak{g}$. Нехай $\mathfrak{a}$ – абелевий ідеал $\mathfrak{g}$ і $x \in \mathfrak{a}$. Тоді $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$, де $x_i \in \mathfrak{g}_i$ для кожного $i = \overline{1, m}$. За лемою 20.1, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$ є ідеалом $\mathfrak{g}_i$ для будь-якого i, абелевим, бо $\mathfrak{a}$ абелевий. Тому, оскільки $\mathfrak{g}_i$ простий, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i] = \{0\}$. Зокрема, $[x, y] = 0$ для будь-якого $y \in \mathfrak{g}_i$. З іншого боку, $[x, y] = [x_i, y]$, бо для $j \neq i$ дужка Лі $[x_j, y] \in [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i] = \{0\}$, оскільки сума пряма. Отже, $[x_i, y] = 0$ для усіх $y \in \mathfrak{g}_i$, тобто $x_i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_i) = \{0\}$ (за простотою $\mathfrak{g}_i$ і наслідком 19.2). Таким чином, $x_i = 0$ для кожного i, тобто $x = 0$. Ми показали, що $\mathfrak{a} = \{0\}$, отже $\mathfrak{g}$ напівпроста за твердженням 20.1.

■

Це твердження є, напевно, найкращою мотивацією використання терміну "напівпростий" для цього класу алгебр Лі. Зауважимо, що якщо скінченновимірна алгебра Лі $\mathfrak{g}$ задовольняє умовам його пункту 2., то її прості доданки теж попарно ортогональні відносно форми Кіллінга $\mathfrak{g}$, як у пункті 1., в силу наступної леми.

Лема 20.8. *Якщо $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ – ідеали скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ такі, що $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \{0\}$, то $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ ортогональні відносно форми Кіллінга $\mathfrak{g}$.*

Доведення. Дійсно, для будь-яких $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$ і $z \in \mathfrak{g}$ маємо $ad_x \circ ad_y(z) = [x, [y, z]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \{0\}$, бо $[y, z] \in \mathfrak{b}$. Таким чином, $ad_x \circ ad_y = 0$, а отже $\mathcal{K}(x, y) = \mathrm{Tr}\,(ad_x \circ ad_y) = 0$ для форми Кіллінга $\mathcal{K}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$, що й потрібно було показати.

■

Вправа 20.10. Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g}$ є скінченною прямою (у сенсі алгебр Лі) сумою своїх простих ідеалів: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$ (а отже напівпростою за пунктом 2. твердження 20.2). Тоді

- будь-який простий ідеал $\mathfrak{g}$ збігається з одним з ідеалів $\mathfrak{g}_i$;
- будь-який ідеал $\mathfrak{g}$ є прямою сумою деякої підмножини ідеалів $\mathfrak{g}_i$.

Ця вправа означає, що розкладення напівпростої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у суму простих ідеалів з твердження 20.2 єдине з точністю до перестановки доданків: ці доданки є в точності всіма простими ідеалами $\mathfrak{g}$.

Приклад 20.7. Як було встановлено у прикладі 20.5, алгебра Лі $\mathfrak{so}(4)$ напівпроста, але вона не є простою, бо ізоморфна $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ за вправою 11.10. З іншого боку, $\mathfrak{su}(2)$ (що ізоморфна $\mathfrak{so}(3)$ за вправою 11.5) проста за твердженням 19.3 (або прикладом 19.4), тому $\mathfrak{so}(4)$ є прямою сумою двох простих ідеалів, і це узгоджується з твердженням 20.2.

Завершимо розмову про розв'язні та напівпрості алгебри Лі формулюванням результату, що ще раз підкреслює важливість цих двох класів.

Теорема 20.3 (Розкладення Леві)**.** *Для будь-якої скінченновимірної алгебри Лі* $\mathfrak{g}$ *над полем характеристики* 0 *існує пряме (у сенсі векторних просторів) розкладення* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, *де*

- *підалгебра Леві* $\mathfrak{h}$ *є напівпростою підалгеброю Лі* $\mathfrak{g}$*;*

- *радикал* $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ *є найбільшим за включенням розв'язним ідеалом* $\mathfrak{g}$.

Доведення. Див. доведення загального випадку у [10, с. 78-82], [21, с. 100-106], [36, с. 412-413] або [40, с. 84-87], випадку алгебри Лі на полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ у [15, с. 499-500] і над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ – у [25, с. 659-662].

■

Оскільки $\mathfrak{h}$ не є, взагалі кажучи, ідеалом $\mathfrak{g}$, розкладення Леві у загальному випадку не є прямою сумою в сенсі алгебр Лі (див. твердження 11.3). Такі суми підалгебр Лі, коли лише один з доданків є ідеалом, називають *напівпрямими. Радикал* $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ визначений алгеброю Лі $\mathfrak{g}$ однозначно (доведіть його існування і єдиність для будь-якої скінченновимірної алгебри Лі самостійно або див, наприклад, [19, с. 24]), а ось *підалгебра Леві* $\mathfrak{h}$ – взагалі кажучи, ні (опис зв'язку різних підалгебр Леві є предметом *теореми Мальцева*, див, наприклад, [21, с. 106-107]). У наступному розділі ми познайомимося з конкретним прикладом розкладення Леві для одного з класів алгебр Лі – редуктивних. З розкладення Леві алгебри Лі однозв'язної групи Лі G можна отримати відповідне розкладення G у напівпрямий добуток напівпростої та нормальної розв'язної підгруп Лі (принаймні з точністю до ізоморфізма; пор. з доведенням теореми 21.1 наступного розділу для однозв'язного випадку). Це лише одне з багатьох корисних розкладень, що виникають у теорії Лі.

Розкладення Леві зводить у певному сенсі дослідження скінченновимірних алгебр Лі над полем характеристики 0 до дослідження напівпростого та розв'язного випадків. Її використання часто є першим кроком у доведенні загальних теорем, що стосуються таких алгебр Лі, наприклад, теореми Адо (у класичному випадку, тобто над полем характеристики 0; див. посилання на доведення після формулювання теореми 15.1). Е. Картану належить ефективний опис скінченновимірних напівпростих алгебр Лі над полем $\mathbb{C}$ у термінах так званих *систем коренів*, з якого випливає, зокрема, повна класифікація скінченновимірних простих алгебр Лі над $\mathbb{C}$ (а отже й напівпростих в силу твердження 20.2). З неї можна, у свою чергу, отримати відповідну класифікацію для скінченновимірних напівпростих алгебр Лі над $\mathbb{R}$ і для напівпростих груп Лі.

Ці техніка і результати описані (принаймні в комплексному випадку) майже у кожній книзі з теорії Лі або симетричних просторів, наприклад, у частині IV [15], главах III, IX і X [16], главах II – V [19], главі IV [21], главах II і VI [25], частині III [40].

21 Групи Лі, що допускають біінваріантну метрику. Загальний випадок

Помітимо, що у багатьох міркуваннях попереднього розділу, що стосувалися скінченновимірних напівпростих алгебр Лі над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0, форму Кіллінга можна замінити на довільну невироджену інваріантну симетричну білінійну форму, зокрема на інваріантний скалярний добуток у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, якщо він існує на даній алгебрі Лі. Це спостереження, як зараз побачимо, є ключовим для узагальнення результатів розділу 19 на випадок довільної (не обов'язково простої) зв'язної групи Лі. У цьому розділі знову керуємося переважно роботою [32].

Отже, нехай $\mathfrak{g}$ – скінченновимірна алгебра Лі над полем $\mathbb{R}$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знаковизначена інваріантна симетрична білінійна форма на $\mathfrak{g}$, зокрема, інваріантний евклідовий скалярний добуток у випадку додатної визначеності. Тоді для будь-якого векторного підпростору $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ маємо в силу знаковизначеності $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ у сенсі векторних просторів, де $\mathfrak{a}^\perp$ – ортогональне доповнення до $\mathfrak{a}$ відносно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Якщо $\mathfrak{a}$ – ідеал $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a}^\perp$ – теж ідеал за лемою 20.3, тому це пряма сума також у сенсі алгебр Лі за твердженням 11.3. Таким чином, отримали наступний аналог наслідку 20.3 (напівпростота тут вже не потрібна).

Наслідок 21.1. *Нехай $\mathfrak{a}$ – ідеал скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ з інваріантним скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тоді $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ є прямим (у сенсі алгебр Лі) ортогональним відносно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ розкладенням $\mathfrak{g}$.*

Дослівно повторюючи доведення пункту <u>1.</u> твердження 20.2 з використанням цього наслідку замість наслідку 20.3, отримаємо наступне аналогічне твердження.

Твердження 21.1. *Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – інваріантний скалярний добуток на скінченновимірній напівпростій алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$. Тоді $\mathfrak{g}$ є прямою (у сенсі алгебр Лі) сумою своїх простих ідеалів $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$, що попарно ортогональні відносно $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$.*

З вправи 20.10 тоді випливає, що це та ж (з точністю до перестановки доданків) пряма сума, що й у твердженні 20.2, оскільки її доданки є усіма простими ідеалами $\mathfrak{g}$. Тепер приберемо умову напівпростоти.

Твердження 21.2. *Нехай $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – інваріантний скалярний добуток на скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$. Тоді $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ є прямим (у сенсі алгебр Лі) ортогональним відносно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ розкладенням $\mathfrak{g}$. Тут $\mathfrak{g}'$ напівпроста, і є, у свою чергу, прямою (у сенсі алгебр Лі) сумою простих ідеалів $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ (а отже й $\mathfrak{g}'$), що попарно ортогональні відносно $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathfrak{g}' = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$.*

Доведення. Ще раз повторимо доведення пункту 1. твердження 20.2, але тепер без припущення напівпростоти. Далі під ортогональністю завжди маємо на увазі ортогональність відносно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Якщо $\mathfrak{g}$ проста (тоді $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ в силу зауваження перед означенням 20.3) або має вимірність 0 чи 1 (тоді вона абелева і отже $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$), то ми вже маємо потрібне. В іншому випадку у $\mathfrak{g}$ існує нетривіальний ідеал $\mathfrak{a}$, і $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ є прямим ортогональним розкладенням за наслідком 21.1, причому $0 < \dim \mathfrak{a}, \dim \mathfrak{a}^{\perp} < \dim \mathfrak{g}$ за нетривіальністю $\mathfrak{a}$. Обмеження $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на кожний з ідеалів $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}^{\perp}$ є інваріантним скалярним добутком за означенням (і тому що це підалгебри Лі). Кожен з цих ідеалів або простий, або одновимірний, або до нього застосуємо ту ж процедуру, що й до $\mathfrak{g}$. Як і у напівпростому випадку, ідеали $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}^{\perp}$ є ідеалами $\mathfrak{g}$ (чому?), тому, скажімо, розкладення $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^{\perp}$, де $\mathfrak{b}$ – нетривіальний ідеал $\mathfrak{a}$, дає пряму (за узагальненням твердження 11.3) суму $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^{\perp} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$, де усі доданки попарно ортогональні, причому $0 < \dim \mathfrak{b}, \dim \mathfrak{b}^{\perp} < \dim \mathfrak{a}$ за нетривіальністю. Повторюємо цю процедуру тепер для $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{b}^{\perp}$ (знову ж використавши те, що обмеження $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на них є інваріантними скалярними добутками), а також для доданків аналогічного розкладення $\mathfrak{a}^{\perp}$, якщо воно є, і так далі. Цей процес буде завершено за скінченну кількість кроків, бо на кожному з них вимірності ідеалів строго зменшуються. При цьому ми всюди дійдемо до простих або одновимірних (а отже абелевих) ідеалів, отримавши (після переставляння доданків, якщо необхідно) розкладення у пряму суму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_m \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_k$$

з попарно ортогональними доданками, де $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ – прості, а $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ – одновимірні ідеали $\mathfrak{g}$. Покладемо $\mathfrak{h} \coloneqq \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$ і $\mathfrak{a} \coloneqq \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \mathfrak{a}_i$, отримавши таким чином розкладення $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ у пряму ортогональну суму ідеалів (чому?). Оскільки $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ є простими ідеалами також у $\mathfrak{h}$, ідеал $\mathfrak{h}$ напівпростий за пунктом 2. твердження 20.2, зокрема, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$ за наслідком 20.4. Ідеал $\mathfrak{a}$ є за побудовою абелевим (чому?). Будь-які два елементи $\mathfrak{g}$ тоді мають вигляд $x + y$ і $z + w$, де $x, z \in \mathfrak{h}$ і $y, w \in \mathfrak{a}$, отже за означенням прямої суми алгебр Лі

$$[x+y, z+w] = [x,z] + [y,w] = [x,z] \in \mathfrak{h},$$

бо $\mathfrak{a}$ абелевий. Таким чином, за лінійністю $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{h}$, а отже $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}$. Щоб отримати потрібне, залишилося показати, що $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Це можна вивести з леми 20.4 ($\mathfrak{a} = \mathfrak{h}^\perp = (\mathfrak{g}')^\perp = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$), але ми наведемо й інше доведення, що не використовує $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Далі всюди $x, z \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$ і $y, w \in \mathfrak{a}$, як вище. Для будь-яких $y \in \mathfrak{a}$ і $z + w \in \mathfrak{g}$ маємо $[y, z+w] = [y, w] = 0$ за означенням прямої суми і абелевістю $\mathfrak{a}$, тому $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. З іншого боку, для будь-яких $x + y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ і $z \in \mathfrak{h}$ за означенням прямої суми $0 = [x+y, z] = [x, z]$, тобто $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \{0\}$ (в силу напівпростоти $\mathfrak{h}$, твердження 20.1 і леми 19.1), тому $x + y = y \in \mathfrak{a}$. Таким чином, дійсно $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

■

Означення 21.1. Скінченновимірна алгебра Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ характеристики 0 зветься *редуктивною*, якщо вона має пряме (у сенсі алгебр Лі) розкладення $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$, де $\mathfrak{h}$ – напівпростий ідеал, а $\mathfrak{a}$ – абелевий. Якщо до того ж $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ і форма Кіллінга $\mathfrak{h}$ від'ємно визначена, то редуктивна алгебра Лі $\mathfrak{g}$ зветься *компактною*.

Зокрема, будь-яка напівпроста або абелева скінченновимірна алгебра Лі над полем характеристики 0 є редуктивною. З вправи 20.8 випливає (як саме?), що редуктивні алгебри Лі є унімодулярними.

Твердження 21.2 означає, зокрема, що в його умовах алгебра Лі $\mathfrak{g}$ редуктивна. З іншого боку, дослівно повторюючи для розкладення $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ з означення довільної редуктивної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ останній етап доведення цього твердження, отримуємо, що $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'$ і $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ й для неї, тобто $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Зокрема, це розкладення (яке називають *редуктивним розкладенням* $\mathfrak{g}$) єдине. Зауважимо, що тут ми скористалися, зокрема, наслідком 20.4, умовами якого є скінченновимірність алгебри Лі та нульова характеристика поля, що частково пояснює появу цих умов у означенні редуктивності. Редуктивне розкладення є частковим випадком розкладення Леві з теореми 20.3 (чому?). Зокрема, для редуктивних алгебр Лі радикал збігається з центром. Виявляється також, що редуктивне розкладення ортогональне відносно будь-якої інваріантної симетричної білінійної форми на $\mathfrak{g}$ (зокрема, її форми Кіллінга). Щоб це показати у загальному випадку, нам потрібно буде замінити лему 20.8 попереднього розділу на наступну.

Лема 21.1. *Нехай $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ – ідеали алгебри Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{F}$ такі, що $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \{0\}$. Нехай при цьому $\mathfrak{a}$ скінченновимірний напівпростий і $\mathbb{F}$ має* *характеристику* 0 *або* $\mathfrak{a}$ *простий. Тоді* $\mathfrak{a}$ *і* $\mathfrak{b}$ *ортогональні відносно будь-якої інваріантної симетричної білінійної форми на* $\mathfrak{g}$.

Доведення. Для будь-яких $x, y \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{b}$ в силу інваріантності даної форми b маємо $b([x,y],z) = b(x,[y,z]) = 0$, бо $[y,z] \in [\mathfrak{a},\mathfrak{b}] = \{0\}$. Тоді $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ ортогональний до $\mathfrak{b}$ за білінійністю b. Оскільки $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ за наслідком 20.4 у напівпростому випадку або зауваженням перед означенням 20.3 – у простому, звідси випливає потрібне.

■

Наслідок 21.2. *У розкладенні* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$ *напівпростої алгебри Лі* $\mathfrak{g}$ *у пряму суму простих ідеалів та редуктивному розкладенні* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *редуктивної алгебри Лі* $\mathfrak{g}$ *усі доданки попарно ортогональні відносно будь-якої інваріантної симетричної білінійної форми* b *на* $\mathfrak{g}$*. При цьому* $b = \sum_{i=1}^{m} b_i$ *(відповідно,* $b = b_{\mathfrak{g}'} + b_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$*), де доданки є обмеженнями форми* b *на відповідні ідеали і є на них інваріантними симетричними білінійними формами. Якщо* $\mathfrak{g}$ *– алгебра Лі над* $\mathbb{R}$ *і* b *знаковизначена, то й усі ці обмеження знаковизначені з тим же знаком.*

Доведення. Це випливає з індуктивного застосування попередньої леми, простоти ідеалів $\mathfrak{g}_i$ у першому випадку і напівпростоти $\mathfrak{g}'$ разом зі скінченною вимірністю та нульовою характеристикою поля – у другому. Нехай $x, y \in \mathfrak{g}$. У першому випадку ці вектори однозначно представляються у вигляді сум $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} y_i$, де $x_i, y_i \in \mathfrak{g}_i$ для усіх $i = \overline{1,m}$. Тоді $b(x,y) = \sum_{i=1}^{m} b(x_i,y_i)$ в силу попарної ортогональності доданків. Позначивши $b_i \coloneqq b|_{\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i}$ для кожного i (ці форми будуть інваріантними симетричними білінійними формами на $\mathfrak{g}_i$, знаковизначеними, якщо b знаковизначена, і з тим же знаком за означеннями), отримуємо $b(x,y) = \sum_{i=1}^{m} b_i(x_i,y_i)$, тобто $b = \sum_{i=1}^{m} b_i$, що й було потрібно. Для редуктивного розкладення міркування такі ж.

■

Оскільки форма Кіллінга $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$ теж є на ній інваріантною симетричною білінійною формою за твердженням 19.1, а в умовах пункту <u>2.</u> твердження 20.2 обмеження $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i}$ на доданки прямої суми $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$ збігаються з формами Кіллінга $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i}$ цих доданків для усіх i за лемою 20.2, в силу попереднього наслідку маємо в цих умовах $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i}$ (це вірно й для будь-яких ідеалів $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$, а не тільки простих, в силу леми 20.8).

Твердження 21.3. *Нехай $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – інваріантний скалярний добуток на скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$, яка має в силу твердження 21.2 (і в його позначеннях) редуктивне розкладення*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i \right) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Тоді

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})},$$

де $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i}$ – форми Кіллінга $\mathfrak{g}_i$, що від'ємно визначені, $\lambda_i < 0$ для кожного $i = \overline{1, m}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$ – довільний скалярний добуток на $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. При цьому форма Кіллінга $\mathfrak{g}'$ має вигляд $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}'} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i}$ і теж від'ємно визначена.

Доведення. З попереднього наслідку випливає, що

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \cdot, \cdot \rangle_i + \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})},$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ – інваріантний скалярний добуток на $\mathfrak{g}_i$ для усіх $i = \overline{1, m}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$ – на $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, а суму розуміємо у сенсі, що пояснений у доведенні цього наслідку. Оскільки для кожного i ідеал $\mathfrak{g}_i$ простий, існування на ньому інваріантного скалярного добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ означає в силу твердження 19.4, що $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i}$ від'ємно визначена. За наслідком 19.4, тоді $\langle \cdot, \cdot \rangle_i = \lambda_i \mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i}$, де $\lambda_i < 0$. При цьому $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$ може бути будь-яким скалярним добутком на $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, бо цей ідеал абелевий (див. приклад 18.1). Як було зауважено перед даним твердженням, $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}'} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{K}_{\mathfrak{g}_i}$, і ця форма від'ємно визначена як сума від'ємно визначених.

■

Наслідок 21.3. *На скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ існує інваріантний скалярний добуток (тобто це алгебра Лі зв'язної групи Лі, що допускає біінваріантну ріманову метрику) тоді й тільки тоді, коли $\mathfrak{g}$ компактна.*

Доведення. Необхідність тут випливає з тверджень 21.2 (редуктивність $\mathfrak{g}$) та 21.3 (від'ємна визначеність форми Кіллінга $\mathfrak{g}'$). Покажемо достатність. Нехай $\mathfrak{g}$ компактна, тобто $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, де форма Кіллінга $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}'}$ від'ємно визначена. Тоді $-\mathcal{K}_{\mathfrak{g}'}$ є інваріантним скалярним добутком на ідеалі $\mathfrak{g}'$ в силу твердження 19.1. Будь-який скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на абелевому ідеалі $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ буде інваріантним (приклад 18.1). Тоді сума $(-\mathcal{K}_{\mathfrak{g}'}) + \langle\cdot,\cdot\rangle$ – інваріантний скалярний добуток на $\mathfrak{g}$ (перевірте це). Зауваження про алгебру Лі зв'язної групи, що допускає біінваріантну метрику, випливає з наслідку 18.1.

■

Як і у випадку простих груп Лі, тепер зберемо все, що ми дізналися про групи Лі, що допускають біінваріантні метрики, у підсумкову теорему, узагальнивши теорему 19.1. Зокрема, вона пояснює сенс застосування терміну "компактний" до алгебр Лі.

Теорема 21.1. *Зв'язна група Лі G допускає біінваріантну ріманову метрику тоді й тільки тоді, коли G ізоморфна прямому добутку груп Лі $K \times \mathbb{R}^l$, де K компактна (а $\mathbb{R}^l$ – зі стандартною абелевою структурою). Зокрема, напівпроста група Лі G допускає біінваріантну ріманову метрику тоді й тільки тоді, коли вона компактна.*

Доведення. Спочатку покажемо достатність. Нехай G ізоморфна $K \times \mathbb{R}^l$ (або просто K, тобто є компактною). На K існує біінваріантна метрика за твердженням 19.7, а на $\mathbb{R}^l$ будь-яка евклідова метрика буде біінваріантною, як пояснено у прикладах 18.1 і 18.4. Тоді сума цих метрик буде біінваріантною метрикою на $K \times \mathbb{R}^l$ (чому?). Переносячи її за допомогою ізоморфізма на групу G (як саме?), отримаємо біінваріантну метрику на ній.

Доведемо необхідність. Біінваріантній метриці на G відповідає в силу наслідку 18.1 інваріантний скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на її алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, що таким чином є компактною за наслідком 21.3. Більш детально,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i\right) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

за твердженням 21.2, де $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_m$ – прості ідеали $\mathfrak{g}$, сума пряма у сенсі алгебр Лі та ортогональна відносно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Для кожного $i = \overline{1,m}$ за основною теоремою теорії Лі існує однозв'язна група Лі G_i, алгебра Лі якої ізоморфна $\mathfrak{g}_i$. Зокрема, зв'язна G_i є таким чином простою. Якщо $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = k$, то $\mathbb{R}^k$ є однозв'язною групою Лі, алгебра Лі якої ізоморфна абелевому $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, за твердженням 11.1 і наслідком 11.5. Тоді прямий добуток $G_1 \times \ldots \times G_m \times \mathbb{R}^k$ є однозв'язною (див. [29, с. 154]) групою Лі, алгебра Лі якої ізоморфна $\mathfrak{g}$ (за вправами 2.3 і 11.9). При цьому, як було зазначено у доведенні твердження 21.3, обмеження $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на кожний ідеал $\mathfrak{g}_i$ є інваріантним скалярним добутком на ньому. Тоді за простотою G_i, твердженнями 19.4 і 19.5 усі G_i компактні, а отже й $\widehat{K} \coloneqq G_1 \times \ldots \times G_m$ компактна (і напівпроста, бо її алгебра Лі ізоморфна напівпростій $\mathfrak{g}'$). Якщо G однозв'язна, то за єдиністю в основній теоремі теорії Лі вона ізоморфна $G_1 \times \ldots \times G_m \times \mathbb{R}^k = \widehat{K} \times \mathbb{R}^k$ потрібного за умовою вигляду, що завершує доведення у цьому випадку.

Для довільної зв'язної G будемо діяти як при дослідженні зв'язних абелевих груп Лі у розділі 15. Ізоморфізму φ алгебри Лі $\widehat{K} \times \mathbb{R}^k$ на $\mathfrak{g}$ відповідає в силу однозв'язності $\widehat{K} \times \mathbb{R}^k$ і теореми 14.1 гомоморфізм груп Лі $\Phi\colon \widehat{K} \times \mathbb{R}^k \to G$ такий, що $d_e\Phi = \varphi$. Він задовольняє умові твердження 14.3, бо G зв'язна. В силу цього твердження і обговорення після нього, G ізоморфна (як топологічна група, але насправді і як група Лі теж) факторгрупі $\widehat{K} \times \mathbb{R}^k$ за нормальною замкненою дискретною підгрупою $L \coloneqq \operatorname{Ker}\Phi$. Якщо G (а отже й $\mathfrak{g}$) напівпроста, то доданок $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ у розкладені вище нульовий, тому абелевий фактор $\mathbb{R}^k$ відсутній. Тоді потрібна у цьому випадку компактність $G \cong K \coloneqq \widehat{K}/L$ випливає з компактності $\widehat{K}$. У загальному ж випадку можна показати (аналогічно до абелевих груп), що факторгрупа $(\widehat{K} \times \mathbb{R}^k)/L$ ізоморфна $\widetilde{K} \times T^{k-l} \times \mathbb{R}^l$, де $\widetilde{K}$ – компактна напівпроста група Лі з тією ж алгеброю Лі, що $\widehat{K}$, а $T^{k-l} \times \mathbb{R}^l$ абелева. Тоді, позначивши через K компактну групу Лі $\widetilde{K} \times T^{k-l}$, теж отримаємо потрібну за умовою ізоморфність.

■

Опис самих цих біінваріантних метрик, точніше, інваріантних скалярних добутків, яким вони відповідають, даний у твердженні 21.3. Зі згаданого наприкінці попереднього розділу існування класифікації скінченновимірних дійсних напівпростих алгебр (і груп) Лі випливає також можливість виділити з них компактні й таким чином описати усі зв'язні групи Лі, що допускають біінваріантну метрику.

Вправа 21.1. За яких необхідних та достатніх умов біінваріантна метрика на групі Лі буде ейнштейновою?

Приклад 21.1. Оскільки зв'язні групи $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ є напівпростими в силу прикладу 20.6, але у нетривіальному випадку $n \geqslant 2$ форми Кіллінга їхніх алгебр Лі $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ незнаковизначені, як показано у тому ж прикладі (або прикладі 19.7), ці напівпрості алгебри Лі не є компактними, а отже на них не існує інваріантних скалярних добутків за наслідком 21.3. Тому на $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ не існує біінваріантних метрик, а самі вони некомпактні за попередньою теоремою. На відміну від прикладу 19.7, тут ми показали це, не використовуючи простоту.

Зауважимо також, що хоча на некомпактній напівпростій групі Лі (як $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ з попереднього прикладу) й не існує біінваріантних ріманових метрик в силу теореми 21.1, невиродженість за критерієм Картана форми Кіллінга її алгебри Лі дозволяє аналогічним чином побудувати на ній біінваріантну *псевдоріманову* метрику (див., наприклад, [9, с. 126-132]). Це вірно (чому?) також для довільних редуктивних алгебр Лі та відповідних (зв'язних) груп Лі, тобто достатність у наслідку 21.3 зберігається, якщо замінити компактність на редуктивність, а інваріантний скалярний добуток – на інваріантну невироджену форму.

Вправа 21.2. Спробуйте з'ясувати, чи зберігається також необхідність, тобто чи обов'язково з існування на скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$ інваріантної невиродженої форми випливає редуктивність $\mathfrak{g}$. А над довільним полем характеристики 0?

22 Дії груп Лі та однорідні простори

Цим розділом розпочинається частина курсу, що присвячена однорідним просторам груп Лі та геометричним структурам на них. Ми почнемо з нагадування деяких загальноалгебраїчних понять.

Означення 22.1. *Лівою* (відповідно, *правою*) *дією* групи G на множині M зветься відображення $\lambda\colon G \times M \to M$ таке, що

- $\lambda(e, q) = q$ для будь-якої точки $q \in M$;
- $\lambda(a, \lambda(b, q)) = \lambda(ab, q)$ (відповідно, $\lambda(a, \lambda(b, q)) = \lambda(ba, q)$) для будь-яких елементів $a, b \in G$ і точки $q \in M$.

Далі за замовчуванням будемо говорити про ліві дії, для правих означення і конструкції вводяться аналогічно. Крім того, ліві дії природним чином пов'язані з правими, як видно з наступної вправи. Якщо зрозуміло, про яку саме ліву дію λ групи G на множині M йдеться, будемо використовувати позначення з точкою: $a \cdot q \coloneqq \lambda(a, q)$ для $a \in G$ і $q \in M$. У цих позначеннях умови з означення дії виглядають як $e \cdot q = q$ та $a \cdot (b \cdot q) = ab \cdot q$ для будь-яких $a, b \in G$ і $q \in M$.

Вправа 22.1. Показати, що якщо λ – ліва дія групи G на множині M, то $\mu\colon (a, q) \mapsto \lambda(a^{-1}, q)$ – права дія G на M.

Означення 22.2. *Оператором дії* λ групи G на множині M, що відповідає елементу $a \in G$, зветься відображення $\lambda_a\colon M \to M\colon q \mapsto \lambda(a, q)$.

Твердження 22.1. *Для будь-якої дії λ групи G на множині M і будь-якого $a \in G$ відображення $\lambda_a\colon M \to M$ є біекцією. При цьому $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab}$ для будь-яких $a, b \in G$ та $\lambda_e = id_M$, тобто $a \mapsto \lambda_a$ є гомоморфізмом з G в групу біекцій M на себе (з операцією композиції).*

Доведення. Дійсно, властивості, які потрібно довести, є просто переформулюваннями означення дії: $\lambda_a(\lambda_b(q)) = \lambda(a, \lambda(b, q)) = \lambda(ab, q) = \lambda_{ab}(q)$ і $\lambda_e(q) = \lambda(e, q) = q$ для будь-яких $a, b \in G$ і $q \in M$. Звідси випливає, що $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a = \lambda_e = id_M$ для усіх $a \in G$, тобто у кожного λ_a існує обернене відображення $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$, а отже λ_a – біекція.

■

Приклад 22.1. Для довільних групи G і підгрупи $H \subset G$ відображення $\lambda\colon H \times G \to G\colon (a, b) \mapsto ab$ визначає дію H на G в силу властивості одиниці групи та асоціативності множення, причому оператором дії λ_a для кожного $a \in H$ є лівий зсув L_a (який визначається для довільних груп так само, як для топологічних груп в означенні 3.1).

Означення 22.3. Дія групи G на множині M зветься

- *ефективною*, якщо для будь-якого $e \neq a \in G$ існує точка $q \in M$ така, що $a \cdot q \neq q$;

- *вільною*, якщо $a \cdot q \neq q$ для будь-яких $e \neq a \in G$ і $q \in M$;

- *транзитивною*, якщо для будь-яких $q, r \in M$ існує $a \in G$ такий, що $a \cdot q = r$.

Якщо G діє на M транзитивно, то M зветься *однорідним простором* G.

З цих означень випливає, зокрема, що вільні дії є ефективними. Крім того, дія вільна тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $q, r \in M$ існує не більше одного елемента $a \in G$ такого, що $r = a \cdot q$. Дійсно, достатність цієї умови випливає з її застосування до $q = r$. Щоб показати необхідність, помітимо, що рівність $r = a \cdot q = b \cdot q$ еквівалентна $q = a^{-1}b \cdot q$. Для цього просто подіємо на обидві сторони елементом a^{-1} і використаємо умови означення дії:

$$q = e \cdot q = a^{-1}a \cdot q = a^{-1} \cdot (a \cdot q) = a^{-1} \cdot (b \cdot q) = a^{-1}b \cdot q$$

У випадку вільної дії $q = a^{-1}b \cdot q$ лише при $a^{-1}b = e$, тобто $a = b$, що й означає потрібне. Тому дія вільна і транзитивна тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $q, r \in M$ існує єдиний $a \in G$ такий, що $r = a \cdot q$. Вільну транзитивну дію інколи називають *просто транзитивною*.

Означення 22.4. Нехай група G діє на множині M.

- *Стабілізатором точки* $q \in M$ зветься $G_q \coloneqq \{a \in G \mid a \cdot q = q\}$.

- *Стабілізатором підмножини* $A \subset M$ зветься $G_A \coloneqq \{a \in G \mid \forall\, q \in A\ a \cdot q = q\}$.

- *Орбітою точки* $q \in M$ зветься $G \cdot q \coloneqq \{a \cdot q \mid a \in G\}$.

Зокрема, $G_A = \bigcap\limits_{q \in A} G_q$ для будь-якої $A \subset M$ за цими означеннями (наприклад, $G_{\{q\}} = G_q$ для кожної $q \in M$). Також можна переформулювати властивості дії у термінах цих множин: вона ефективна тоді й тільки тоді, коли $G_M = \{e\}$; вільна тоді й тільки тоді, коли $G_q = \{e\}$ для будь-якої $q \in M$; і транзитивна тоді й тільки тоді, коли $G \cdot q = M$ для будь-якої $q \in M$, тобто вся множина M є орбітою кожної своєї точки. З іншого боку, дія G на кожній її орбіті транзитивна (чому?), тому будь-яка орбіта є однорідним простором G.

Вправа 22.2. Показати, що будь-які дві орбіти будь-якої дії G на M або не перетинаються, або збігаються. З цього випливає, що вони є класами еквівалентності деякого відношення еквівалентності $\sim$ на M, де $q \sim r$ тоді й тільки тоді, коли $r \in G \cdot q$.

Приклад 22.2. Окрім дії зсувами, як у прикладі 22.2, будь-яка група G діє на собі спряженнями: $a \cdot b \coloneqq C_a b = aba^{-1}$ для $a, b \in G$. Тут використали те ж позначення для спряження (внутрішнього автоморфізма) C_a, що й для топологічних груп в означенні 3.1. Нагадаємо, що $C_a \colon G \to G$ є ізоморфізмом G на себе (доведення для довільної групи таке ж, як для топологічної групи у твердженні 3.1). Оскільки $C_a \circ C_b = C_{ab}$ для будь-яких $a, b \in G$ (див. доведення твердження 12.1) і $C_e = id_G$ за означенням, це дійсно дія G на G з операторами дії C_a. Вона не транзитивна для нетривіальної G, оскільки $G \cdot e = \{e\}$. При цьому $G_b = \{a \in G \mid aba^{-1} = b\}$ – *централізатор* довільного елемента $b \in G$ (зауважимо, що умова $aba^{-1} = b$ еквівалентна умові комутування $ab = ba$), а $G_G = \{a \in G \mid \forall\, b \in G\ ab = ba\}$ – *центр* $Z(G)$ групи G. З алгебри відомо, що централізатори є підгрупами G, а центр – її нормальною підгрупою. Виявляється, що це вірно й для стабілізаторів будь-якої дії, як буде показано у твердженні 22.2.

Лема 22.1. *Нехай група G діє на множині M. Для будь-яких $a \in G$ і $q \in M$ стабілізатором точки $a \cdot q$ є $G_{a \cdot q} = C_a(G_q) = \{aba^{-1} \mid b \in G_q\}$.*

Доведення. Дійсно, умова $c \in G_{a\cdot q}$ означає, що $ca \cdot q = c \cdot (a \cdot q) = a \cdot q$ за властивостями дії. Діючи на обидві частини елементом a^{-1} (як у зауваженні після означення 22.3), отримуємо еквівалентну умову $a^{-1}ca \cdot q = q$, тобто $b := a^{-1}ca \in G_q$. Це, у свою чергу, еквівалентне тому, що $c = aba^{-1} \in C_a(G_q)$, що й дає потрібну рівність $G_{a\cdot q} = C_a(G_q)$.

■

Твердження 22.2. *Нехай група G діє на множині M. Стабілізатор G_A будь-якої підмножини $A \subset M$ (зокрема, стабілізатор G_q будь-якої точки $q \in M$) є підгрупою G, а G_M – її нормальною підгрупою.*

Доведення. Для будь-яких $q \in M$ і $a, b \in G_q$ за означеннями маємо $ab \cdot q = a \cdot (b \cdot q) = a \cdot q = q$, отже $ab \in G_q$, і $a^{-1} \cdot q = a^{-1} \cdot (a \cdot q) = a^{-1}a \cdot q = e \cdot q = q$, отже $a^{-1} \in G_q$. Таким чином, усі G_q є підгрупами, а отже й усі $G_A = \bigcap\limits_{q\in A} G_q$ для $A \subset M$ як перетини підгруп. Також для будь-якого $a \in G$ з попередньої леми випливає, що

$$C_a(G_M) = C_a\left(\bigcap_{q\in M} G_q\right) = \bigcap_{q\in M} C_a(G_q) = \bigcap_{q\in M} G_{a\cdot q} = \bigcap_{q\in M} G_q = G_M,$$

що й означає потрібну нам нормальність G_M. Тут передостання рівність випливає з доведеної у твердженні 22.1 бієктивності λ_a: якщо q пробігає усі точки M, то $a \cdot q = \lambda_a(q)$ – теж.

■

Наслідок 22.1. *Нехай група G діє на множині M. Для будь-яких $a \in G$ і $q \in M$ підгрупа $G_{a\cdot q} = C_a(G_q)$ ізоморфна підгрупі G_q. Зокрема, якщо дія транзитивна, то стабілізатори усіх точок M ізоморфні.*

Доведення. За лемою 22.1, $G_{a\cdot q} = C_a(G_q)$. Оскільки, як було зазначено у прикладі 22.2, спряження $C_a\colon G \to G$ є ізоморфізмом, ця рівність означає, зокрема, що спряжені підгрупи $G_{a\cdot q}$ і G_q ізоморфні. Друге твердження випливає звідси та з означення транзитивності.

■

Приклад 22.3. Нехай $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ – представлення групи G на векторному просторі V. Тоді умова $a \cdot q := \rho(a)(q)$ для $a \in G$, $q \in V$ задає дію G на V. Дійсно, $e \cdot q = \rho(e)(q) = id_V(q) = q$ і $a \cdot (b \cdot q) = \rho(a)(\rho(b)(q)) = \rho(ab)(q) = ab\cdot q$ для будь-яких $a \in G$, $q \in M$, оскільки за означенням представлення ρ є гомоморфізмом. Операторами цієї дії будуть за побудовою оператори представлення $\rho(a)$, $a \in G$. Оскільки усі $\rho(a)$ є невиродженими лінійними операторами на V, $G_q = G$ при $q = 0$, $G_q \supset \operatorname{Ker}\rho$ для довільної $q \in V$ і $G_V = \rho^{-1}(id_V) = \operatorname{Ker}\rho$. Таким чином, ця дія ніколи не є вільною (для нетривіальної G) та є ефективною тоді й тільки тоді, коли гомоморфізм ρ ін'єктивний, тобто представлення точне. Зокрема, це так для тавтологічного представлення з прикладу 12.2, коли $G \subset \mathrm{GL}(V)$ – підгрупа і ρ є гомоморфізмом включення. Оскільки $G \cdot 0 = \{0\}$, ця дія не є транзитивною при $V \neq \{0\}$.

Тепер перейдемо до випадку коли G – група Лі, а M – гладкий многовид (нагадаємо, що гладкість ми всюди вважаємо нескінченною).

Означення 22.5. Дія $\lambda\colon G \times M \to M$ групи Лі G на гладкому многовиді M зветься *гладкою*, якщо є гладким відображенням: $\lambda \in C^\infty(G{\times}M, M)$ (для стандартної гладкої структури на добутку $G \times M$). Якщо ця гладка дія транзитивна, то M зветься *однорідним простором* групи Лі G.

Твердження 22.3. *Якщо λ – гладка дія групи Лі G на гладкому многовиді M, то оператор цієї дії $\lambda_a\colon M \to M$ є дифеоморфізмом для будь-якого $a \in G$.*

Доведення. Як було показано у твердженні 22.1, усі λ_a є бієкціями. Кожне з них гладке як композиція гладких відображень $M \to G{\times}M\colon q \mapsto (a, q)$ і $\lambda\colon G \times M \to M$. Оскільки, як теж показано у згаданому твердженні, $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$ для кожного a, це обернене відображення тоді також гладке, отже λ_a – дійсно дифеоморфізм.

■

Твердження 22.4. *Нехай задана гладка дія групи Лі G на гладкому многовиді M.*

1. *Стабілізатор G_A будь-якої підмножини $A \subset M$ (зокрема, стабілізатор G_q будь-якої точки $q \in M$) є вкладеною замкненою підгрупою Лі G, а G_M – її нормальною вкладеною замкненою підгрупою Лі.*

2. *Для будь-яких $a \in G$ і $q \in M$ підгрупа Лі $G_{a \cdot q} = C_a(G_q)$ ізоморфна підгрупі Лі G_q. Зокрема, якщо дія транзитивна, то стабілізатори усіх точок M ізоморфні як підгрупи Лі.*

Доведення.

1. В силу твердження 22.2, усі стабілізатори точок і підмножин є підгрупами G, зокрема G_M – нормальною підгрупою. До того ж, вони усі замкнені. Дійсно, для будь-якої $q \in M$ і кожної послідовності

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G_q$ маємо $a_n \cdot q = q$. Якщо ця послідовність збігається до $a \in G$ (в топології G), то

$$a \cdot q = \lambda(a, q) = \lim_{n\to\infty} \lambda(a_n, q) = q,$$

бо дія (яку тут позначаємо через λ) гладка, зокрема неперервна. Тому дійсно G_q – замкнена підгрупа G, а отже й $G_A = \bigcap_{q\in A} G_q$ для будь-якої $A \subset M$ як перетин підгруп та замкнених підмножин. Тоді G_A є вкладеною підгрупою Лі за теоремою Картана.

2. Це уточнення наслідку 22.1, що, у свою чергу, випливає з леми 22.1. Оскільки за цією лемою $G_{a\cdot q} = C_a(G_q)$, а $C_a\colon G \to G$ є ізоморфізмом груп Лі за твердженням 3.1, його обмеження $C_a|_{G_q}\colon G_q \to G_{a\cdot q}$ теж є ізоморфізмом груп Лі в силу наслідку 2.2 та означення ізоморфізма. Твердження про транзитивну дію тоді так само випливає звідси та з означення.

■

Приклад 22.4. Якщо H – підгрупа Лі групи Лі G, то її дія на G лівими зсувами з прикладу 22.1, що визначена умовою $a\cdot b = ab$ для $a \in H, b \in G$, є гладкою в силу гладкості відображень включення H у G і добутку G. Вона завжди вільна, а транзитивною є тоді й тільки тоді, коли $H = G$ (перевірте це для загального випадку з прикладу 22.1). Зокрема, кожна група Лі є своїм власним однорідним простором для такої дії. Див. також приклад 22.12 далі.

Приклад 22.5. Для будь-якої групи Лі G її дія на себе спряженнями з прикладу 22.2 ($a \cdot b = aba^{-1}$ для $a, b \in G$) гладка в силу гладкості відображень добутку та взяття оберненого групи Лі G (перевірте це). Зокрема, тому централізатори усіх елементів G є її вкладеними замкненими підгрупами Лі, а центр $Z(G)$ – нормальною вкладеною замкненою підгрупою Лі за міркуваннями згаданого прикладу і пунктом 1. твердження 22.4. Як відомо з пункту 3. твердження 13.1, тоді алгебра Лі $Z(G)$ повинна бути ідеалом алгебри Лі групи G. Насправді нам цей ідеал вже добре відомий з попередніх розділів.

Вправа 22.3. Показати, що алгеброю Лі центра групи Лі G є центр її алгебри Лі $\mathfrak{g}$: $T_e Z(G) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Приклад 22.6. Нехай $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ – представлення групи Лі G на скінченновимірному векторному просторі V над $\mathbb{R}$, тобто гомоморфізм груп Лі G і $\mathrm{GL}(V)$. Введемо на V структуру гладкого многовида, перенесши стандартну гладку структуру з $\mathbb{R}^n$, де $n = \dim V$, за допомогою ізоморфізма (що, у свою чергу, визначений вибором базиса V). Тоді відповідна дія G на V з прикладу 22.3, що визначена рівністю $a \cdot q = \rho(a)(q)$ для $a \in G$, $q \in V$, є гладкою: у згаданому базисі V координати вектора $\rho(a)(q)$ гладкі за a, бо ρ – гладке відображення, та за координатами q в силу лінійності. Зокрема, будь-якій підгрупі Лі $G \subset \mathrm{GL}(V)$ відповідає тавтологічне представлення (тобто гомоморфізм включення, див. приклад 12.4), а отже гладка дія G на V. Якщо $V = \mathbb{R}^n$, то $\mathrm{GL}(V)$ очевидним чином ототожнюється з матричною групою Лі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (пор. з наслідком 12.1), тому можемо говорити про гладкі дії матричних (під)груп Лі $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^n$, що задані тавтологічними представленнями: $A \cdot q = Aq$ для $A \in G$ і вектора-стовпчика $q \in \mathbb{R}^n$. Аналогічні міркування вірні й для скінченновимірного простору V над $\mathbb{C}$, зокрема для $V = \mathbb{C}^n$ (перевірте це).

Приклад 22.7. Абелева група Лі $\mathbb{R}^n$ діє на просторі $\mathbb{R}^n$ паралельними перенесеннями: $a \cdot q \coloneqq q + a$ для $a, q \in \mathbb{R}^n$. Це дія за властивостями додавання векторів (ліва і права). Вона гладка відносно стандартних гладких структур на обох цих $\mathbb{R}^n$, бо координати $q + a$ гладко залежать від координат a та q, вільна за означенням (зокрема, стабілізатор $(\mathbb{R}^n)_q = \{0\}$ для будь-якої $q \in \mathbb{R}^n$), та транзитивна, бо $r = q + (r - q)$ для будь-яких $q, r \in \mathbb{R}^n$, тобто $\mathbb{R}^n$ є своїм власним однорідним простором групи Лі. Насправді це просто частковий випадок прикладу 22.4, але ми навели його окремо через наочність і важливість з геометричної точки зору.

Приклад 22.8. Тепер окремо розглянемо гладку дію матричної групи Лі $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на просторі $\mathbb{R}^n$ для натурального n, що була описана наприкінці прикладу 22.6: $A \cdot q = Aq$ для $A \in \mathrm{O}(n)$ і $q \in \mathbb{R}^n$. Операторами дії тут є лінійні ізометрії стандартної евклідової метрики $\mathbb{R}^n$. Аналогічно до прикладу 22.3, ця дія ефективна, але не вільна і не транзитивна, бо $A \cdot 0 = 0$ для усіх A. При цьому орбітою будь-якої точки q є сфера з центром у початку координат: $\mathrm{O}(n) \cdot q = S^{n-1}_{|q|} \coloneqq \{r \in \mathbb{R}^n \mid |r| = |q|\}$, де $|\cdot|$ – евклідова норма $\mathbb{R}^n$ (в силу ізометричності і того, що будь-яку точку r такої сфери можна перевести в будь-яку іншу точку s, наприклад, симетрією відносно гіперплощини, що проходить через 0 ортогонально до вектора $r - s$). "Звузимо" дію, взявши у якості многовида M одиничну сферу $S^{n-1} = S^{n-1}_1$: вона при цьому залишиться гладкою дією (чому?), але стане транзитивною в силу сказаного вище про орбіти. Отже, S^{n-1} – однорідний простір групи Лі $\mathrm{O}(n)$. Ця дія також ефективна (бо будь-яка лінійна ізометрія $\mathbb{R}^n$ однозначно визначена своїм обмеженням на S^{n-1}), але не вільна при $n \geqslant 2$. Щоб переконатися у цьому, обчислимо стабілізатор $\mathrm{O}(n)_q$ деякої точки, скажімо, північного полюса сфери $q = (0, \ldots, 0, 1)$, що є замкненою підгрупою Лі $\mathrm{O}(n)$ за пунктом 1.

твердження 22.4. Будемо шукати ортогональні матриці, що зберігають цю точку на місці, у блоковому вигляді $\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array}\right)$, де $A \in \mathrm{Mat}(n-1,\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ – вектор-стовпчик, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ – вектор-рядок, $d \in \mathbb{R}$. Тоді умовою належності такої матриці до $\mathrm{O}(n)_q$ є

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b \\ \hline d \end{array}\right),$$

тобто $b = 0$, $d = 1$. Запишемо тепер умову ортогональності:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = I_n = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline c & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline c & 1 \end{array}\right)^T =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline c & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A^T & c^T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA^T & Ac^T \\ \hline cA^T & cc^T+1 \end{array}\right).$$

Тут і далі через I_n будемо позначати одиничну матрицю порядку n. Звідси маємо, зокрема, що $1 = cc^T + 1 = |c|^2 + 1$, тобто $c = 0$, і $AA^T = I_{n-1}$, тобто $A \in \mathrm{O}(n-1)$. І навпаки, при виконанні цих двох умов попередні матричні рівності вірні. Таким чином,

$$\mathrm{O}(n)_q = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \,\middle|\, A \in \mathrm{O}(n-1) \right\} \cong \mathrm{O}(n-1),$$

де ізоморфізм матричних груп Лі $\mathrm{O}(n)_q$ і $\mathrm{O}(n-1)$ будуємо, ставлячи у відповідність блоковій матриці $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ матрицю A (покажіть, що це дійсно ізоморфізм). З геометричної точки зору це означає ототожнення ізометрій, що відповідають матрицям з $\mathrm{O}(n)_q$, та їхніх обмежень на ортогональну до q гіперплощину $q^\perp$ (у даному випадку вона має рівняння $x^n = 0$), яку вони теж зберігають і на якій є лінійними ізометріями, точніше, на перетин $q^\perp \cap S^{n-1}$, що є $(n-2)$-вимірною сферою. Стабілізатори інших точок S^{n-1} тоді теж ізоморфні $\mathrm{O}(n-1)$ в силу транзитивності та пункту 2. твердження 22.4. Їх можна обчислити аналогічно, обравши інші декартові координати на $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$ стабілізатори обох точок S^0 тривіальні (чому?), отже дія вільна.

Помітимо тепер, що при $n \geqslant 2$ підгрупа Лі $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n)$ також діє на S^{n-1} гладко і транзитивно, оскільки можна перевести будь-яку точку сфери в будь-яку іншу, наприклад, обертанням навколо $(n-2)$-вимірного підпростору $\mathbb{R}^n$ (покажіть це), тобто S^{n-1} є однорідним простором групи Лі $\mathrm{SO}(n)$. Ця дія теж буде ефективною (з тих же причин), але не вільною при $n \geqslant 3$, бо, обчислюючи аналогічним до $\mathrm{O}(n)_q$ чином стабілізатор точки $q = (0, \dots, 0, 1)$, отримаємо

$$\mathrm{SO}(n)_q = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \,\middle|\, A \in \mathrm{SO}(n-1) \right\} \cong \mathrm{SO}(n-1).$$

Тут додається умова рівності детермінанта матриці одиниці, звідки й випливає $A \in \mathrm{SO}(n-1)$. Ізоморфізм будується так само, як для $\mathrm{O}(n)_q$, і з тих же міркувань стабілізатори решти точок теж ізоморфні $\mathrm{SO}(n-1)$. При $n = 2$ ці групи тривіальні, тому дія вільна.

Приклад 22.9. Перейдемо від сфер з попереднього прикладу до їхніх факторпросторів – дійсних проєктивних просторів $\mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$ для натуральних n. Нагадаємо, що точками $\mathbb{R}P^{n-1}$ є пари діаметрально протилежних точок з S^{n-1}, а самі ці простори є $(n-1)$-вимірними компактними гладкими многовидами. Оскільки в силу лінійності описані у попередньому прикладі дії груп $\mathrm{O}(n)$ і $\mathrm{SO}(n)$ переводять діаметрально протилежні точки у діаметрально протилежні та транзитивні на S^{n-1}, вони факторизуються у транзитивні дії на $\mathbb{R}P^{n-1}$: $A \cdot \{x, -x\} \coloneqq \{Ax, -Ax\}$. Такі дії також є гладкими (перевірте це, використавши однорідні координати), тобто $\mathbb{R}P^{n-1}$ є однорідним простором груп Лі $\mathrm{O}(n)$ і $\mathrm{SO}(n)$, але не вільними (і навіть не ефективними у випадку $\mathrm{O}(n)$). Щоб це перевірити, знову обчислимо стабілізатор при $n \geqslant 2$, позначивши тепер $q \coloneqq (0 : \ldots : 0 : 1) = \{(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, -1)\} \in \mathbb{R}P^{n-1}$. Якщо матриця з $\mathrm{O}(n)$ зберігає цю точку $\mathbb{R}P^{n-1}$, то вона або зберігає обидві точки сфери $(0, \dots, 0, 1)$ і $(0, \dots, 0, -1)$, або міняє їх місцями. У першому випадку вона дорівнює $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ для $A \in \mathrm{O}(n-1)$ за міркуваннями попереднього прикладу. У другому аналогічні міркування (проведіть їх) демонструють, що матриця повинна мати вигляд $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right)$, де знову $A \in \mathrm{O}(n-1)$. Таким чином,

$$\mathrm{O}(n)_q = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \,\middle|\, A \in \mathrm{O}(n-1) \right\} \bigsqcup \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) \,\middle|\, A \in \mathrm{O}(n-1) \right\}.$$

Тоді $\mathrm{O}(n)_q \cong \mathrm{O}(n-1) \times \mathrm{O}(1)$, де ізоморфізм переводить матриці з першої множини у пари $(A, (1))$, а з другої – у $(A, (-1))$ (див. опис $\mathrm{O}(1)$ у прикладі 4.2). Перевірте, що це дійсно ізоморфізм груп Лі. Як і у попередньому прикладі, стабілізатори решти точок теж ізоморфні $\mathrm{O}(n-1) \times \mathrm{O}(1)$ за транзитивністю та пунктом 2. твердження 22.4. При $n = 1$

маємо $\mathrm{O}(1)_q = \mathrm{O}(1)$ для єдиної точки q. У будь-якому разі $\mathrm{O}(n)_{\mathbb{R}P^{n-1}} = \{I_n, -I_n\} \cong \mathrm{O}(1)$ (перевірте це), тому ця дія дійсно не є ефективною, а отже й вільною. Для дії групи $\mathrm{SO}(n)$ додається умова рівності визначника матриці одиниці, тому аналогічним чином для $n \geqslant 2$ отримуємо

$$\mathrm{SO}(n)_q = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \;\middle|\; A \in \mathrm{SO}(n-1) \right\} \bigsqcup \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right) \;\middle|\; A \in \mathrm{O}^-(n-1) \right\},$$

де позначення $\mathrm{O}^-(n-1)$ для підмножини ортогональних матриць визначника -1 було введене перед означенням 4.1. Звідси випливає, що $\mathrm{SO}(n)_q \cong \mathrm{O}(n-1)$, де ізоморфізм переводить матриці з обох підмножин у підматриці $A \in \mathrm{O}(n-1)$ (перевірте ізоморфність). Знову ж, стабілізатори інших точок теж ізоморфні $\mathrm{O}(n-1)$. Таким чином, ця дія не є вільною крім випадку $n = 1$, коли стабілізатори тривіальні. Вона ефективна тоді й тільки тоді, коли n є непарним (чому?).

Вправа 22.4. Показати, що комплексний проєктивний простір $\mathbb{C}P^n$ теж однорідний, знайшовши для нього групу Лі (можливо, не одну), що діє гладко і транзитивно. Обчислити стабілізатори цих дій та з'ясувати, чи є вони ефективними або вільними.

Приклад 22.10. Раніше у цьому курсі (після означення 13.1 та у доведенні наслідку 17.6) згадувалися грассманіани $G_m V$, тобто множини m-вимірних векторних підпросторів дійсного n-вимірного простору V. Ототожнивши для спрощення V з $\mathbb{R}^n$ за допомогою вибору базиса, розглянемо стандартний *грассманіан* $G_m(n)$ – множину усіх m-вимірних векторних підпросторів $\mathbb{R}^n$. Це означення має сенс для довільних цілих невід'ємних $0 \leqslant m \leqslant n$, але далі вважаємо n натуральним ($G_0(0)$, звичайно, одноточковий). Оскільки лінійні ізометрії переводять векторні підпростори у підпростори тієї ж вимірності як невироджені оператори, дія групи $\mathrm{O}(n)$ на $\mathbb{R}^n$ з прикладу 22.6 індукує дію на грассманіані: $A \cdot q = \{Ax \mid x \in q\}$ (перевірте, що це дійсно дія).

Вправа 22.5. Показати, що будь-який m-вимірний векторний підпростір $\mathbb{R}^n$ можна перевести в будь-який інший лінійною ізометрією, тобто група $\mathrm{O}(n)$ діє на $G_m(n)$ транзитивно.

Таким чином, $G_m(n)$ є однорідним простором $\mathrm{O}(n)$ (але поки що не як групи Лі, бо на $G_m(n)$ немає гладкої структури; вона з'явиться далі у прикладі 23.1). Зауважимо, що $G_0(n)$ і $G_n(n)$ є одноточковими, а відповідність між гіперплощинами та їхніми нормальними прямими (відносно стандартної евклідової метрики $\mathbb{R}^n$) задає бієкцію між $G_{n-1}(n)$

і $G_1(n)$, що, у свою чергу, ототожнюється з $\mathbb{R}P^{n-1}$ за означенням проєктивного простору: прямій (одновимірному підпростору) у $\mathbb{R}^n$ відповідає пара діаметрально протилежних точок її перетину з S^{n-1}. Описана дія при цьому збігається з дією $\mathrm{O}(n)$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$ з прикладу 22.9 (чому?). У загальному випадку вона також не є вільною, бо не є ефективною: $-I_n \in \mathrm{O}(n)$ відповідає центральній симетрії, що залишає усі підпростори на місці (а як виглядає $\mathrm{O}(n)_{G_m(n)}$?). Звичайно, при $m = 0$ та $m = n$ маємо $\mathrm{O}(n)_q = \mathrm{O}(n)$ для єдиної точки q, тому далі вважатимемо, що $0 < m < n$ (тоді $n \geqslant 2$). Обчислимо стабілізатор $\mathrm{O}(n)_q$ точки $q \coloneqq \{x = (x^1, \ldots, x^n) \mid x^{m+1} = \ldots = x^n = 0\}$. Матриця належить до цієї підгрупи тоді й тільки тоді, коли переводить будь-який вектор вигляду $(y^1, \ldots, y^m, 0, \ldots, 0)$ у вектор того ж вигляду. Будемо шукати такі матриці як блокові $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$, де $A \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$, $D \in \mathrm{Mat}(n-m, \mathbb{R})$, а B і C – матриці вимірностей $m \times (n-m)$ і $(n-m) \times m$ відповідно з дійсними компонентами. Тоді умова збереження q означає, що для будь-якого вектора-стовпчика $y \in \mathbb{R}^m$ останні $n - m$ координат вектора

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} y \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} Ay \\ \hline Cy \end{array}\right)$$

повінні бути нульовими, звідки маємо $C = 0$. Умова ортогональності матриці тоді приймає вигляд

$$\left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array}\right) = I_n = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)^T =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A^T & 0 \\ \hline B^T & D^T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA^T + BB^T & BD^T \\ \hline DB^T & DD^T \end{array}\right).$$

Звідси випливає, по-перше, що $DD^T = I_{n-m}$, тобто $D \in \mathrm{O}(n-m)$, далі з еквівалентних умов $BD^T = DB^T = 0$ і невиродженості ортогональної матриці D маємо $B = 0$, і тому $AA^T = I_m$, отже $A \in \mathrm{O}(m)$. Таким чином,

$$\mathrm{O}(n)_q = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \;\middle|\; A \in \mathrm{O}(m),\, D \in \mathrm{O}(n-m) \right\} \cong \mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(n-m),$$

де ізоморфізм ставить у відповідність кожній блоково-діагональній матриці $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ пару (A, D) і є, власне, ізоморфізмом груп, бо при множенні таких матриць блоки, що утворюють діагональ, множаться окремо. Зауважимо, що, хоча ми й не показали поки що гладкість дії та тому не можемо користуватися твердженням 22.4, матрична підгрупа $\mathrm{O}(n)_q$ є замкненою (чому?), а тому є підгрупою Лі за теоремою Картана, а ізоморфізм – ізоморфізмом груп Лі (перевірте це; у таких доведеннях буває корисною вправа 14.4). Як і у попередніх прикладах, стабілізатори решти точок також ізоморфні цій групі в силу транзитивності та леми 22.1 (чи можна стверджувати, що вони ізоморфні як групи Лі?). Зокрема, при $m = n-1$ вони ізоморфні $\mathrm{O}(n-1) \times \mathrm{O}(1)$, а при $m = 1$ – ізоморфній (чому?) групі $\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n-1)$. Так і повинно бути, бо це дія $\mathrm{O}(n)$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$ з прикладу 22.9, як зазначалося вище. Помітимо також, що перехід до ортогонального доповнення підпростору породжує бієкцію між $G_m(n)$ і $G_{n-m}(n)$, яка "пов'язує" відповідні дії $\mathrm{O}(n)$ (аналогічно до відображення Ψ із зауваження перед твердженням 23.1 наступного розділу; перевірте це), тому групи $\mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(n-m)$ і $\mathrm{O}(n-m) \times \mathrm{O}(m)$, що відповідно ізоморфні стабілізаторам цих двох дій, ізоморфні й для довільного $0 < m < n$ (це нескладно перевірити й безпосередньо).

Вправа 22.6. Чи діє група $\mathrm{SO}(n)$ на $G_m(n)$ також транзитивно? Якщо так, то обчислити стабілізатори цієї дії та з'ясувати, чи є вона ефективною або вільною.

Вправа 22.7. Для цілих невід'ємних $0 \leqslant m \leqslant n$ визначимо *орієнтований грассманіан* $G_m^+(n)$ як множину орієнтованих m-вимірних векторних підпросторів $\mathbb{R}^n$, тобто усіх пар $(W, \mathcal{O})$ де W – такий підпростір, а $\mathcal{O}$ – одна з двох орієнтацій W. Зокрема, кожній точці $G_m(n)$ відповідають дві точки $G_m^+(n)$. При цьому $G_1^+(n)$ і $G_{n-1}^+(n)$ ототожнюються з S^{n-1} для будь-якого натурального n (чому?). Знайти групу Лі (можливо, не одну), що діє на $G_m^+(n)$ транзитивно при натуральному n. Обчислити стабілізатори цих дій та з'ясувати, чи є вони ефективними або вільними.

Приклад 22.11. Визначимо представлення ρ групи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на векторному підпросторі $A_n \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, що складається з симетричних матриць, умовою $\rho(A)(B) \coloneqq ABA^T$ для $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $B \in A_n$ (зрозуміло, що тоді $ABA^T \in A_n$). В силу лінійної залежності цього виразу від B і гладкої – від A, це дійсно представлення групи Лі (перевірте це формально), тому згідно з прикладом 22.6 йому відповідає дія групи Лі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на A_n, для якої $A \cdot B = ABA^T$. Це операція заміни матриці (Грама) білінійної симетричної форми на n-вимірному дійсному векторному просторі при переході до нового базиса. В силу властивостей таких форм, орбіти даної дії складаються з матриць однакової сигнатури (p, q, r) для $p, q, r \in \mathbb{Z}_+$, $p+q+r = n$, де p, q і r – кількість додатних, від'ємних та нульових власних значень матриці відповідно з урахуванням кратностей (нагадаємо, що усі власні значення дійсної симетричної матриці дійсні).

Кожна з цих орбіт має вигляд $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot I_{p,q,r}$, де $I_{p,q,r} \in A_n$ позначає діагональну матрицю, на діагоналі якої послідовно розташовані p чисел 1, q чисел -1 і r нулів. Таким чином, підмножини матриць фіксованої сигнатури в A_n є однорідними просторами $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (взагалі кажучи, не як групи Лі). На $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ розглядаємо, як завжди, стандартні евклідові топологію та гладку структуру, і так само на $\frac{n(n+1)}{2}$-вимірному векторному підпросторі A_n.

Вправа 22.8. Для будь-яких натурального n і $p, q \in \mathbb{Z}_+$ таких, що $p + q = n$, підмножина матриць сигнатури $(p, q, 0)$ є відкритою в A_n, а отже $\frac{n(n+1)}{2}$-вимірним гладким многовидом, а обмеження дії $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ на цю підмножину – гладкою дією.

Тоді підмножини з цієї вправи, тобто орбіти $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot I_{p,q,0}$, будуть однорідними просторами групи Лі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Стабілізатором точки $I_{p,q,0}$ буде $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_{I_{p,q,0}} = \mathrm{O}(p, q)$ згідно з означенням цієї групи, тому в силу транзитивності стабілізатори інших точок цієї підмножини ізоморфні $\mathrm{O}(p, q)$, як у попередніх прикладах. Зокрема, ця дія не є вільною. Відповідь на питання про її ефективність дає наступна вправа.

Вправа 22.9. Для будь-яких натурального n і $p, q \in \mathbb{Z}_+$ таких, що $p+q = n$, $GL(n, \mathbb{R})_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cdot I_{p,q,0}} = \{I_n, -I_n\}$.

Тобто дія не є ефективною, але стабілізатор кожного однорідного простору $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cdot I_{p,q,0}$ є дискретною підгрупою Лі у $GL(n, \mathbb{R})$. Інколи такі дії називають *майже ефективними*.

Вправа 22.10. З'ясувати, чи є майже ефективними неефективні дії з прикладів 22.9, 22.10 та вправ 22.4, 22.6 і 22.7.

Приклад 22.12. Розглянемо тепер дію підгрупи $H \subset G$ на групу G як у прикладі 22.1, але правими зсувами: $b \cdot a \coloneqq ab$ для $b \in H$, $a \in G$. Це права дія знову ж в силу асоціативності та властивості одиниці, гладка для групи Лі G та її підгрупи Лі H аналогічно до прикладу 22.4. Орбіти цієї дії мають вигляд $aH = \{ab \mid b \in H\}$ для $a \in G$, тобто є лівими суміжними класами за підгрупою H. Тут і далі будемо позначати множину попарно різних лівих суміжних класів G за H через G/H і називати *фактормножиною* G за H.

Визначимо тепер ліву дію групи G на фактормножині G/H умовою $a \cdot bH \coloneqq abH$ для $a, b \in G$. Перевіримо коректність цього означення. Дійсно, умова $bH = cH$ для $b, c \in G$ еквівалентна існуванню $d \in H$ такого, що $bd = c$ (чому?), тому $abd = ac$ і отже $abH = acH$ для будь-якого $a \in G$, що й демонструє коректність. Це дійсно ліва дія, бо $e \cdot aH = eaH = aH$

і $a \cdot (b \cdot cH) = a \cdot (bcH) = abcH = ab \cdot cH$ для будь-яких $a, b, c \in G$ в силу асоціативності множення. Вона транзитивна, оскільки для будь-яких $aH, bH \in G/H$ (де $a, b \in G$) $bH = ba^{-1}aH = ba^{-1} \cdot aH$. Стабілізатором одиничного суміжного класу є $G_{eH} = \{a \in G \mid eH = a \cdot eH = aeH = aH\} = H$, бо умова $eH = aH$ еквівалентна існуванню $b \in H$ такого, що $b = eb = a$, тобто належності a до H. Для довільного класу aH тоді в силу леми 22.1 маємо стабілізатор $G_{aH} = G_{a \cdot eH} = C_a(G_{eH}) = C_a(H)$, що ізоморфний H. Зокрема, це H, якщо підгрупа H нормальна. Відображення $\pi\colon G \to G/H\colon a \mapsto aH$ будемо називати *канонічною проекцією* на фактормножину. Як відомо з алгебри, якщо підгрупа H нормальна, то умова $aH\,bH \coloneqq abH$ (де $a, b \in G$) коректно визначає групову операцію на фактормножині G/H, перетворюючи її на *факторгрупу* G за H, але у загальному випадку на G/H немає групової структури.

23 Гладка структура однорідного простору

Продовжимо міркування прикладу 22.12. Що буде, якщо в його умовах G є групою Лі? З пункту 1. твердження 22.4 нам відомо, що якщо б на фактормножині G/H існувала гладка структура така, що описана у цьому прикладі транзитивна дія була б гладкою, тобто якщо G/H була б однорідним простором групи Лі G, то підгрупа $H = G_{eH}$ була б замкненою. Виявляється, що цієї умови достатньо. Щоб довести відповідну теорему, нам знадобиться лема 13.1, що використовувалася для доведення теореми Картана, а також наступна лема.

Лема 23.1. *Нехай алгебра Лі $\mathfrak{g} = T_eG$ групи Лі G є прямою сумою двох своїх підпросторів: $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, другий з яких є алгеброю Лі $\mathfrak{h} = T_eH$ вкладеної підгрупи Лі $H \subset G$. Тоді існують відкриті (у відповідних евклідових топологіях) околи $U_1 \ni 0$ у $\mathfrak{p}$ і $U_2 \ni 0$ у $\mathfrak{h}$ такі, що*

$$(\exp(U_1)^{-1}\exp(U_1)) \cap H \subset \exp(U_2),$$

тобто для будь-яких $x, y \in U_1$ таких, що $(\exp x)^{-1}\exp y \in H$, існує $z \in U_2$ такий, що $(\exp x)^{-1}\exp y = \exp z$.

Доведення. Згідно з наслідком 13.1, обмеження експоненційного відображення exp групи Лі G на $\mathfrak{h}$ є експоненційним відображенням підгрупи Лі H, тому, зокрема, є локальним дифеоморфізмом в околі нуля (як завжди, в силу пункту 4. твердження 7.1), тобто існує відкритий окіл $U_2 \ni 0$ у $\mathfrak{h}$ такий, що $\exp\colon U_2 \to \exp(U_2)$ – дифеоморфізм, причому $\exp(U_2) \ni e$ відкрита в H. Підгрупа Лі H вкладена, отже її топологія індукована з G. Тому існує відкритий окіл $V \ni e$ у G такий, що $\exp(U_2) = V \cap H$. Оскільки $\exp|_{\mathfrak{p}}$, відображення добутку та взяття оберненого групи Лі G гладкі, зокрема неперервні, відображення $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \to G\colon (x, y) \mapsto (\exp x)^{-1} \exp y$, що переводить $(0, 0)$ у e, неперервне. Тоді існує відкритий у $\mathfrak{p}$ окіл $U_1 \ni 0$ такий, що $\exp(U_1)^{-1} \exp(U_1) \subset V$, отже $(\exp(U_1)^{-1} \exp(U_1)) \cap H \subset V \cap H = \exp(U_2)$, що й потрібно.

■

Теорема 23.1. *Нехай G – група Лі, а H – її замкнена підгрупа. Тоді на фактормножині G/H з фактортопологією існує структура* $(\dim G - \dim H)$ *– вимірного гладкого многовида така, що транзитивна дія*

$$\lambda\colon G \times G/H \to G/H\colon (a, bH) \mapsto abH$$

гладка, а канонічна проєкція

$$\pi\colon G \to G/H\colon a \mapsto aH$$

є субмерсією.

Доведення. За замкненістю і теоремою Картана, H є вкладеною підгрупою Лі в G (зокрема, тому визначена її вимірність $\dim H$). Позначимо через $\mathfrak{h} = T_e H \subset \mathfrak{g}$ її алгебру Лі. Виберемо до неї якесь пряме доповнення $\mathfrak{p}$ у $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$. Тоді існують (отримаємо їх за необхідності перетинаючи та переходячи до менших околів) відкриті у відповідних евклідових топологіях околи $U_1 \ni 0$ у $\mathfrak{p}$ і $U_2 \ni 0$ у $\mathfrak{h}$, що гомеоморфні $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{p}}$ і $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{h}}$ відповідно, а також відкритий окіл $U \ni e$ у G такі, що для них виконуються умови леми 23.1, леми 13.1, тобто обмеження на $U_1 \times U_2$ відображення

$$\Phi\colon \mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} \to G\colon x + y \mapsto \exp x \, \exp y,$$

де $x \in \mathfrak{p}$, $y \in \mathfrak{h}$, є дифеоморфізмом $U_1 \times U_2$ на U, і що крім того $\exp\colon U_2 \to \exp(U_2)$ – дифеоморфізм на відкритий окіл e в H (як у доведенні леми 23.1).

За умовою, на G/H розглядається фактортопологія, тобто підмножина $V \subset G/H$ відкрита тоді й тільки тоді, коли $\pi^{-1}(V) = \{a \in G \mid aH \in V\}$ відкрита в G. Покажемо, що множина $aUH \coloneqq \pi \circ L_a(U) = \{abH \mid b \in U\}$ є відкритим околом довільної точки $aH = aeH \in G/H$ (де $a \in G$) у цій топології. Дійсно, $\pi^{-1}(aUH) = \{c \in G \mid cH \in aUH\}$. Належність суміжного класу cH до множини aUH еквівалентна існуванню таких $b \in U$ і $d \in H$, що $c = abd$, отже

$$\pi^{-1}(aUH) = \{abd \mid b \in U, d \in H\} = \bigcup_{d \in H} L_a \circ R_d(U).$$

Ця множина відкрита в G, оскільки U відкрита, а усі зсуви L_a і R_d є дифеоморфізмами, зокрема гомеморфізмами, за твердженням 3.1, що й потрібно для відкритості aUH. Таким чином, $\{aUH\}_{a\in G}$ утворює відкрите покриття G/H. Для кожного $a \in G$ розглянемо відображення

$$\Phi_a \colon U_1 \to aUH \colon x \mapsto a \exp x\, H,$$

тобто $\Phi_a = \pi \circ L_a \circ \exp$. Зауважимо, що $\exp x = \exp x\, \exp 0 = \Phi(x+0) \in U$ для кожного $x \in U_1$ в силу перелічених вище умов на околи, тому Φ_a справді є відображенням у aUH. Більш того, це сюр'єкція на цю множину. Дійсно, для будь-якої точки $bH \in aUH$ існують такі $c \in U$, $d \in H$, що $b = acd$. З дифеоморфності Φ тоді випливає існування таких $x \in U_1$, $y \in U_2$, що $c = \Phi(x+y) = \exp x\, \exp y$. Тоді

$$bH = acdH = a \exp x\, \exp y\, dH = a \exp x\, H = \Phi_a(x),$$

бо $d \in H$ і $\exp y \in \exp(U_2) \subset H$. Це й демонструє сюр'єктивність Φ_a. Перевіримо тепер його ін'єктивність. Нехай $\Phi_a(x) = \Phi_a(\widetilde{x})$, тобто $a \exp x\, H = a \exp \widetilde{x}\, H$. Скорочуючи на a, тобто діючи на обидві частини елементом $a^{-1} \in G$, отримуємо $\exp x\, H = \exp \widetilde{x}\, H$. Тоді існує $b \in H$ такий, що $\exp x\, b = \exp \widetilde{x}$, отже

$$b = (\exp x)^{-1} \exp \widetilde{x} \in (\exp(U_1)^{-1} \exp(U_1)) \cap H \subset \exp(U_2)$$

за лемою 23.1 і нашим вибором околів, тобто існує $y \in U_2$ такий, що $b = \exp y$. Тоді

$$\Phi(x+y) = \exp x \exp y = \exp \widetilde{x} = \exp \widetilde{x}\, \exp 0 = \Phi(\widetilde{x} + 0).$$

Тому, оскільки Φ – дифеоморфізм на множині $U_1 \times U_2$, $x = \widetilde{x}$ (та $y = 0$), отже Φ_a дійсно є ін'єкцією. Крім того, відображення $\Phi_a = \pi \circ L_a \circ \exp \colon U_1 \to aUH$ неперервне як композиція неперервних (нагадаємо, що неперервність π випливає з побудови фактортопології). Щоб перевірити, що Φ_a – гомеоморфізм, залишилося продемонструвати його відкритість. Для будь-якої відкритої $V \subset U_1$ її образом є

$$\Phi_a(V) = a \exp(V) H = a \exp(V)\, \exp(U_2) H = a\Phi(V \times U_2) H,$$

де використали включення $\exp(U_2) \subset H$. Тоді, аналогічно до опису прообразу aUH вище, множина $\pi^{-1}(\Phi_a(V)) = \bigcup\limits_{d\in H} L_a \circ R_d \circ \Phi(V \times U_2)$ відкрита, оскільки $V \times U_2 \subset U_1 \times U_2$ відкрита за побудовою топології прямого добутку, а L_a, R_d та Φ є дифеоморфізмами. Таким чином, $\Phi_a \colon U_1 \to aUH$ – дійсно гомеоморфізм.

Вправа 23.1. Показати, що топологічний простір G/H хаусдорфовий і має не більш ніж зліченну базу.

Оскільки за умовами на околи U_1 гомеоморфний $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{p}}$, з отриманих властивостей aUH і Φ_a, а також попередньої вправи випливає, що G/H – многовид з атласом $\{(aUH, \Phi_a^{-1})\}_{a \in G}$ вимірності $\dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim G - \dim H$. Знайдемо відображення переходу цього атласа. Розглянемо будь-які $a, b \in G$ такі, що $aUH \cap bUH \neq \varnothing$ (до речі, що означає ця умова?). Тоді відображенням переходу для відповідної пари карт буде

$$\Phi_b^{-1} \circ \Phi_a \colon \Phi_a^{-1}(aUH \cap bUH) \to \Phi_b^{-1}(aUH \cap bUH).$$

Нехай $x \in \Phi_a^{-1}(aUH \cap bUH)$ і $y = \Phi_b^{-1} \circ \Phi_a(x) \in \Phi_b^{-1}(aUH \cap bUH)$, тобто

$$a \exp x\, H = \Phi_a(x) = \Phi_b(y) = b \exp y\, H.$$

Домноживши на b^{-1} обидві частини, отримаємо $b^{-1}a \exp x\, H = \exp y\, H$. Тобто існує $c \in H$ такий, що $b^{-1}a \exp x\, c = \exp y = \Phi(y + 0) \in U$, оскільки $y \in U_1$. В силу неперервності композиції неперервних відображень $L_{b^{-1}a} \circ R_c \circ \exp$, існує відкрита $V \ni x$ така, що $V \subset \Phi_a^{-1}(aUH \cap bUH) \subset U_1$ і $L_{b^{-1}a} \circ R_c \circ \exp(V) \subset U$. Покладемо

$$\Phi_{a,b} \coloneqq \pi_1 \circ \Phi^{-1} \circ L_{b^{-1}a} \circ R_c \circ \exp \colon V \to U_1,$$

де $\pi_1 \colon U_1 \times U_2 \to U_1 \colon w + t \mapsto w$ – канонічна проєкція на перший множник прямого добутку. Це відображення визначене в силу вибору V (бо Φ^{-1} визначене на U) і гладке як композиція гладких. Нехай $z \in V$ і $w = \Phi_{a,b}(z)$. Тоді $L_{b^{-1}a} \circ R_c \circ \exp(z) = \Phi(w + t)$ для деякого $t \in U_2$, тобто $b^{-1}a \exp z\, c = \exp w\, \exp t$. Переходячи до суміжних класів (тобто діючи на обидві частини канонічною проєкцією π), отримуємо $b^{-1}a \exp z\, cH = \exp w\, \exp t\, H$. Оскільки $c \in H$ і $\exp t \in H$, бо $t \in U_2$ і за вибором U_2, це означає, що $a \exp z\, H = b \exp w\, H$, тобто $\Phi_a(z) = \Phi_b(w)$, і $w = \Phi_b^{-1} \circ \Phi_a(z)$. Таким чином, $(\Phi_b^{-1} \circ \Phi_a)|_V = \Phi_{a,b}$, а отже це обмеження є гладким. Повторивши цю побудову в околі кожного $x \in \Phi_a^{-1}(aUH \cap bUH)$, отримуємо, що відображення переходу $\Phi_b^{-1} \circ \Phi_a$ гладке. Отже, G/H – гладкий многовид.

Вправа 23.2. Показати, що дія $\lambda \colon G \times G/H \to G/H \colon (a, bH) \mapsto abH$ є неперервним відображенням.

Перевіримо тепер гладкість λ. В силу попередньої вправи, для цього потрібно показати гладкість його локального задання в околах кожної пари (a, bH) для $a, b \in G$ та її образу abH. Оскільки L_a – дифеоморфізм, зокрема гомеоморфізм, за твердженням 3.1, множина $aU \coloneqq$

$L_a(U) = \{ab \mid b \in U\}$ є відкритим околом будь-якої точки $a \in G$, тобто $\{aU\}_{a\in G}$ утворює відкрите покриття G. Оскільки за вибором околів Φ^{-1} є дифеоморфізмом U на $U_1 \times U_2$, а цей прямий добуток гомеоморфний $\mathbb{R}^{\dim\mathfrak{p}} \times \mathbb{R}^{\dim\mathfrak{h}} = \mathbb{R}^{\dim\mathfrak{p}+\dim\mathfrak{h}} = \mathbb{R}^{\dim\mathfrak{g}} = \mathbb{R}^{\dim G}$, у якості карти G в околі точки a можна вибрати пару $(aU, \Phi^{-1} \circ L_{a^{-1}})$. Для bH і $\lambda(a, bH) = abH$, як показано вище, картами будуть (bUH, Φ_b^{-1}) і $(abUH, \Phi_{ab}^{-1})$ відповідно (зауважимо, що Φ_{ab} – це не те ж саме, що $\Phi_{a,b}$ з попередньої частини доведення, яке нам більше не буде зустрічатися). Отже, локальне задання відображення λ має вигляд

$$\Phi_{ab}^{-1} \circ \lambda \circ ((L_a \circ \Phi) \times \Phi_b)\colon ((U_1 \times U_2) \times U_1) \cap \lambda^{-1}(abUH) \to U_1$$

(область значень можна виписати й точніше, але це нам не потрібно). Нехай точка (x, y, z) належить до $((U_1 \times U_2) \times U_1) \cap \lambda^{-1}(abUH)$, а w – її образ під дією цього відображення, де $x, z, w \in U_1$, $y \in U_2$. Тоді

$$a \exp x\, \exp y\, b \exp z\, H = \lambda(a \exp x\, \exp y, b \exp z\, H) =$$

$$= \lambda(L_a \circ \Phi(x + y), \Phi_b(z)) = \Phi_{ab}(w) = ab \exp w\, H,$$

Домноживши на $b^{-1}a^{-1}$, отримуємо з цієї рівності суміжних класів існування $c \in H$ такого, що $b^{-1} \exp x\, \exp y\, b \exp z\, c = \exp w = \Phi(w + 0) \in U$ (бо $w \in U_1$). Аналогічно попередній частині доведення, з неперервності експоненційного відображення та відображення добутку G тоді випливає, що існують відкриті околи V_1, V_2 і W_1 точок x, y і z відповідно такі, що $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$, $W_1 \subset U_1$, $V_1 \times V_2 \times W_1$ міститься в області визначення даного локального задання і $b^{-1} \exp(V_1) \exp(V_2) b \exp(W_1) c \subset U$. Тоді аналогічним чином визначене відображення

$$\lambda_{a,b}\colon V_1 \times V_2 \times W_1 \to U_1\colon (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \mapsto \pi_1 \circ \Phi^{-1}(b^{-1} \exp \widetilde{x}\, \exp \widetilde{y}\, b \exp \widetilde{z}\, c),$$

де $\pi_1\colon U_1 \times U_2 \to U_1$ – знову канонічна проєкція. Отже, якщо $\lambda_{a,b}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \widetilde{w}$ для $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \in V_1 \times V_2 \times W_1$ і $\widetilde{w} \in U_1$, то

$$b^{-1} \exp \widetilde{x}\, \exp \widetilde{y}\, b \exp \widetilde{z}\, c = \Phi(\widetilde{w} + \widetilde{t}) = \exp \widetilde{w}\, \exp \widetilde{t}$$

для деякого $\widetilde{t} \in U_2$. Так само, переходячи до суміжних класів і враховуючи, що $c \in H$ і $\exp \widetilde{t} \in H$, отримуємо

$$b^{-1}\Phi(\widetilde{x} + \widetilde{y}) b \exp \widetilde{z}\, H = b^{-1} \exp \widetilde{x}\, \exp \widetilde{y}\, b \exp \widetilde{z}\, H = \exp \widetilde{w}\, H.$$

Нарешті, подіємо на обидві частини елементом ab:

$$\lambda(L_a \circ \Phi(\widetilde{x} + \widetilde{y}), \Phi_b(\widetilde{z})) = a\Phi(\widetilde{x} + \widetilde{y}) b \exp \widetilde{z}\, H = ab \exp \widetilde{w}\, H = \Phi_{ab}(\widetilde{w}).$$

Таким чином, на $V_1 \times V_2 \times W_1$ локальне задання λ збігається з $\lambda_{a,b}$, що є гладким в силу гладкості експоненційного відображення, відображення добутку G, канонічної проєкції π_1 та дифеоморфності Φ. Тоді будь-яке локальне задання λ гладке, оскільки це вірно в околі кожної точки області його визначення, що й потрібно для демонстрації гладкості λ.

Як вже зауважувалося, канонічна проєкція $\pi\colon G \to G/H\colon a \mapsto aH$ є неперервною за побудовою фактортопології. Запишемо її локальне задання в околах довільної точки $a \in G$ та її образу aH. Як у попередній частині доведення, відповідними картами будуть $(aU, \Phi^{-1} \circ L_{a^{-1}})$ та (aUH, Φ_a^{-1}). Тоді це локальне задання має вигляд

$$\Phi_a^{-1} \circ \pi \circ L_a \circ \Phi\colon U_1 \times U_2 \to U_1,$$

тобто переводить довільний $x + y \in U_1 \times U_2$ в

$$\Phi_a^{-1} \circ \pi \circ L_a \circ \Phi(x + y) = \Phi_a^{-1}(a \exp x \, \exp y \, H) =$$

$$= \Phi_a^{-1}(a \exp x \, H) = \Phi_a^{-1}(\Phi_a(x)) = x,$$

де друга рівність випливає з того, що $y \in U_2$, отже $\exp y \in H$. Нагадаємо також, що тут $a \exp x \, H \in aUH$, бо $x \in U_1$, і $\Phi_a\colon U_1 \to aUH$ – біекція. Таким чином, локально відображення π задається канонічною проєкцією $\pi_1\colon x+y \mapsto x$, зокрема, є гладким. Оскільки матриця Якобі цього локального задання має вигляд $\left(\begin{array}{c|c} I_{\dim \mathfrak{p}} & 0 \end{array} \right)$, її ранг дорівнює $\dim \mathfrak{p} = \dim G/H$, тому π є субмерсією в кожній точці $a \in G$.

■

Для деяких подальших застосувань нам потрібно буде дослідити властивості диференціала $d_a\pi$ детальніше, ніж це було необхідно для попереднього доведення. Продовжимо використовувати позначення і конструкції з нього. Розглянемо лівоінваріантні розподіли на G (див. вправу 17.2), що породжені $\mathfrak{p}$ і $\mathfrak{h}$: для кожного $a \in G$

$$\mathfrak{p}(a) \coloneqq d_e L_a(\mathfrak{p}), \qquad \mathfrak{h}(a) \coloneqq d_e L_a(\mathfrak{h})$$

(аналогічно до побудови на початку доведення теореми 13.2; зокрема, $\mathfrak{h}(a) = T_a H$ для кожного $a \in H$ так само, як у тій теоремі). Тоді $T_a G = d_e L_a(\mathfrak{g}) = \mathfrak{p}(a) \oplus \mathfrak{h}(a)$ для будь-якої $a \in G$. Оскільки $\Phi_a = \pi \circ L_a \circ \exp$ для кожного a за побудовою, маємо

$$d_0 \Phi_a = d_a \pi \circ d_e L_a \circ d_0 \exp = d_a \pi \circ d_e L_a\colon \mathfrak{p} = T_0 U_1 \to T_{aH} G/H.$$

за ланцюговим правилом і твердженням 7.1. Тут використовуємо стандартне ототожнення дотичного простору до відкритої підмножини векторного простору (зі стандартною евклідовою гладкою структурою) із самим цим векторним простором. Оскільки Φ_a – дифеоморфізм, бо це координатне відображення карти гладкого многовида, а L_a – дифеоморфізм за твердженням 3.1, $d_0\Phi_a$ і d_eL_a є лінійними ізоморфізмами, а отже й $d_a\pi$ (точніше, його обмеження на $\mathfrak{p}(a)$) встановлює лінійний ізоморфізм між підпросторами $d_eL_a(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}(a)$ і $T_{aH}G/H$. При цьому для будь-якого вектора $d_eL_a(x) \in \mathfrak{h}(a)$ (тобто для будь-якого $x \in \mathfrak{h}$) з ланцюгового правила, опису диференціала у термінах дотичних векторів та твердження 7.1 випливає, що

$$d_a\pi(d_eL_a(x)) = d_e(\pi \circ L_a)(x) = (\pi \circ L_a(\exp tx))'_t(0) =$$

$$= (a \exp tx\, H)'_t(0) = (aH)'_t(0) = 0,$$

бо $\exp tx \in H$ для усіх t в силу умови $x \in \mathfrak{h}$ і пункту <u>1.</u> твердження 13.1. Таким чином, $\mathfrak{h}(a) \subset \operatorname{Ker} d_a\pi$ для кожного $a \in G$. Оскільки

$$\dim \mathfrak{h}(a) = \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{p} = \dim T_aG - \dim T_{aH}G/H =$$

$$= \dim T_aG - \dim d_a\pi(T_aG) = \dim \operatorname{Ker} d_a\pi$$

за властивостями ядра та образу лінійного відображення, ці підпростори рівні: $\mathfrak{h}(a) = \operatorname{Ker} d_a\pi$ для кожного a. За властивостями субмерсії π (див. далі лему 25.1), це означає також, що $\mathfrak{h}(a) = T_a\pi^{-1}(\pi(a)) = T_a aH$ для усіх a, де суміжний клас aH є вкладеним підмноговидом у G в силу теореми про прообраз регулярного значення.

Наслідок 23.1. *В умовах попередньої теореми та у введених вище позначеннях* $\operatorname{Ker} d_a\pi = \mathfrak{h}(a)$ *і* $(d_a\pi)|_{\mathfrak{p}(a)} \colon \mathfrak{p}(a) \to T_{aH}G/H$ *є лінійним ізоморфізмом для будь-якої точки* $a \in G$.

Вправа 23.3. Показати, що якщо в умовах теореми 23.1 замкнена підгрупа H нормальна, то структура факторгрупи на G/H узгоджена з гладкою структурою, що побудована у теоремі, тобто G/H – група Лі, причому її алгебра Лі ізоморфна фактоалгебрі Лі $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Означення 23.1. Факторгрупа G/H групи Лі G за нормальною замкненою підгрупою H з гладкою структурою, що описана у теоремі 23.1, зветься *факторгрупою Лі* G за H.

У попередніх вправі та означенні $\mathfrak{h}$ є ідеалом за пунктом <u>3.</u> твердження 13.1, бо H нормальна. У подальшому будемо вважати за замовчуванням, що на фактормножині G/H групи Лі за її замкненою підгрупою введена гладка структура з теореми 23.1 (далі у наслідку 23.3 ми покажемо, що вона не залежить від деталей побудови), і будемо називати G/H *факторпростором* G за H. В силу гладкості та транзитивності дії λ, це однорідний простір групи Лі G.

Література

[1] В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО. 2012.

[2] В.И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: URSS. 2017.

[3] J.C. Baez. The Octonions. Bull. Amer. Math. Soc., 39 (2002), p. 145-205. Errata: Bull. Amer. Math. Soc., 42 (2005), p. 213.

[4] M. Berger. Geometry I. Springer, 2009. Переклад: М. Берже. Геометрия. Том 1. М.: Мир, 1984.

[5] A. Besse. Einstein Manifolds. Springer, 1987. Переклад: А. Бессе. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

[6] О.А. Борисенко. Диференціальна геометрія і топологія. Х.: Основа, 1995.

[7] G.E. Bredon. Topology and Geometry. Springer, 1993.

[8] R. Bryant. An introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry. In: Geometry and Quantum Field Theory. AMS, 1995.

[9] Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. Введение в риманову геометрию. СПб.: Наука, 1994.

[10] N. Bourbaki. Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 1-3. Springer, 1989. Переклад: Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли, часть 1. М.: Мир, 1976.

[11] Э. Картан. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Издательство иностранной литературы, 1949.

[12] J. Cheeger, D.G. Ebin. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. AMS, 2008.

[13] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk. Lie Groups. Springer, 1999.

[14] M. Eichler. A New Proof of the Baker-Campbell-Hausdorff Formula. J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), p. 23-25.

[15] W. Fulton, J. Harris. Representation Theory: A First Course. Springer, 1991.

[16] S. Helgason. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. AMS, 2001. Переклади: С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М.: Мир, 1964; С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М.: Факториал, 2005.

[17] M.W. Hirsch. Differential Topology. Springer, 1976. Переклад: М. Хирш. Дифференциальная топология. М. Мир, 1979.

[18] H. Hofstätter. A Relatively Short Self-Contained Proof of the Baker–Campbell–Hausdorff Theorem. Expo. Math., 39 (2021), p. 143-148.

[19] J.E. Humphreys. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer, 1973. Переклад: Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

[20] J.E. Humphreys. Linear Algebraic Groups. Springer, 1975. Переклад: Дж. Хамфри. Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.

[21] N. Jacobson. Lie Algebras. Dover Publications, 1979. Переклад: Н. Джекобсон. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

[22] J. Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer, 2011.

[23] В.М. Кадець. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів: Чижиков І.Е., 2012. Переклад: V. Kadets. A Course in Functional Analysis and Measure Theory. Springer, 2018.

[24] И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.

[25] A.W. Knapp. Lie Groups Beyond an Introduction. Birkhauser, 1996.

[26] S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. Vol. 1. Wiley, 1996. Переклад: Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. Том 1. М.: Наука, 1981.

[27] S. Kobayashi, K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. Vol. 2. Wiley, 1996. Переклад: Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. Том 2. М.: Наука, 1981.

[28] I. Kolář, P. Michor, J. Slovák. Natural Operations in Differential Geometry. Springer, 1993.

[29] C. Kosniowski. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980. Переклад: Ч. Коснёвски. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

[30] А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

[31] L.H. Loomis. An Introduction to Abstract Harmonic Analysis. D. van Nostrand and Co., 1953. Переклад: Л. Люмис. Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: Издательство иностранной литературы, 1956.

[32] J. Milnor. Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups. Adv. in Math., 21 (1976), p. 293-329.

[33] S.B. Myers, N.E. Steenrod. The Group of Isometries of a Riemannian Manifold. Ann. of Math., 40 (1939), p. 400-416.

[34] P.J. Olver. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, 2000. Переклад: П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

[35] Л.С. Понтрягин. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

[36] М.М. Постников. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.

[37] М.М. Постников. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.

[38] М.М. Постников. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.

[39] М.М. Постников. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.

[40] J.-P. Serre. Lie Algebras and Lie Groups. Springer, 1992. Переклад: Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.

[41] Б.Н. Шапуков. Задачи по группам Ли и их приложениям. М.: РХД, 2002.

[42] J. Stillwell. Naive Lie Theory. Springer, 2008.

[43] T. Tao. Hilbert's Fifth Problem and Related Topics. AMS, 2014.

[44] В.В. Трофимов. Задачи по теории групп Ли и алгебр Ли. М.: МГУ, 1990.

[45] Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.

[46] N. Wallach. Compact Homogeneous Riemannian Manifolds with Strictly Positive Curvature. Ann. of Math., 96 (1972), p. 277-295.

[47] F.W. Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer, 1983. Переклад: Ф. Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.