<u>33.Kx.</u> Нехай $h \in C(I, G)$ – шлях у топ. групі G, $h(0) = a$, $h(1) = b$, $\alpha : \pi_1(G, a) \to \pi_1(G, b)$ – відп. ізоморфізм. Показати, що $\alpha = (L_{ba^{-1}})_* = (R_{a^{-1}b})_*$. $(R_c d := dc)$.

Тобто треба показати, що $\forall\ [f] \in \pi_1(G, a)$ (f-петля в a: $f(0) = f(1) = a$)

$$[\bar{h} * f * h] = \alpha([f]) = (L_{ba^{-1}})_*([f]) = [L_{ba^{-1}} f] = [ba^{-1} f],$$

тобто гомотопність [redacted] петель у b. Побудуємо гомотопію:

$$F(t, s) = \begin{cases} h(1-4t), & t \in \left[0, \frac{1-s}{4}\right] \\ h(s)a^{-1} f\left(\frac{4t+s-1}{3s+1}\right), & t \in \left[\frac{1-s}{4}, \frac{1+s}{2}\right] \\ h(2t-1), & t \in \left[\frac{1+s}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(згадаємо, що $(\bar{h} * f) * h(t) = \begin{cases} h(1-4t), & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ f(4t-1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$)

При $t = \frac{1-s}{4}, \frac{1+s}{2}$ маємо $\underbrace{h(s)a^{-1}f(0) = h(s)a^{-1}f(1) = h(s)}$,

$F \in C(I \times I, G)$ (у т.ч. бо відобр. добутку μ непер.), $F(t, 0) = (\bar{h} * f) * h$ (бо $h(0) = a$), $F(t, 1) = ba^{-1} f(t)$ (бо $h(1) = b$), $F(0, s) = F(1, s) = h(1) = b$. Для R ан-но.

<u>33.Lx.</u> $\forall\ a \in G$ $\pi_1(G, a)$ абелева.

Випл. з <u>33.Kx</u> і <u>33.J</u>, бо α не залежить від h.

37.1. $\varphi : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : z \mapsto z^n$, $n > 1$. Показати, що $\varphi \not\sim id$.

Розглянемо індукований гом-зм $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1) \to \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1)$ (бо $\varphi(1) = 1$) : $[f] \mapsto [\varphi \circ f]$. За доведеним у лекціях, якщо $\varphi \sim id \Rightarrow \varphi_* = id_* = id_{\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1)}$. Нехай $f : t \mapsto e^{2\pi i t}$.

$f \in C(I, \mathbb{C}\setminus\{0\})$, $f(0) = f(1) = 1 \Rightarrow [f] \in \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1)$.

$\varphi \circ f(t) = e^{2\pi i n t}$. Покажемо, що $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f] \neq [f] \Rightarrow \varphi_* \neq id$ ↯.

$\mathbb{C}\setminus\{0\} \sim S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Побудуємо універсальне накриття $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ аналогічно до S^1:

$p : \underset{\{(x,y) \mid y > 0\}}{\overset{}{\underset{\parallel}{\mathbb{R}^2_+}}} \to \mathbb{C}\setminus\{0\} : (x, \underset{\overset{\vee}{0}}{y}) \mapsto (y e^{2\pi i x})$. Відповідає накриттю над простором орбіт за дією $\mathbb{Z} : n \cdot (x,y) = (x+n, y)$.

$\forall\ y e^{2\pi i x} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ окіл $U := \{ y' e^{2\pi i x'} \mid x' \in (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}),\ y' > 0 \}$ правильно накритий: $p^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n$, де $U_n := (x+n-\frac{1}{2}, x+n+\frac{1}{2}) \times (0, +\infty)$.

Піднятття f з початком у $(0,1)$ є $\tilde{f}(t) = (t,1)$: $p\circ\tilde{f}(t) = e^{2\pi i t} = f(t)$

—||— $\varphi\circ f$ —||— є $\widetilde{\varphi\circ f}(t) = (nt, 1)$: $p\circ(\widetilde{\varphi\circ f})(t) = e^{2\pi i n t} = \varphi\circ f(t)$

$\tilde{f}(1) = (1,1) \neq (n,1) = \widetilde{\varphi\circ f}(1) \Rightarrow f \not\sim \varphi\circ f$ за Lem. про накриваючу гомотопію.

Або: розглянемо $\psi : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to S^1 : z \mapsto \frac{z}{|z|}$, неперервне.

Тоді $\psi\circ f$ і $\psi\circ\varphi\circ f$ будуть петлями у S^1 і можна показати їх негомотопність, використавши опис $\pi_1(S^1, 1)$ з лекцій.

Більш точно, $\varphi \sim id \Rightarrow \alpha \circ \varphi_* = id_*$, де $\alpha : \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \underset{1}{\underset{\parallel}{\varphi(1)}}) \to$
$\to \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \underset{1}{\underset{\parallel}{id(1)}})$ - із-м, що відп. шляху $h : s \mapsto F(1, s)$, де
F - гомотопія між φ та id. Але за 33.I $\alpha([f]) = [h]^{-1} \cdot$
$[f] \cdot [h]$ $\forall$ $[f] \in \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1)$, де $[h] \in \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1)$, бо h -
петля у 1. При цьому $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1) \simeq \mathbb{Z}$ - абелева, тому $\alpha =$
$= id_{\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1)} \Rightarrow \varphi_* = id_* = id_{\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, 1)}$.

30.1[redacted]1. X – ТП, $f, g \in C(X, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$: $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ $\forall x \in X$ (евкл. норми). Тоді $f \sim g$.

Лінійна гомотопія підходить: $F(x,s) := (1-s)f(x) + s g(x) =$

$= f(x) + s(g(x) - f(x))$ Дійсно, $\forall\ x, s \in I$ ($\in X$) $|s(g(x)-f(x))| =$
$= \underset{\leq 1}{s}\,|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ за умовою, тому $F(x,s) \neq 0$:
$F: X \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, непер., $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g \Rightarrow f \sim g$.

<u>37.G.</u> Основна теорема алгебри: $\forall$ полінома $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ степеня $n > 0$ $\exists\ z \in \mathbb{C}: p(z) = 0$.

Я це не так: $\exists$ поліном $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ (поділимо на коеф. біля z^n, що $\neq 0$). Зокрема, $p \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$.
$q(z) := z^n$ ~~-~~ $\in C(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \mathbb{C}\setminus\{0\})$.
(<u>37.G.2</u> або <u>30.12</u>) $\exists\ R > 0$: на $S^1_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ $|p - q| < |q|$.
Дійсно, $\forall z$ $|p(z) - q(z)| = |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \ldots + |a_0| =$
$= |a_{n-1}|R^{n-1} + \ldots + |a_0|$ для $z \in S^1_R$. Для дост. великого R це $< R^n =$
$= |z|^n = |q(z)|$.

Тоді за <u>30.11</u> $p|_{S^1_R} \sim q|_{S^1_R}$.

Розглянемо шлях $f: I \to \mathbb{C}: t \mapsto Re^{2\pi i t}$: $f(I) = S^1_R$.

Оскільки $P|_{S^1_R} = p\circ i$, де $i: S^1_R \to \mathbb{C}$ – включення, $(P|_{S^1_R})_* = P_* \circ i_*$.
Зокрема, $P_*: \pi_1(\mathbb{C}, R) \to \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, p(R))$ – тривіальний
(як й $i_*: \pi_1(S^1_R, R) \to \overset{\{[e_R]\}=}{\pi_1(\mathbb{C},R)}$), бо $\mathbb{C}$ стягуваний. Тому й $(P|_{S^1_R})_*$ тривіальний, зокрема, $(P|_{S^1_R})_*([f]) = [e_{P(R)}]$, де вважаємо f петлею у S^1_R у т. $f(0)=f(1)=R$: $[f]\in\pi_1(S^1_R,R)$.

З іншого боку, $P|_{S^1_R} \sim q|_{S^1_R} \Rightarrow (P|_{S^1_R})_* \overset{\alpha\circ}{=} (q|_{S^1_R})_*$, де $(q|_{S^1_R})_*: \pi_1(S^1_R, R) \to \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \underset{R^n}{\underset{\shortparallel}{q(R)}})$, а $\alpha: \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, p(R)) \to \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \underset{R^n}{\underset{\shortparallel}{q(R)}})$ – із-м, що відп. шляху $s \mapsto F(R,s)$ для гом. F між $P|_{S^1_R}$ і $q|_{S^1_R}$, тому $(q|_{S^1_R})_*([f]) = \alpha((P|_{S^1_R})_*([f])) = \alpha([e_{P(R)}]) = [e_{R^n}]$. Але $(q|_{S^1_R})_*([f]) = [q|_{S^1_R}\circ f] = [q\circ f]$, де $q\circ f: t\mapsto \overset{q(R)}{\overset{\shortparallel}{R^n}} e^{2\pi i n t}$ – нестягувана петля у $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\forall n>0$ (ан-но <u>37.1.</u>), тому $[q\circ f] \neq [e_{R^n}]$ у $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, R^n)$. ↯ Іншими словами, $(P|_{S^1_R})_*$ тривіальний, бо $P|_{S^1_R}$ продовжується до $P: \mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ на стягуваному $\mathbb{C}$ за припущенням, але для $(q|_{S^1_R})_*$ нетривіальність очевидна.

34.В. (Втр. 7.2 лекцій) Неперервна сюр'єкція

$p: X \to Y$ задає накриття $\Leftrightarrow$ $\forall\, y \in Y$ $p^{-1}(y)$ – дискретний підпростір X і $\exists$ відкр. $U \ni y$ і гомео-зм $\varphi: p^{-1}(U) \to$ $\to U \times p^{-1}(y)$ такий, що $p|_{p^{-1}(U)} = p_U \circ \varphi$ (де $p_U: U \times p^{-1}(y) \to U$ – канон. пр.)

$\Rightarrow$ $\exists$ правильно накритий відкр. окіл $U \ni y$:

$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, де U_α - відкр., $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$ і $\forall \alpha$ $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ - гомео-зм.

$\forall x \in p^{-1}(y)$ $\exists \alpha \in A : x \in U_\alpha$, і $p^{-1}(y) \cap U_\alpha = \{x\}$, бо $p|_{U_\alpha}$ - ін'єкт., тобто x - ізольована точка $p^{-1}(y)$. Тому індукт. топ. $p^{-1}(y)$ дискретна.

$\varphi : p^{-1}(U) \to U \times p^{-1}(y) : z \mapsto (p(z), x(z))$, де $\{x(z)\} = p^{-1}(y) \cap U_{\alpha(z)}$ (перетин $\neq \emptyset$, бо $p|_{U_\alpha}$ - сюр'єкт.), а $\alpha(z)$ - єдиний такий, що $z \in U_{\alpha(z)}$ (єдиний, бо об'єднання диз'юнктне). Тоді дійсно $p_U(\varphi(z)) = p(z)$ $\forall z \in p^{-1}(U)$, тобто $p|_{p^{-1}(U)} = p_U \circ \varphi$.

φ - ін'єкт.: $\forall z, w \in p^{-1}(U)$ $\varphi(z) = \varphi(w) \Rightarrow x(z) = x(w) \Rightarrow \alpha(z) = \alpha(w)$, тобто $z, w \in U_\alpha$ для спільного $\alpha = \alpha(z) = \alpha(w)$. Крім того, $p(z) = p(w) \Rightarrow z = w$, бо $p|_{U_\alpha}$ - ін'єкт.

φ - сюр'єкт.: $\forall (v, x) \in U \times p^{-1}(y)$ оск. $p|_{U_{\alpha(x)}}$ - сюр'єкт., $\exists z \in U_{\alpha(x)} : p(z) = v$; $x(z) = x$ за побудовою, бо $z \in U_{\alpha(x)}$.

Отже, $\varphi(z) = (v, x)$ (іншими словами, $\varphi^{-1}(v,x) = (p|_{U_{\alpha(x)}})^{-1}(v)$)

Т.ч., φ - бієкт.

Покажемо, що φ – лок. гомео-зм в околі $\forall\, z \in p^{-1}(U)$.
(див. вище), а саме в околі (відкритому) $U_{\alpha(z)}$: $\forall\, w \in U_{\alpha(z)}$
$\varphi(w) = (p(w), x(z))$, тобто $\varphi(U_{\alpha(z)}) = U \times \{x(z)\}$ (бо
$p|_{U_{\alpha(z)}}$ – гом), де $U \times \{x(z)\}$ – відкр. у $U \times p^{-1}(y)$, бо $p^{-1}(y)$ –
дискр. $\varphi|_{U_{\alpha(z)}}$ – це добуток гомео-зма $p|_{U_{\alpha(z)}}$ і постійного
у $x(z)$ $\Rightarrow$ гомео-зм $U_{\alpha(z)} \to U \times \{x(z)\}$. Отже, φ – гомео-зм.
Показано, що φ – біє і лок. гомео-зм в околі $\forall$ точки $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ φ – гомеоморфізм. $(\varphi : X \to Y)$

$\Leftarrow$ Дост. взяти $U = X$, $V = Y$.

$\Rightarrow$ Отже, $\forall\, x \in X$ $\exists$ відкр. $U \ni x$, $V \ni \varphi(x)$: $\varphi : U \to V$ –
гомео-зм, φ – біє. Залишилося перевірити, що φ – непер. і
відкр.

$\forall$ відкр. $W \subset Y$ $\forall$ $y \in W$ $x := \varphi^{-1}(y)$. Нехай $\overset{\text{відкр.}}{U} \ni x$, $V \ni y$: $\varphi : U \to V$ – гомео-зм. Тоді $W \cap V$ – відкр. окіл y в Y, а отже у V $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(W) \cap U = \varphi^{-1}(W \cap V)$ – відкр. (в U, а отже в X) окіл x і $\subset \varphi^{-1}(W)$. Тобто у $\varphi^{-1}(W)$ кожна x входить з відкр. околом $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(W)$ відкр. Т.ч., φ непер.

Ан-но, $\forall$ відкр. $W \subset X$ $\forall x \in W$, $y := \varphi(x)$, відкр. U, V як раніше, $W \cap U$ відкр. $\Rightarrow$ $\varphi(W) \cap V = \varphi(W \cap U)$ відкр. (у V, а отже в Y, бо V відкр.) і $y \in \varphi(W) \cap V \subset \varphi(W)$. Отже, $\varphi(W)$ відкр. Т.ч., φ відкр.

$\Leftarrow$. Отже, $\forall y \in Y$ $p^{-1}(y)$ дискр. і $\exists$ гомео-зм $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times p^{-1}(y)$ для деякої відкр. $U \ni y$: $p|_{p^{-1}(U)} = p_U \circ \varphi$ (також відомо, що p – непер. змч). Покажемо, що $\forall$ така U правильно покрита, отже (X, Y, p) – покриття:

$$p^{-1}(U) = \varphi^{-1}(U \times p^{-1}(y)) = \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{x \in p^{-1}(y)} U \times \{x\}\Big) = \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} \varphi^{-1}(U \times \{x\}).$$

$p^{-1}(y)$ дискр. $\Rightarrow$ $\forall x \in p^{-1}(y)$ $U \times \{x\}$ відкр. в $U \times p^{-1}(y)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ [φ – гомео-зм] $\Rightarrow$ $\forall x \in p^{-1}(y)$ $U_x := \varphi^{-1}(U \times \{x\})$ відкр. у $p^{-1}(U)$, а отже в X, бо $p^{-1}(U)$ відкр. в X (p – непер.). При $x \neq z$

$U \times \{x\} \cap U \times \{z\} = \varnothing \Rightarrow U_x \cap U_z = \varnothing$. Нарешті,

$\forall z \in U_x$ за умовою $p(z) = p_U(\varphi(z))$, де $\varphi(z) \in U \times \{x\}$,

тобто $p|_{U_x} = p_U|_{U \times \{x\}} \circ \varphi|_{U_x}$. Оскільки справа комп. гомео-

морфізмів $\varphi|_{U_x} : U_x \to U \times \{x\}$ і $p_U|_{U \times \{x\}} : U \times \{x\} \to U$ (за власт.

прямого добутку), $p|_{U_x} : U_x \to U$ – гомео-зм.

<u>34.10</u> $\forall$ накриття (X, Y, p) p відкрите (<u>Впр. 7.1</u> лекцій).

$\forall$ відкр. $V \subset X$ $\forall x \in V$ нехай U – правильно накр. відкр.

окіл $y := p(x)$: $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$. Нехай $\alpha \in A$: $x \in U_\alpha$ (єдиний

такий). Тоді $U_\alpha \cap V$ – відкр. (в X, отже в U_α) $\Rightarrow$

$\Rightarrow [p|_{U_\alpha}$ – гомео-зм$] \Rightarrow p(U_\alpha \cap V) \subset p(V)$ $\overbrace{\text{– відкр. окіл } y}^{\text{(в } U\text{, отже в } Y\text{)}}$.

Тобто у $\forall y \in p(V)$ $\exists$ відкр. окіл $\subset p(V)$, т.ч. p відкр.