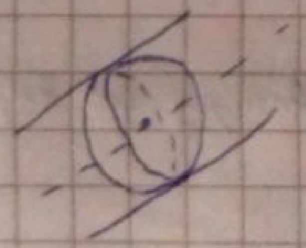
978. Знайти рівн. циліндра, твірні якого дотикаються до сфери $x^2+y^2+z^2=1$ і утворюють рівні кути з осями координат.



Це прямий круговий циліндр радіуса 1 як у 979, напрямний вектор твірних і осі — $(1,1,1)$.

Тому за ф-лою з 975 (вісь $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$) рівн.

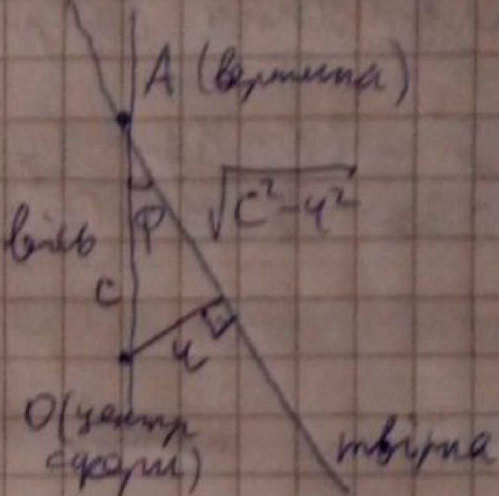
$$\frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{|(1,1,1)|} = 1$$

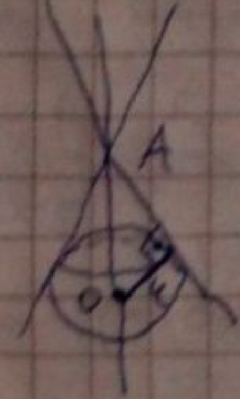
$$|(y-z, z-x, x-y)|^2 = 3$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-3=0.$$

989. Знайти рівн. конуса з вершиною $(0,0,c)$, що описаний навколо сфери $x^2+y^2+z^2=r^2$, $c>r>0$.

Це прямий круговий конус,
вісь якого проходить через
вершину $A(0,0,c)$ і центр
сфери $O(0,0,0)$, тобто це вісь
Oz $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z-c}{1}$, а твірні мають з віссю кут φ з
$\cos\varphi = \frac{\sqrt{c^2-r^2}}{c}$ (з прямокутного трик., що утворений віссю,
твірною та радіусом сфери). За ф-лою з №3, рівняння



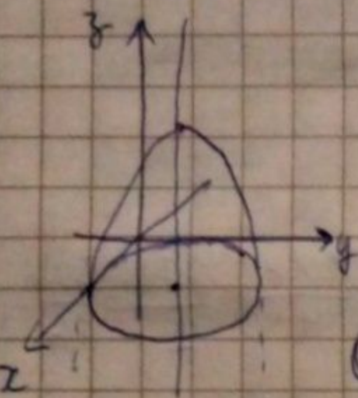


$$\frac{(x\cdot 0 + y\cdot 0 + (z-c)\cdot 1)^2}{(x^2+y^2+(z-c)^2)\cdot 1} = \frac{c^2-r^2}{c^2}$$

$$c^2(z-c)^2 = (c^2-r^2)(x^2+y^2+(z-c)^2)$$

$$(c^2-r^2)x^2 + (c^2-r^2)y^2 - r^2(z-c)^2 = 0.$$

1014. Записати рівн. еліптичного параболоїда з вершиною $(2,3,6)$ і віссю $\parallel Oz$, якщо Oxy його перетинає по еліпсоїду, осі якого $\parallel Ox$ і Oy і який дотикається до Ox і Oy.



З умов, рівняння параболоїда:

$$\frac{(x-2)^2}{p} + \frac{(y-3)^2}{q} = -2(z-6)$$

("−" бо вершина у I октанті, але є перетин з Oxy). Перетин з Oxy:

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{p} + \frac{(y-3)^2}{q} = -2(z-6) \\ z=0 \end{cases}$$

$$\frac{(x-2)^2}{p} + \frac{(y-3)^2}{q} = 12$$

$$\frac{(x-2)^2}{12p} + \frac{(y-3)^2}{12q} = 1$$

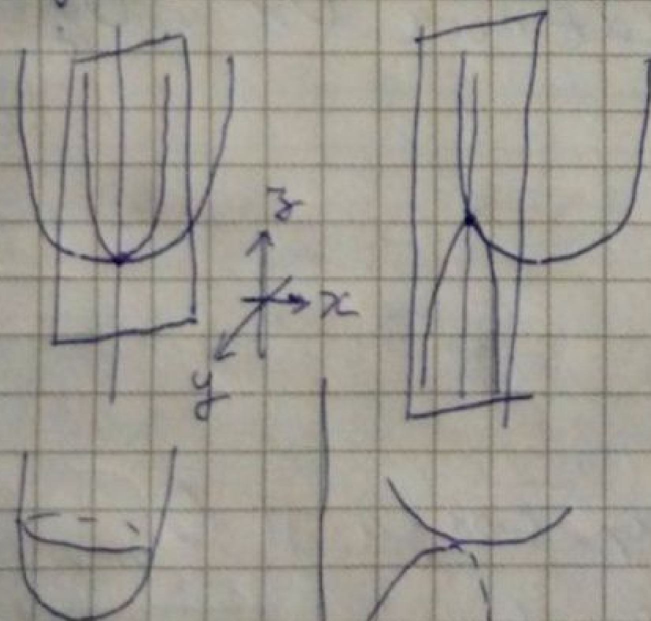
Це еліпс, що дотикається Ox і Oy $\Leftrightarrow$ $12p = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$, $12q = 9 \Rightarrow q = \frac{3}{4}$. Отже, рівн.:

$$3(x-2)^2 + \frac{4}{3}(y-3)^2 = -2(z-6)$$

$x = q$ з параметром q

1000. Уздовж параболи $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$ рухається інша парабола, що завжди лежить у площині $\parallel Oyz$, має вісь $\parallel Oz$ і вершину на першій параболі. Знайти рівняння поверхні, що вона описує:

I



II

вісі співнапрямлені | вісі протилежно напрямлені

Параметризуємо першу параболу: $\begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = \dfrac{u^2}{2p} \end{cases}$ (параметром $u = x$)

Тоді площина другої - це $x = u$. Вона має рівн.:

I $\begin{cases} x = u \\ y^2 = 2q\left(z - \frac{u^2}{2p}\right) \end{cases}$ II $\begin{cases} x = u \\ y^2 = -2q\left(z - \frac{u^2}{2p}\right) \end{cases}$

(бо вершина у $\left(u, 0, \frac{u^2}{2p}\right)$).

Параметризуємо її, поклавши $v = y$.

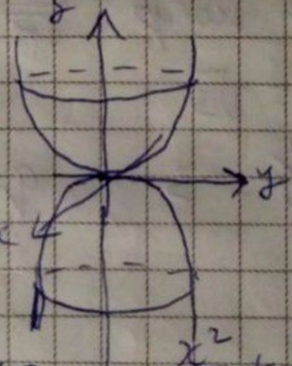
I $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{u^2}{2p} + \dfrac{v^2}{2q} \end{cases}$ II. $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{u^2}{2p} - \dfrac{v^2}{2q} \end{cases}$

Тобто це параболоїди:

I. $2z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$ (еліптичний п.) II. $2z = \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q}$ (гіперболічний п.)

1016. Знайти рівн. еліптичного параболоїда, який торкається Oxy у вершині, Oyz та Oxz є площинами симетрії, площина $x=a$ перетинає його по параболі з вершиною $(a,0,c)$, а площина $y=b$ – по параболі з вершиною $(0,b,c)$.

Перші дві умови означають, що ел. параболоїд канонічний (майже)



$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

або

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=-2z$$

Можемо вважати, що це $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, дозволивши $p,q<0$.

Перетин з $x=a$:

$$\frac{a^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

$$y^2=q\left(2z-\frac{a^2}{p}\right)=2q\left(z-\frac{a^2}{2p}\right)$$

Це парабола з вершиною $\left(a,0,\frac{a^2}{2p}\right)$, тобто $\frac{a^2}{2p}=c$, $p=\frac{a^2}{2c}$.

Перетин з $y=b$:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{b^2}{q}=2z$$

$$x^2=2p\left(z-\frac{b^2}{2q}\right)$$

Вершина $\left(0,b,\frac{b^2}{2q}\right)\Rightarrow\frac{b^2}{2q}=c$, $q=\frac{b^2}{2c}$.

Рівняння:

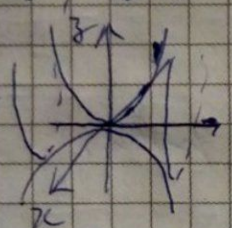
$$\frac{2cx^2}{a^2}+\frac{2cy^2}{b^2}=2z$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$$

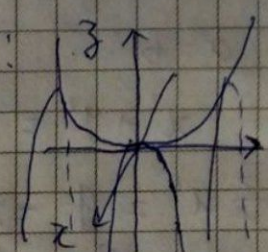
1017. Знайти рівн. гіперболічного параболоїда, що містить $(10,6,11)$, для якого Oxz, Oyz є площинами симетрії, а Oxy перетинає по парі прямих, кут між якими, що містить Ox, дор. $\frac{2\pi}{3}$.

З умов, він майже канонічний:

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

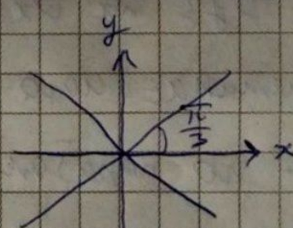


або $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2z$



Знову ж, можемо вважати, що це $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, якщо дозволити від'ємні p та q. Перетин з Oxy:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0$$



При $p,q>0$:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0$$

$y=\pm\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}x$, кутовий коеф. $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$: $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Ан-но при $p,q<0$: $\frac{\sqrt{-q}}{\sqrt{-p}}=\sqrt{3}$.

В будь-якому разі $\frac{q}{p}=3$, $q=3p$.

Підставимо точку $(10,6,11)$:

$$\frac{100}{p}-\frac{36}{3p}=22$$

$$100-12=22p$$

$p=4 \Rightarrow q=12$: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=2z$.

1075. Знайти рівн. дотичних площин до еліпсоїда, що проходять через $(12,-3,-1)$ і $\parallel Oz$; $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{5}=1$

Загальне рівн. дотичної у (x_0,y_0,z_0) на еліпсоїді:

$$\frac{xx_0}{32}+\frac{yy_0}{18}+\frac{zz_0}{5}=1$$

Прох. через $(12,-3,-1)$: $\frac{12x_0}{32}+\frac{-3y_0}{18}+\frac{-z_0}{5}=1$.

В. нормалі $n=\left(\frac{x_0}{32}, \frac{y_0}{18}, \frac{z_0}{5}\right)$, тому $\parallel Oz \Rightarrow \langle n,(0,0,1)\rangle = 0$, тобто $\frac{z_0}{5}=0$, $z_0=0$. Разом з належністю (x_0,y_0,z_0) еліпсоїду отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{3x_0}{8} - \frac{y_0}{6} - \frac{z_0}{5} = 1 \\ z_0 = 0 \\ \frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{18} + \frac{z_0^2}{5} = 1 \end{cases}$$

$\frac{3x_0}{8} - \frac{y_0}{6} = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{9x_0}{4} - 6$. Підставляємо:

$$\frac{x_0^2}{32} + \frac{1}{18}\left(\frac{9x_0}{4} - 6\right)^2 = 1$$

$$\frac{x_0^2}{32} + \frac{9x_0^2}{32} - \frac{3x_0}{2} + 2 - 1 = 0$$

$$5x_0^2 - 24x_0 + 16 = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{5}\left(12 \pm \sqrt{144-80}\right) = \frac{1}{5}(12 \pm 8)$$

$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 3$ (і $z_0=0$): $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$, $3x+4y-24=0$

$x_0 = \frac{4}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{9}{5} - 6 = -\frac{21}{5}$: $\frac{x}{40} - \frac{7y}{30} = 1$, $3x - 28y - 120 = 0$

1077. Знайти дотичні площини до параболоїда $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$, що проходять через $\frac{x-15}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-11}{-1}$.

Рівняння дотичної пл. до параболоїда у (x_0,y_0,z_0) має вигляд:

$$\frac{xx_0}{9} - \frac{yy_0}{4} = z + z_0$$

I спосіб. Підставляємо точку $(15,0,11)$ прямої:

$$\frac{15x_0}{9} - 0 = 11 + z_0$$

Також в. нормалі $\left(\frac{x_0}{9}, -\frac{y_0}{4}, -1\right)$ повинен бути $\perp$ напр. вектору $(0,2,-1)$ прямої: $0 - \frac{2y_0}{4} + 1 = 0$. Система:

$$\begin{cases} \frac{5x_0}{3} - z_0 = 11 \\ y_0 = 2 \\ \frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{4} = 2z_0 \end{cases}$$

$$\frac{x_0^2}{9} - 1 = 2\left(\frac{5x_0}{3} - 11\right)$$

$$x_0^2 - 30x_0 + 189 = 0$$

$$x_0 = 15 \pm \sqrt{225-189} = 15 \pm 6$$

$x_0 = 21$: $z_0 = \frac{5\cdot 21}{3} - 11 = 24$ (і $y_0 = 2$): $\frac{7x}{3} - \frac{y}{2} = z + 24$; $14x - 3y - 6z - 144 = 0$

$x_0 = 9$; $z_0 = \frac{45}{3} - 11 = 4$ (; $y_0 = 2$) ; $x - \frac{y}{2} = z + 4$; $2x - y - 2z - 8 = 0$.

<u>II спосіб.</u> Використаємо жмуток площин, що прох. через цю пряму:

$$\frac{x-15}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-11}{-1} \qquad \begin{cases} x - 15 = 0 \\ y + 2z - 22 = 0 \end{cases}$$

$-y = 2z - 22$

$$\lambda(x-15) + \mu(y + 2z - 22) = 0.$$

$$\lambda x + \mu y + 2\mu z - 15\lambda - 22\mu = 0.$$

Пор. з рівнянням дот. площини:

$$\frac{x x_0}{9} - \frac{y y_0}{4} - z - z_0 = 0$$

$$\frac{x_0}{9\lambda} = -\frac{y_0}{4\mu} = -\frac{1}{2\mu} = \frac{z_0}{15\lambda + 22\mu}$$

$$x_0 = -\frac{9\lambda}{2\mu},\ y_0 = 2,\ z_0 = -\frac{15\lambda + 22\mu}{2\mu}$$

Підставляємо у рівн.:

$$\frac{1}{9}\left(-\frac{9\lambda}{2\mu}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 = -2\cdot\frac{15\lambda + 22\mu}{2\mu}$$

$$\frac{9\lambda^2}{4\mu^2} - 1 + \frac{15\lambda + 22\mu}{\mu} = 0$$

$$9\lambda^2 - 4\mu^2 + 60\lambda\mu + 88\mu^2 = 0$$

$$3\lambda^2 + 20\lambda\mu + 28\mu^2 = 0.$$

$$3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 20\frac{\lambda}{\mu} + 28 = 0$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3}\left(-10 \pm \sqrt{100 - 84}\right) = \frac{1}{3}(-10 \pm 4)$$

$\frac{\lambda}{\mu} = -2$: $\lambda = 2, \mu = -1$ (наприклад), рівн. $2x - y - 2z - 8 = 0$.

$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{14}{3}$: $\lambda = 14, \mu = -3$, рівн. $14x - 3y - 6z - 144 = 0$

<u>1083.</u> Знайти рівн. площини, що паралельна $2x + 3y - z = 0$ і перетинає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 2z$ по парі прямих. Знайти ці прямі.

— Площина перетинає однопорожнинний гіперболоїд або гіперболічний параболоїд по парі прямих (прямолінійних твірних) $\Leftrightarrow$ це дотична.

— Загальне рівн. дотичної пл. до $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$: $\frac{x x_0}{p} - \frac{y y_0}{q} = z + z_0$

У нас $\frac{x x_0}{2} - \frac{y y_0}{8} - z - z_0 = 0$ паралельна $2x + 3y - z = 0$, тобто $\frac{x_0}{4} = -\frac{y_0}{24} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow x_0 = 4,\ y_0 = -24$. Тоді

$z_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{8}\right) = 4 - 36 = -32$. Отже, точка дотику $(4, -24, -32)$,

площина $2x + 3y - z + 32 = 0$.

Далі треба знайти твірні, що проходять через $(4, -24, -32)$.

<u>I спосіб.</u> Використати рівняння з лекцій. Для $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ це

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \mu \end{cases}$$

У нас:

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}}\right) = 2z \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}}\right) = 2z \\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}} = \mu \end{cases}$$

Підставимо $(4, -24, -32)$:

$$\begin{cases} \lambda\left(2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\right) = -64 \\ 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu\left(2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right) = -64 \\ 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = \mu \end{cases}$$

$\lambda = -4\sqrt{2}$, $\mu = 8\sqrt{2}$.

Підставляємо:

$$\begin{cases} -4\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}}\right) = 2z \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = -4\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 8\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}}\right) = 2z \\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 2y = 2z \\ 2x + y = -16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x + 4y = 2z \\ 2x - y = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x + y + 16 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - 32 = 0 \end{cases}$$

Перейдемо до канонічних. Обидві твірні проходять через точку дотику $(4, -24, -32)$, тому достатньо знайти напрямні вектори як векторні добутки векторів нормалі площин:

$$a_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 4) \qquad a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, -8) \sim (1, 2, 8)$$

Отже, твірні:

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+24}{2} = \frac{z+32}{4}, \qquad \frac{x-4}{1} = \frac{y+24}{2} = \frac{z+32}{8}$$

<u>II спосіб</u>. Знайдемо твірні просто як перетин параболоїда з дотичною площиною:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 2z \\ 2x + 3y - z + 32 = 0 \end{cases}$$

Підставимо $z = 2x + 3y + 32$ у перше рівн.:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 4x + 6y + 64$$

$$4x^2 - y^2 - 32x - 48y - 512 = 0$$

Виділимо повні квадрати:

$$4(x-4)^2 - \cancel{64} - (y+24)^2 + \cancel{576} - \cancel{512} = 0$$

$$(2(x-4) - y - 24)(2(x-4) + y + 24) = 0.$$

Тобто твірні:

$$\begin{cases} 2x - y - 32 = 0 \\ 2x + 3y - z + 32 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 16 = 0 \\ 2x + 3y - z + 32 = 0 \end{cases}$$

Знову знаходимо напрямні вектори:

$$\tilde{a}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1, -2, 8) \qquad \tilde{a}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 4)$$

Отримали ті ж вектори і прямі.

1084. Знайти точку перетину твірних 1-порожнинного гіперболоїда $x^2+y^2-z^2=1$, по яких його перетинає площина, що паралельна $x+y-z=0$. Знайти кути між цими твірними.

Знову ж, площина дотична. Для $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ це $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1$.

У нас: $xx_0+yy_0-zz_0=1$ паралельна $x+y-z=0$, тобто

$\frac{x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{-z_0}{-1} \Rightarrow x_0=y_0=z_0$. Підставимо у $x_0^2+y_0^2-z_0^2=1$:

$x_0^2+\cancel{x_0^2}-\cancel{x_0^2}=1 \Rightarrow x_0=\pm1$. Тобто це точки $(\pm1,\pm1,\pm1)$.

Знайдемо твірні. $(1,1,1)$ і $(-1,-1,-1)$

I спосіб. За ф-лами з лекцій, рівн. твірних $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$:

$$\begin{cases}\lambda_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda_2\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \lambda_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda_1\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}\mu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu_2\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu_1\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}$$

У нас:

$$\begin{cases}\lambda_1(x-z)=\lambda_2(1-y)\\ \lambda_2(x+z)=\lambda_1(1+y)\end{cases} \qquad \begin{cases}\mu_1(x-z)=\mu_2(1+y)\\ \mu_2(x+z)=\mu_1(1-y)\end{cases}$$

Підставимо $(1,1,1)$:

$$\begin{cases}0=0\\ 2\lambda_2=2\lambda_1\end{cases} \qquad \begin{cases}0=2\mu_2\\ 2\mu_2=0\end{cases}$$

$\lambda_1=\lambda_2$ $\qquad$ $\mu_2=0$.

Отже, рівняння:

$$\begin{cases}x-z=1-y\\ x+z=1+y\end{cases} \qquad \begin{cases}x-z=0\\ 0=1-y\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y-z-1=0\\ x-y+z-1=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x-z=0\\ y-1=0\end{cases}$$

Напр. вектори:

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,-2,-2)\sim(0,1,1) \qquad \begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,0,1)$$

Тобто твірні $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ і $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$.

Підставимо $(-1,-1,-1)$:

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda_2 \\ -2\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ -2\mu_2 = 2\mu_1 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 0 \qquad \mu_1 = -\mu_2$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 0 = 1 + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = -1 - y \\ x + z = -1 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Напр. вектори:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,0,1) \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,-2) \sim (0,1,1) \text{ ті ж}$$

Прямі (твірні) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+1}{1}$, $\frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1}$, для кута обидва рази маємо $\cos\varphi = \frac{\langle (0,1,1),(1,0,1)\rangle}{|(0,1,1)|\,|(1,0,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$.

<u>II спосіб</u> Дотичні площини у $(\pm1,\pm1,\pm1)$ мають рівн.

$x + y - z \mp 1 = 0$. Перетнемо з гіперболоїдом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x + y - z \mp 1 = 0 \end{cases}$$

$z = x + y \mp 1$: $\quad x^2 + y^2 - (x + y \mp 1)^2 - 1 = 0$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - 1 - 2xy \pm 2x \pm 2y - 1 = 0$$

$$xy \mp x \mp y + 1 = 0$$

$$(x \mp 1)(y \mp 1) = 0.$$

Тобто для $(1,1,1)$ це прямі

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Напр. вектори:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1) \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,0,-1) \sim (1,0,1)$$

Для $(-1,-1,-1)$:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Напр. вектори ті ж (і ті ж, що у способі I)