Ex.2. (багатовимірний тор Кліфорда, інше означення).

$r : T^n \to E^{2n}$. Знову, оскільки $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$, у якості лок. координат $(u^1, \ldots, u^n)$ беремо кутові параметри відповідних кіл. Отже,

$$r(u^1, \ldots, u^n) := (\cos u^1, \sin u^1, \ldots, \cos u^n, \sin u^n).$$ (очевидно, кор. визначене на T^n, ∞-гладке)

Диференціюємо:

$$r_i = (0, \ldots, 0, \underset{2i-1}{-\sin u^i}, \underset{2i}{\cos u^i}, 0, \ldots, 0), \quad i = \overline{1,n}$$

Тому коеф. I ф.ф.:

$$g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1,n}.$$

Це знову пласка (локально ізометрична E^n) метрика.
Зауважимо, з того, що це метрика, випливає зануреність r, як і у Ex.1.
Оберемо базис нормальних полів (тут глобальний):

$$\xi_\alpha := (0, \ldots, 0, \underset{2\alpha-1}{\cos u^\alpha}, \underset{2\alpha}{\sin u^\alpha}, 0, \ldots, 0), \quad \alpha = \overline{1,n}.$$

Очевидно, це норм. поля, бо $\langle r_i, \xi_\alpha \rangle = 0$ $\forall i, \alpha$; і базис ортонормований: $\langle \xi_\alpha, \xi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$

$\forall\, \alpha, \beta$.

Другі похідні:

$$r_{ij} = \begin{cases} (0,\dots,0,\underset{2i-1}{-\cos u^i}, \underset{2i}{-\sin u^i}, 0,\dots,0), & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

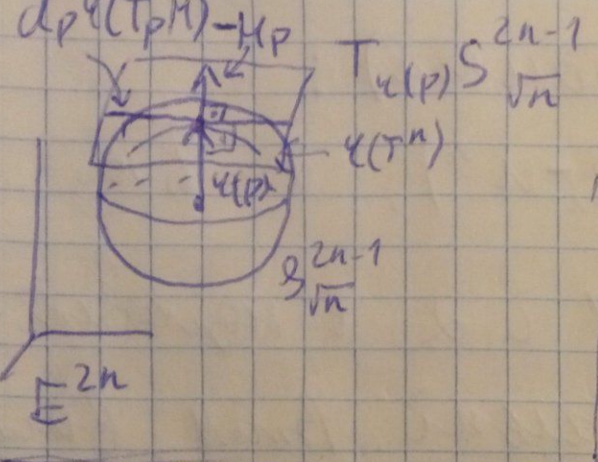
Звідси коеф. II ф.ф.:

$$b^\alpha_{ij} = \langle r_{ij}, \xi_\alpha\rangle = \begin{cases} -1, & i=j=\alpha,\\ 0 & \text{у інших випадках}.\end{cases}$$

Оскільки $G = I$, $G^{-1} = I$, тобто $g^{ij} = \delta^{ij}$ $\forall\, i,j$.

Тобто знову $H = H^\alpha \xi_\alpha = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b^\alpha_{ii}\,\xi_\alpha = -\frac{1}{n}(\xi_1+\dots+\xi_n) = -\frac{1}{n} r$.

<u>Rem.</u> Знову ж таки тут $r(T^n) \subset S^{2n-1}_{\sqrt{n}} \subset E^{2n}$ (сума квадратів коорд. $= n$). Оскільки проекція H_p на $T_{r(p)}S^{2n-1}_{\sqrt{n}} = r(p)^{\perp}$ дорівнює 0 $\forall\, p$, поле середньої кривини (T^n, r) у $S^{2n-1}_{\sqrt{n}}$ нульове (<u>Впр.</u>), тому



це мінімальний підмноговид у сфері (детальніше про сферу див. нижче).

Ex. 3. (узагальнений ~~гелікоїд~~ гелікоїд).

$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to E^{n+k+1}$ $\quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$: Для $a \neq 0$ визначимо ∞-гладке

$$\varphi(u^1, \dots, u^{n+1}) = (u^1 \cos u^{n+1}, u^1 \sin u^{n+1}, \dots, u^k \cos u^{n+1}, u^k \sin u^{n+1}, u^{k+1}, \dots, u^n, a u^{n+1})$$

(це гелікоїд при $n = k = 1$).

Отже:

$$\varphi_i = \begin{cases} (0, \dots, 0, \underset{2i-1}{\cos u^{n+1}}, \underset{2i}{\sin u^{n+1}}, 0, \dots, 0), & i = \overline{1,k}, \\ (0, \dots, 0, \underset{k+i}{1}, 0, \dots, 0), & i = \overline{k+1,n}, \\ (-u^1 \sin u^{n+1}, u^1 \cos u^{n+1}, \dots, -u^k \sin u^{n+1}, u^k \cos u^{n+1}, 0, \dots, 0, a), & i = n+1. \end{cases}$$

Тому коеф. I ф. ф.

$$g_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{k} (u^i)^2 + a^2, & i = j = n+1, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(додатньо визн. форма, тому φ - занурення).

Задано базис норм. полів (знову глобальний):

$$\xi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+(u^\alpha)^2}}\Big(0,\dots,0,\underset{2\alpha-1}{-a\sin u^{n+1}},\underset{2\alpha}{a\cos u^{n+1}},0,\dots,0,-u^\alpha\Big),\quad \alpha=\overline{1,k}.$$

Вони нормальні: $\langle \tau_i, \xi_\alpha\rangle = 0$ $\forall\, i,\alpha$ і нормовані: $\langle\xi_\alpha,\xi_\alpha\rangle = 1$ $\forall\, \alpha$, але не ортогональні. Втім, вони все ще лін. незалежні у $\forall$ точці, і тому утворюють базис норм. простору, відносно якого можна підраховувати коеф. II ф.ф.

Другі похідні:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \Big(0,\dots,0,\underset{\substack{2i-1\\(2j-1)}}{-\sin u^{n+1}},\underset{\substack{2i\\(2j)}}{\cos u^{n+1}},0,\dots,0\Big), & i=\overline{1,k},\ j=n+1 \text{ або } i=n+1,\ j=\overline{1,k},\\ \big(-u^1\cos u^{n+1},-u^1\sin u^{n+1},\dots,-u^k\cos u^{n+1},-u^k\sin u^{n+1},0,\dots,0\big), & i=j=n+1,\\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси "узагальнені" коеф. II ф.ф. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ b^α_{ij} – це коефіцієнти при

ξ_α у розкладенні Гаусса для r_{ij}. Нам достатньо буде того, що $r_{ii}=0$ при $i=\overline{1,n}$ і $\langle r_{n+1\,n+1}, \xi_\alpha\rangle = 0$ $\forall\ \alpha=\overline{1,k}$, тобто $r_{n+1\,n+1}$ – дотичний. Отже, $b^\alpha_{ii}=0$ $\forall\ i=\overline{1,n+1}$, $\alpha=\overline{1,k}$: м-ці $B^\alpha := (b^\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ мають нульові діагоналі.

Оскільки

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \sum_{i=1}^k (u^i)^2 + a^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \frac{1}{\sum_{i=1}^k (u^i)^2 + a^2} \end{pmatrix},$$

тобто

$$H = \frac{1}{n+1} H^\alpha \xi_\alpha = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^n b^\alpha_{ii} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k (u^i)^2 + a^2}\, b^\alpha_{n+1\,n+1}\right)\xi_\alpha = 0.$$

Цей підмноговид – мінімальний у E^{n+k+1}.

Rem. Для ф-ли H ортонормованість $\{\xi_\alpha\}$ не потрібна, достатньо того, що це базис у $\forall$ точці.

Впр. Чи буде мінімальним узагальнення:

$$r(u^1,\dots,u^{n+1}) = (u^1\cos a_1 u^{n+1}, u^1\sin a_1 u^{n+1}, \dots, u^k\cos a_k u^{n+1}, u^k \sin a_k u^{n+1}, u^{k+1}, \dots, u^n, a u^{n+1})?$$

Основні рівняння геометрії підмноговидів

Почнемо з k-гладкого ріманового многовида $(\overline{M}, \overline{g})$, де $k \geqslant 3$, а вимірність $\geqslant 2$. Як завжди, нехай $\overline{\nabla}$ – ріманова зв'язність $\overline{g}$. Нагадаємо, що тензор (оператор) кривини $(\overline{M}, \overline{g})$ визначається як відображення

$$\overline{\mathsf{R}}\colon \mathcal{X}^{k-1}(\overline{M}) \times \mathcal{X}^{k-1}(\overline{M}) \times \mathcal{X}^{k-1}(\overline{M}) \to \mathcal{X}^{k-3}(\overline{M})\colon$$

$$X, Y, Z \mapsto \overline{\mathsf{R}}(X, Y)Z := \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Цей вираз є 3-лінійним відносно додавання і множення на функції з $C^{k-1}(\overline{M})$, тобто, наприклад,

$$\overline{\mathsf{R}}(fX + hY, Z)W = f\overline{\mathsf{R}}(X, Z)W + h\overline{\mathsf{R}}(Y, Z)W,$$

і аналогічно для інших аргументів. Звідси випливає його "тензорність": для будь-якої $p \in \overline{M}$ і для будь-яких полів X, Y, Z на $\overline{M}$ вектор $(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)_p$ однозначно визначений векторами X_p, Y_p, Z_p. Іншими словами, визначене 3-лінійне відображення

$$\overline{\mathsf{R}}_p \colon T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$$

таке, що

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)_p = \overline{\mathsf{R}}_p(X_p, Y_p)Z_p$$

для будь-яких X, Y, Z.

Тензор кривини використовується для визначення усього, що пов'язане з кривиною ріманових многовидів. Виникає природне питання: як, аналогічно до метрики і зв'язності, перенести кривину на підмноговид? Отже, нехай (M, r) – k-гладкий підмноговид у $(\overline{M}, \overline{g})$ вимірності $n \geqslant 2$. Усі пов'язані з ним об'єкти позначаємо як раніше: g, ∇, B і т.д. Нехай тепер X, Y, Z – гладкі поля на M. Позначимо

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z \colon p \in M \mapsto \overline{\mathsf{R}}_{r(p)}(d_p r(X_p), d_p r(Y_p)) d_p r(Z_p) \in T_{r(p)}\overline{M}.$$

Це поле на M зі значеннями у $T\overline{M}$ ($(k-3)$-гладке). Щоб його знайти, для кожної $p \in M$ продовжимо, як раніше, поля $dr(X), dr(Y), dr(Z)$ на деякий окіл $r(p)$ полями $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ відповідно. В силу властивостей $\overline{\mathsf{R}}$, тоді маємо

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)_p = (\overline{\mathsf{R}}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z})_{r(p)}.$$

За означенням,

$$\overline{\mathsf{R}}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z} = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} - \overline{\nabla}_{[\overline{X},\overline{Y}]}\overline{Z} =$$

$$= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{\left(\overline{\nabla}_Y Z\right)} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{\left(\overline{\nabla}_X Z\right)} - \overline{\nabla}_{\overline{[X,Y]}} \overline{Z},$$

оскільки за побудовою $\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}$ продовжує $\overline{\nabla}_Y Z$, $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z}$ продовжує $\overline{\nabla}_X Z$, і, як ми показали у одному з доведень попереднього розділу, $[\overline{X}, \overline{Y}]$ продовжує поле $dr([X,Y])$. Тому для точок $r(M)$ звідси випливає

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

де у перших двох членах ми застосовуємо $\overline{\nabla}_X$ і $\overline{\nabla}_Y$ відповідно до полів на M зі значеннями у $T\overline{M}$ так само, як ми це робили раніше з дотичними і нормальними полями; коректність такого позначення доводиться аналогічно до Lem.1. і 2. вище. При цьому до цих полів ми можемо застосувати розкладення Гаусса, зокрема,

$$\overline{\nabla}_Y Z = dr(\nabla_Y Z) + B(Y,Z).$$

Сума продовжень дотичного і нормального доданків продовжує $\overline{\nabla}_Y Z$ (це не обов'язково те ж продовження, що вище, але в силу коректності це не важливо):

$$\overline{\overline{\left(\overline{\nabla}_Y Z\right)}} = \overline{\nabla_Y Z} + \overline{B(Y, Z)}.$$

Тоді у точках $r(M)$ з лінійності, розкладень Гаусса і Вейнгартена маємо

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z) + \overline{\nabla}_X (B(Y, Z)) =$$

$$= dr\,(\nabla_X \nabla_Y Z) + B(X, \nabla_Y Z) - dr\left(A_{B(Y,Z)} X\right) + \nabla^{\perp}_X B(Y, Z).$$

Міняємо місцями X та Y:

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = dr\,(\nabla_Y \nabla_X Z) + B(Y, \nabla_X Z) -$$

$$- dr\left(A_{B(X,Z)} Y\right) + \nabla^{\perp}_Y B(X, Z).$$

Нарешті, розкладення Гаусса дає

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = dr\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right) + B([X,Y],Z).$$

Позначимо через R тензор кривини (M,g):

$$\mathsf{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Тоді з формул вище робимо висновок:

<u>Cor.</u> Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на M

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z = dr\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y\right) +$$

$$+B(X,\nabla_Y Z) - B(Y,\nabla_X Z) - B([X,Y],Z) +$$

$$+\nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y B(X,Z).$$

Рівняння Гаусса

Ортогонально спроєктуємо $(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)_p$ на $d_pr(T_pM)$ у кожній $p \in M$, отримавши дотичну компоненту

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)^T = dr\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y\right).$$

Інколи цю рівність і звуть рівнянням Гаусса, але часто її множать (відносно $\overline{g}$) у точках $r(M)$ на $dr(W)$ для деякого поля W на M. Тоді справа маємо

$$\overline{g}\left(dr\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y\right), dr(W)\right) =$$

$$= g\left(\mathsf{R}(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y, W\right) =$$

$$= g(\mathsf{R}(X,Y)Z,W) - \overline{g}(B(X,W),B(Y,Z)) + \overline{g}(B(Y,W),B(X,Z))$$

за означенням g і зв'язком A з B.

Cor. (Рівняння Гаусса) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z, W на M

$$\overline{g}(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z, dr(W)) = g(\mathsf{R}(X,Y)Z, W) -$$

$$-\left(\overline{g}(B(X,W), B(Y,Z)) - \overline{g}(B(X,Z), B(Y,W))\right).$$

Згадаємо, що для $p \in M$ і 2-вимірного векторного підпростора (площини) $\sigma \subset T_pM$ секційною кривиною (M, g) (у p) у напрямку σ зветься

$$K(\sigma) = \frac{g_p(\mathsf{R}_p(v,w)w, v)}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2},$$

де v, w – якась пара лінійно незалежних векторів з σ; це число не залежить від v, w, тільки від σ і геометрії многовида.

Тут ми будемо цю секційну кривину звати внутрішньою кривиною підмноговида (M, r) у напрямку σ і позначати $K_{int}(\sigma)$.

<u>def.</u> Зовнішньою кривиною підмноговида (M, r) у напрямку площини $\sigma \subset T_pM$ зветься

$$K_{ext}(\sigma) := \frac{\overline{g}_{r(p)}(B_p(v,v), B_p(w,w)) - \overline{g}_{r(p)}(B_p(v,w), B_p(v,w))}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2},$$

де $v, w \in \sigma$ – лінійно незалежні вектори.

<u>Впр.</u> Вираз справа не залежить від вибору v, w, тільки від σ і геометрії підмноговида (можна, наприклад, довести це як для секційної кривини, перевіривши, що $\overline{g}(B(X,W), B(Y,Z)) - \overline{g}(B(X,Z), B(Y,W))$ має ті ж

симетрії, що й тензор Рімана $g(\mathsf{R}(X,Y)Z,W)$ многовида (M,g), за $X,Y,Z,W)$.

<u>Cor.</u> (Теорема Гаусса про кривину) Нехай $p \in M$ і $\sigma \subset T_pM$ – площина. Тоді секційна кривина $(\overline{M},\overline{g})$ у напрямку $d_pr(\sigma) \subset d_pr(T_pM) \subset T_{r(p)}\overline{M}$ (це площина, бо r – занурення) дорівнює

$$\overline{K}(d_pr(\sigma)) = K_{int}(\sigma) - K_{ext}(\sigma).$$

► Запишемо рівняння Гаусса у p і підставимо v,w,w,v (для лінійно незалежних $v,w \in \sigma$) замість значень X,Y,Z,W відповідно:

$$\overline{g}_{r(p)}(\overline{\mathsf{R}}_{r(p)}(d_pr(v),d_pr(w))d_pr(w),d_pr(v)) = g_p(\mathsf{R}_p(v,w)w,v) -$$

$$-\left(\overline{g}_{r(p)}(B_p(v,v),B_p(w,w)) - \overline{g}_{r(p)}(B_p(v,w),B_p(v,w))\right).$$

Поділивши на нормуючий знаменник

$$\overline{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(v))\overline{g}_{r(p)}(d_p r(w), d_p r(w)) - \overline{g}_{r(p)}(d_p r(v), d_p r(w))^2 =$$

$$= g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2$$

(за означенням g), отримаємо вирази для кривин. ◀

Rem. У випадку гіперповерхні доданки, що містять другу ф.ф., можна переписати з використанням відповідної скалярної форми (для (локального) одиничного нормального поля ξ):

$$\overline{g}(B(X,W), B(Y,Z)) = \overline{g}(b(X,W)\xi, b(Y,Z)\xi) = b(X,W)b(Y,Z),$$

і аналогічно для другого. Так само зовнішня кривина має вигляд:

$$K_{ext}(\sigma) = \frac{b_p(v,v)b_p(w,w) - b_p(v,w)^2}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2}.$$

Rem. Нехай $(\overline{M}, \overline{g})$ має постійну секційну кривину c. Тоді, як відомо,

$$\overline{\mathsf{R}}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} = c(\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z})\overline{X} - \overline{g}(\overline{X}, \overline{Z})\overline{Y}),$$

звідки у точках $r(M)$

$$\overline{\mathsf{R}}(X, Y)Z = c(\overline{g}(dr(Y), dr(Z))dr(X) - \overline{g}(dr(X), dr(Z))dr(Y)) =$$

$$= c(g(Y, Z)dr(X) - g(X, Z)dr(Y)).$$

Cor. (Рівняння і теорема Гаусса для підмноговида у просторі постійної секційної кривини c) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z, W на M

$$c(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)) = g(\mathsf{R}(X, Y)Z, W) -$$

$$- \left(\overline{g}(B(X, W), B(Y, Z)) - \overline{g}(B(X, Z), B(Y, W))\right).$$

Для будь-якої $p \in M$ і площини $\sigma \subset T_pM$

$$K_{int}(\sigma) - K_{ext}(\sigma) = c.$$

Rem. Тобто зовнішні кривини однозначно визначені рімановою геометрією (M, g) і зберігаються при його ізометріях. Зокрема, при $c = 0$ $K_{int} = K_{ext}$. У E^3 при $n = \dim M = 2$ (коли зовнішня кривина, як і секційна, у кожній точці одна – гауссова кривина) це і є оригінальна теорема Гаусса (theorema egregium).

Ex. Розглянемо гіперсферу з центром x_0 радіуса R

$$S^n_R(x_0) := \{x \mid \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = R^2\} \subset E^{n+1},$$

що задана (∞-гладким) вкладенням $r\colon S^n \to E^{n+1}$ стандартної сфери. Нехай $(u^1, \ldots, u^n)$ – якісь локальні координати на $U \subset S^n$. Тоді, диференціюючи умову з означення сфери

$$\langle r - x_0, r - x_0 \rangle = R^2$$

за u^i, отримаємо (як і раніше, тут всюди використовуємо ототожнення $T_x\mathbb{R}^{n+1}$ з $\mathbb{R}^{n+1}$)

$$2\langle r_i, r - x_0 \rangle = 0$$

для усіх $i = \overline{1, n}$, що означає $0 \neq r - x_0 \perp d_p r(T_p S^n)$ для усіх $p \in U$ (а отже і для усіх $p \in S^n$, оскільки ця умова не залежить від локальних координат). Тобто можна обрати (глобальне) гладке одиничне нормальне поле двома способами:

$$\xi := \pm \frac{r - x_0}{|r - x_0|} = \pm \frac{r - x_0}{R}.$$

Диференціюємо попередню рівність ще раз за u^j:

$$\langle r_{ij}, r - x_0\rangle + \langle r_i, r_j\rangle = 0,$$

тобто

$$b_{ij} = \langle r_{ij}, \xi\rangle = \pm\frac{1}{R}\langle r_{ij}, r - x_0\rangle = \mp\frac{1}{R}\langle r_i, r_j\rangle = \mp\frac{1}{R}g_{ij}$$

для усіх $i, j = \overline{1, n}$. Тобто незалежно від локальних координат $b = \mp\frac{1}{R}g$ на S^n. Зокрема, з теореми Гаусса тоді для будь-якої $p \in S^n$ і площини $\sigma \subset T_pS^n$

$$K_{int}(\sigma) = K_{ext}(\sigma) = \frac{b_p(v,v)b_p(w,w) - b_p(v,w)^2}{g_p(v,v)g_p(w,w) - g_p(v,w)^2} = \frac{1}{R^2},$$

тобто g – метрика на S^n постійної секційної кривини $\frac{1}{R^2}$ (1 для стандартного вкладення).

Рівняння Кодацці

Тепер випишемо нормальну компоненту $\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z$, проєктуючи його ортогонально на N_pM у кожній точці $p \in M$:

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)^{\perp} = \nabla^{\perp}_{X} B(Y,Z) - \nabla^{\perp}_{Y} B(X,Z) +$$

$$+ B(X, \nabla_Y Z) - B(Y, \nabla_X Z) - B([X,Y],Z) =$$

$$= \Big(\nabla^{\perp}_{X} B(Y,Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \Big) -$$

$$- \Big(\nabla^{\perp}_{Y} B(X,Z) - B(\nabla_Y X, Z) - B(X, \nabla_Y Z) \Big) .$$

Тут використали відсутність скрута: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$.

def. Коваріантною похідною другої ф.ф. B у напрямку поля $X \in \mathcal{X}^{k-1}(M)$ зветься відображення $\nabla^{\perp}_{X} B$ з $\mathcal{X}^{k-1}(M) \times \mathcal{X}^{k-1}(M)$ у $(k-2)$-гладкі нормальні поля на M, що визначене рівністю

$$(\nabla^{\perp}_{X} B)(Y, Z) := \nabla^{\perp}_{X} B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z).$$

Rem. Це аналог коваріантного диференціювання (скалярних) форм.

Pr. $X, Y, Z \mapsto (\nabla^{\perp}_{X} B)(Y, Z)$ – симетричне за Y, Z і 3-лінійне відносно додавання і множення на функції (зокрема, $\nabla^{\perp}_{X} B$ має ті ж властивості, що B).

▶ Симетричність та лінійність відносно додавання очевидно випливають із властивостей B, ∇ і $\nabla^{\perp}$, як і лінійність відносно множення X на функції. Для Y:

$$(\nabla^{\perp}_{X}B)(fY,Z)=\nabla^{\perp}_{X}(fB(Y,Z))-B(X(f)Y+f\nabla_{X}Y,Z)-$$

$$-B(fY,\nabla_{X}Z)=f\left(\nabla^{\perp}_{X}B(Y,Z)-B(\nabla_{X}Y,Z)-B(Y,\nabla_{X}Z)\right)+$$

$$+X(f)B(Y,Z)-X(f)B(Y,Z)=f(\nabla^{\perp}_{X}B)(Y,Z).$$

Аналогічно (або випливає з симетрії) і для Z. ◀

Rem. Така похідна визначена і задовольняє Pr. не лише для B, але і для будь-якої "форми зі значеннями у нормальних полях", що має ті ж властивості.

Cor. (Рівняння Кодацці) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на M

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z)^{\perp}=(\nabla^{\perp}_{X}B)(Y,Z)-(\nabla^{\perp}_{Y}B)(X,Z).$$

Rem. Для гіперповерхні з (локальним) одиничним нормальним полем ξ маємо $B = b\xi$, тому

$$(\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X (b(Y,Z)\xi) - b(\nabla_X Y, Z)\xi - b(Y, \nabla_X Z)\xi =$$

$$= (X(b(Y,Z)) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z))\,\xi + b(Y,Z)\nabla^{\perp}_X \xi.$$

Оскільки $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ (див. вище), це дорівнює добутку $(\nabla_X b)(Y,Z)\xi$, де $\nabla_X b$ – ''звичайна'' коваріантна похідна форми. Домножаючи на ξ рівняння Кодацці, тоді отримаємо:

Cor. (Рівняння Кодацці для гіперповерхні) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на гіперповерхні M з одиничним нормальним полем ξ

$$\overline{g}(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z, \xi) = (\nabla_X b)(Y,Z) - (\nabla_Y b)(X,Z).$$

Rem. Якщо $(\overline{M}, \overline{g})$ має постійну секційну кривину c, то, як ми бачили,

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z = c(g(Y,Z)dr(X) - g(X,Z)dr(Y))$$

є дотичним полем, тобто його нормальна проєкція нульова.

Cor. (Рівняння Кодацці для підмноговида у просторі постійної секційної кривини c) Для будь-яких гладких полів X, Y, Z на M

$$(\nabla^{\perp}_X B)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y B)(X,Z).$$

Рівняння Річчі

Аналогічно до $\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z$ для $(k-1)$-гладких полів X,Y і $(k-1)$-гладкого нормального поля ξ на M (тут – не обов'язково одиничного) визначимо

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi \colon p\in M \mapsto \overline{\mathsf{R}}_{r(p)}(d_p r(X_p), d_p r(Y_p))\xi_p \in T_{r(p)}\overline{M}.$$

Це ($(k-3)$-гладке) поле на M зі значеннями у $T\overline{M}$. З міркувань, аналогічних до доведення рівняння Гаусса, отримуємо, що

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi,$$

де ми знову використовуємо ''узагальнені'' на довільні поля на M зі значеннями у $T\overline{M}$ $\overline{\nabla}_X$ і $\overline{\nabla}_Y$. Знову ж, аналогічно до міркувань вище, з розкладень Гаусса і Вейнгартена маємо

$$\overline{\nabla}_Y \xi = -dr(A_\xi Y) + \nabla^{\perp}_Y \xi,$$

і тому

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi = -dr\left(\nabla_X (A_\xi Y)\right) - B(X, A_\xi Y) -$$

$$-dr\left(A_{\nabla^{\perp}_Y \xi} X\right) + \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi.$$

Переставимо X і Y:

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \xi = -dr\left(\nabla_Y (A_\xi X)\right) - B(Y, A_\xi X) -$$

$$-dr\left(A_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y\right) + \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi.$$

Крім того, з розкладення Вейнгартена:

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} \xi = -dr(A_\xi [X, Y]) + \nabla^{\perp}_{[X,Y]} \xi.$$

Комбінуючи ці вирази, отримуємо $\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi$.

<u>Впр.</u> Дотична компонента $\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi$ збігається з виразом, що можна отримати з рівняння Кодацці і симетрії $\overline{\mathsf{R}}$:

$$\overline{g}(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi, dr(Z)) = -\overline{g}(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)Z,\xi).$$

Проєктуємо на нормальні простори:

$$(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi)^{\perp} = -B(X,A_\xi Y) + B(Y,A_\xi X) +$$
$$+\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi.$$

<u>def.</u> Оператором кривини нормальної зв'язності $\nabla^{\perp}$ зветься відображення (гладких) полів

$\mathsf{R}^{\perp}\colon X,Y,\xi \mapsto \mathsf{R}^{\perp}(X,Y)\xi := \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi.$

Впр. $\mathsf{R}^\perp$ має властивості аналогічні до R (або $\overline{\mathsf{R}}$): 3-лінійність за всіма аргументами відносно додавання і множення на функції (зокрема, це означає визначеність $\mathsf{R}^\perp_p$ у кожній $p \in M$), а також симетрії

$$\mathsf{R}^\perp(X,Y)\xi = -\,\mathsf{R}^\perp(Y,X)\xi,$$

$$\overline{g}(\mathsf{R}^\perp(X,Y)\xi,\eta) = -\overline{g}(\mathsf{R}^\perp(X,Y)\eta,\xi)$$

для будь-яких полів X, Y і нормальних полів ξ, η на M.

Домножимо тепер праву частину $(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi)^\perp$ на довільне нормальне (теж не обов'язково одиничне) поле η. В силу зв'язку між A і B, перші два доданки дають

$$-\overline{g}(B(X,A_\xi Y),\eta) + \overline{g}(B(Y,A_\xi X),\eta) =$$

$$= -g(A_\eta X, A_\xi Y) + g(A_\eta Y, A_\xi X),$$

що, в силу "самоспряженості" A_ξ і A_η, дорівнює

$$-g(A_\xi A_\eta X, Y) + g(Y, A_\eta A_\xi X) = -g((A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi) X, Y).$$

Далі позначаємо $[A_\xi, A_\eta] := A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$ – "операторний коммутатор".

<u>Cor.</u> (Рівняння Річчі) Для будь-яких гладких полів X, Y і гладких нормальних полів ξ, η на M

$$\overline{g}(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi, \eta) = -g([A_\xi, A_\eta]X, Y) + \overline{g}(\mathsf{R}^\perp(X,Y)\xi, \eta).$$

<u>Rem.</u> Для гіперповерхонь нормальні простори одновимірні, тому локально в околі кожної точки M завжди $\xi = f\eta$ або $\eta = f\xi$ для деякої функції f. В силу

симетрій $\overline{\mathsf{R}}$, $\mathsf{R}^{\perp}$ (з Впр. вище) і кососиметричності $[A_\xi, A_\eta]$ за ξ, η, зліва і справа маємо нулі:

$$\overline{g}(\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi,\xi) = \overline{g}(\mathsf{R}^{\perp}(X,Y)\xi,\xi) = g([A_\xi, A_\xi]X, Y) = 0.$$

Rem. Для $(\overline{M}, \overline{g})$ постійної секційної кривини c аналогічно до міркувань вище маємо

$$\overline{\mathsf{R}}(X,Y)\xi = c(\overline{g}(dr(Y),\xi)dr(X) - \overline{g}(dr(X),\xi)dr(Y)) = 0.$$

Cor. (Рівняння Річчі для підмноговида у просторі постійної секційної кривини c) Для будь-яких гладких полів X, Y і гладких нормальних полів ξ, η на M

$$\overline{g}(\mathsf{R}^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) = g([A_\xi, A_\eta]X, Y).$$