

Задача 1.0. Розглянемо площину F , що проходить через точку $P(2,0,1)$ і натягнута на вектори $(1,1,2)$ і $(0,4,0)$. Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) площини F . Перевірте регулярність параметрично заданої площини F .

Задача 1.1. Розглянемо циліндр F , утворений прямими, що проходять через точки кривої γ :
$$\begin{cases} x^1 = \cosh t \\ x^2 = t \end{cases}$$
 і мають спільний напрямний вектор $\vec{a} = (1,0,1)$.

Запишіть параметричне рівняння (радіус-вектор) циліндра F , перевірте регулярність циліндра. *Знайдіть криву, по якій циліндр F перетинається з площиною, ортогональною твірним прямим циліндра.

Задача 1.2. Розглянемо конус F , утворений прямими, що проходять через

точку $O(0,0,0)$ і точки кривої γ :
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$$
 . Запишіть параметричне

рівняння (радіус-вектор) конуса F , перевірте регулярність конуса. *Знайдіть криву, по якій конус F перетинається зі сферою одиничного радіусу з центром в вершині конуса - точці O .

Задача 1.3. Розглянемо торсову поверхню F , утворену дотичними прями-

ми гвинтової лінії γ :
$$\begin{cases} x^1 = r \cos t \\ x^2 = r \sin t, 0 < t < 2\pi \\ x^3 = ht \end{cases}$$
 . Запишіть параметричне рівняння

(радіус-вектор) поверхні F , перевірте регулярність цієї поверхні.

***Задача 2.1.** Проаналізуйте регулярність циліндричної поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{a}$, утвореної прямими з напрямним вектором \vec{a} , що проходять через точки кривої з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$.

***Задача 2.2.** Проаналізуйте регулярність конічної поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = u^2 \cdot \vec{a}(u^1)$, утвореної прямими, що проходять через точку $O(0,0,0)$ і точки кривої з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{a}(u^1)$.

***Задача 2.3.** Проаналізуйте регулярність торсової поверхні F з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1) + u^2 \cdot \vec{\tau}(u^1)$, утвореної дотичними прямими кривої з радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(u^1)$.

****Задача 2.4.** Чи може циліндрична поверхня бути площиною?

****Задача 2.5.** Чи може конічна поверхня бути площиною?

****Задача 2.6.** Чи може торсова поверхня бути площиною?

Задача 3.1.1. Розглянемо вертикальну пряму $x^1=r>0$ в площині x^1x^3 . Яка поверхня утворюється в \mathbb{R}^3 обертанням вказаної прямої навколо осі x^3 ? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 3.1.2. Розглянемо горизонтальну пряму $x^3=r>0$ в площині x^1x^3 . Яка поверхня утворюється в \mathbb{R}^3 обертанням вказаної прямої навколо осі x^3 ? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 3.2. Розглянемо ланцюгову лінію

$$\begin{cases} x^1 = r \cosh t \\ x^3 = t \end{cases}$$

Яка поверхня утворюється в \mathbb{R}^3 обертанням цієї лінії навколо осі x^3 ? Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 3.3. Розглянемо трактрису

$$\begin{cases} x^1 = \frac{1}{\cosh t} \\ x^3 = t - \tanh t \end{cases}$$

Яка поверхня утворюється в \mathbb{R}^3 обертанням цієї лінії навколо осі x^3 ?

Запишіть радіус-вектор цієї поверхні і перевірте її регулярність.

***Задача 3.4.** Розглянемо поверхню в \mathbb{R}^3 , утворену обертанням кривої γ

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

навколо осі x^3 . Запишіть радіус-вектор цієї поверхні, перевірте її регулярність та зробіть висновок про те, коли на поверхні обертання можуть виникнути особливі точки (де порушується умова регулярності).

Метод розв'язання. Поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \cos \varphi \\ x^2 = r(t) \sin \varphi, & a < t < b, \quad \alpha < \varphi < \beta. \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

Умова регулярності:

$$\text{Rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^3}{\partial t} & \frac{\partial x^3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \equiv 2.$$

Задача 4. Проаналізуйте регулярність наступних неявно заданих поверхонь та, якщо є, вкажіть особливі (сингулярні) точки, де порушуються умови регулярності:

1) площина: $a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0$

2) еліпсоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 + a_3 (x^3)^2 = 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

3) гіперболоїд: $a_1 (x^1)^2 + a_2 (x^2)^2 - a_3 (x^3)^2 = \pm 1, \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

4) параболоїд: $x^3 = a_1 (x^1)^2 \pm a_2 (x^2)^2, \quad a_1 > 0, a_2 > 0$

5) лінійчата поверхня: $F\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right) = 0$

6) циліндрична поверхня: $F(x^1, x^2) = 0$

7) поверхня обертання: $F((x^1)^2 + (x^2)^2, x^3) = 0$

8) кубічна поверхня: $x^1 x^2 x^3 = a_0$