Задача 0.1. Побудуйте індикатрису дотичних для наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = \cosh t \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

2) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = at^2 \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

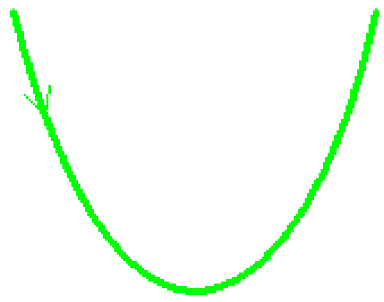
3) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = at^3 \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

4) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \; 0 < t < 2\pi$

5) $\begin{cases} x^1 = e^{at} \sin t \\ x^2 = e^{at} \cos t \end{cases}, \; -\infty < t < \infty$

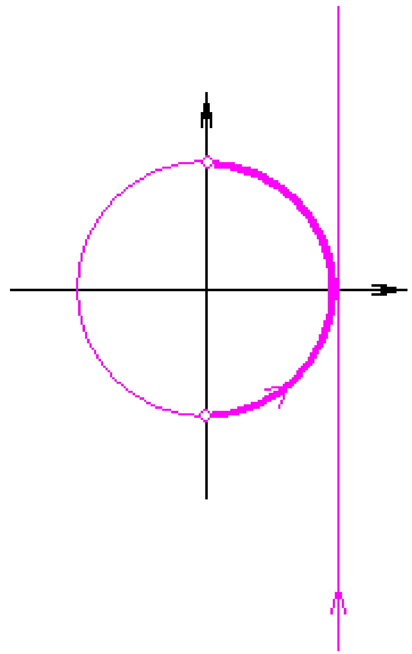
Опишіть індикатрису дотичних як траєкторію точки, що рухається по одиничному колу.

Розв’язання:



1) $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a+t \\ b+\cosh t \end{pmatrix}$,

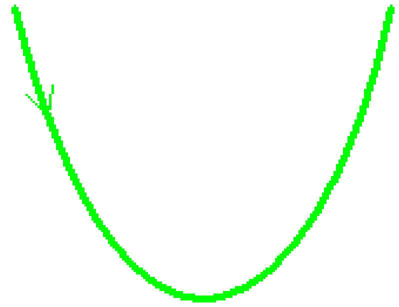
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$$



$$\vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cosh t} \\ \dfrac{\sinh t}{\cosh t} \end{pmatrix}$$

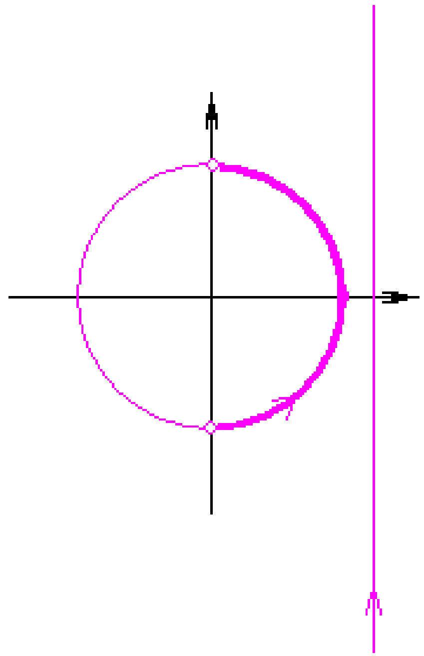
Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{t}{\cosh t} \\ x^2 = \dfrac{\sinh t}{\cosh t} \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty$

2) $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} at \\ bt^2 \end{pmatrix}$, $a>0, b>0$



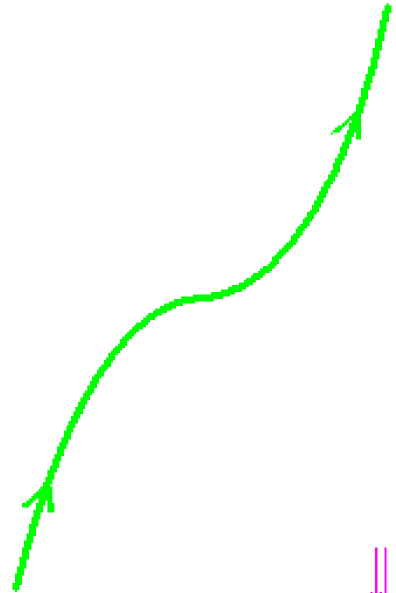
$$\frac{d\vec{f}}{dt}=\begin{pmatrix} a \\ 2bt \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right|=\sqrt{a^2+4b^2t^2}$$

$$\vec{\tau}(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2+4b^2t^2}}\cdot\begin{pmatrix} a \\ 2bt \end{pmatrix}$$



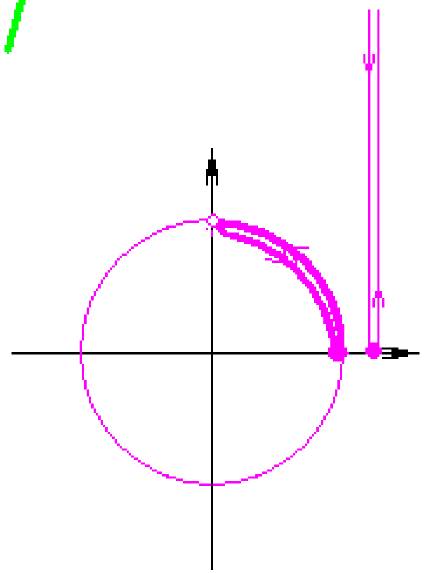
Відповідь: $\begin{cases} x^1=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4b^2t^2}} \\ x^2=\dfrac{2bt}{\sqrt{a^2+4b^2t^2}} \end{cases}$, $-\infty<t<\infty$

3) $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt^3 \end{pmatrix}$, $a>0,\ b>0$



$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} a \\ 3bt^2 \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = \sqrt{a^2 + 9b^2t^4}$$

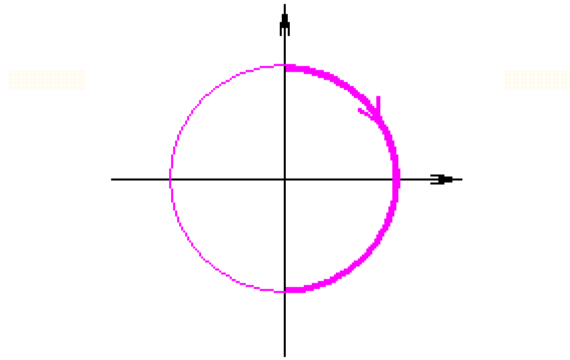
$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 9b^2t^4}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3bt^2 \end{pmatrix}$$



Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 9b^2t^4}} \\ x^2 = \dfrac{3bt^2}{\sqrt{a^2 + 9b^2t^4}} \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$

4) $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $0 < t < 2\pi$

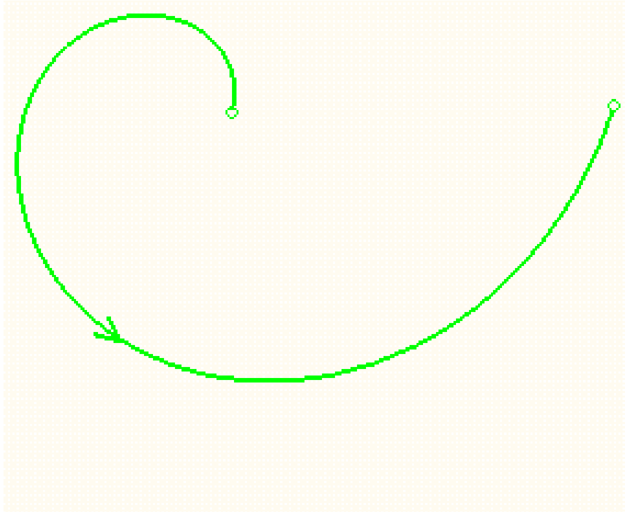
$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = 2\sin\frac{t}{2}$$



$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

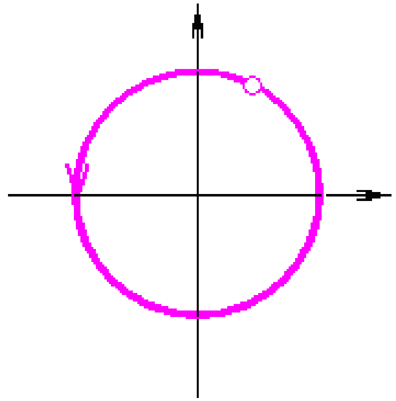
Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \sin\frac{t}{2} \\ x^2 = \cos\frac{t}{2} \end{cases}$, $0 < t < 2\pi$

5) $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{at}\cos t \\ e^{at}\sin t \end{pmatrix}$, $a>0$



$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \begin{pmatrix} e^{at}(a\cos t - \sin t) \\ e^{at}(a\sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{d\vec{f}}{dt}\right| = e^{at}\sqrt{1+a^2}$$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \begin{pmatrix} a\cos t - \sin t \\ a\sin t + \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix}$$



Відповідь: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\cos t - \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sin t \\ x^2 = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\sin t + \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cos t \end{cases}$

***Задача 0.2.** Побудуйте індикатрису дотичних для овалу Кассіні

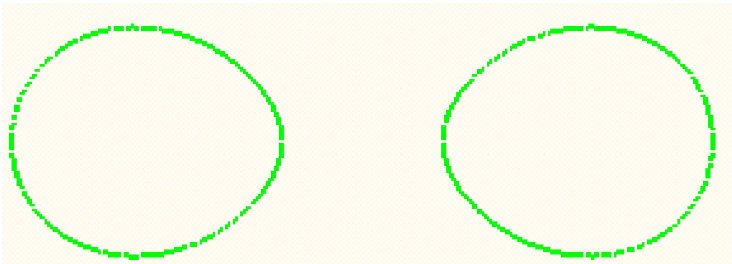
$$((x^1-1)^2+(x^2)^2)\,((x^1+1)^2+(x^2)^2)\;-c^2=0$$

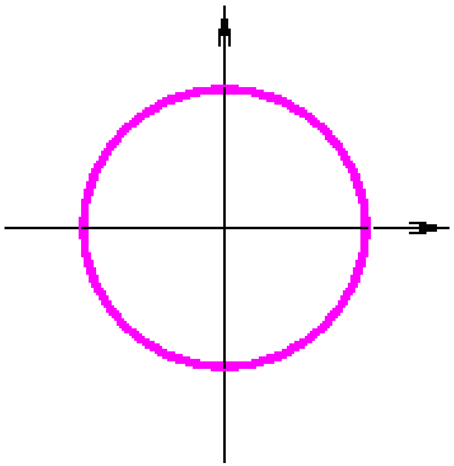
Проаналізуйте залежність форми індикатриси від параметру c.

Розвязання:

Якщо $0<|\,c\,|<1$, то овал Кассіні утворений з двох овалів.

Для кожного з овалів індикатрисою дотичних є однократно вкрите коло.

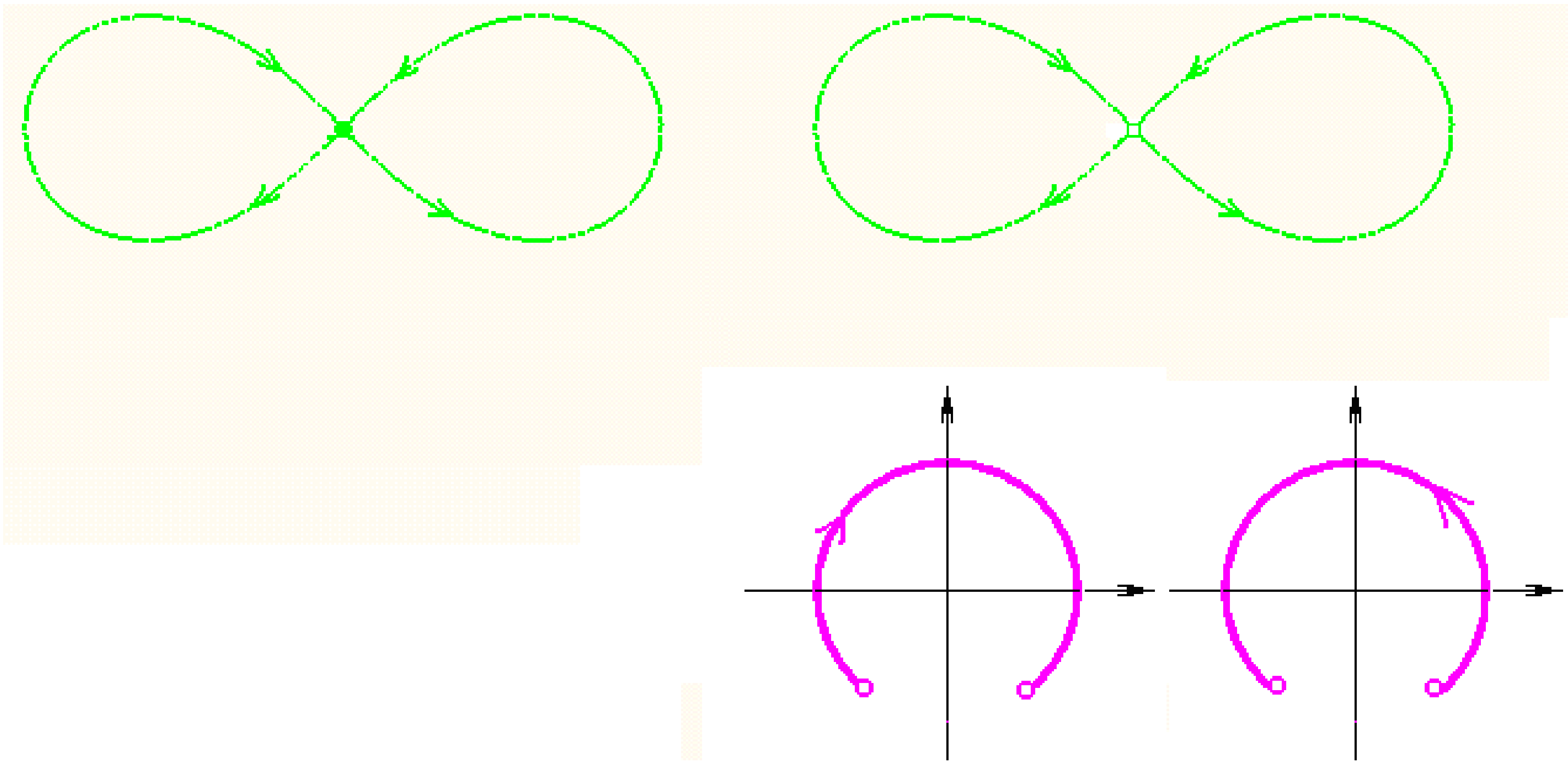




Якщо | c |=1, то овал Кассіні – це лемніската Бернуллі.

Лемніската Бернуллі з виколотою точкою самоперетину (точка перегину для гілок кривої) розпадається на дві компоненти.

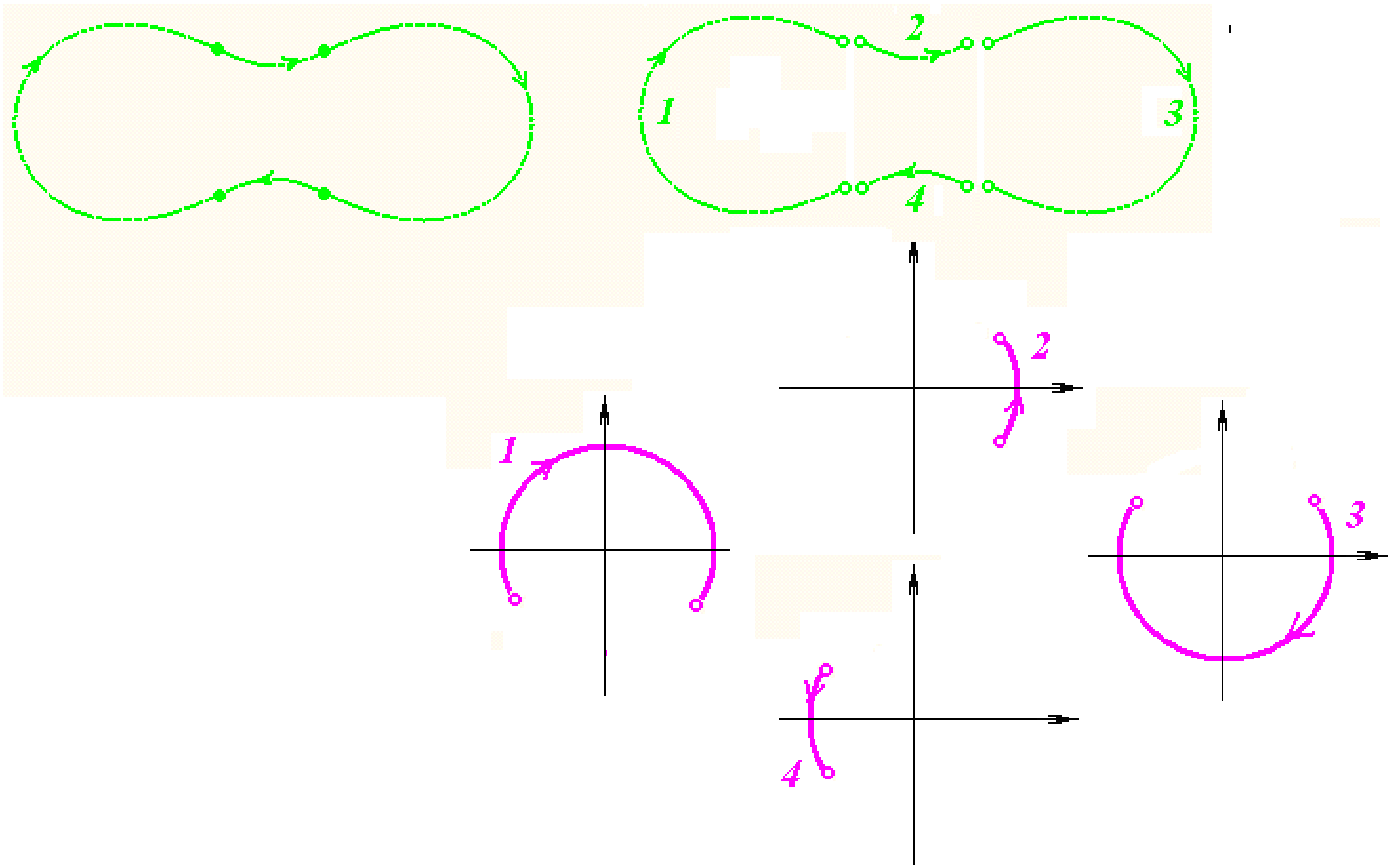
Для кожної з цих компонент індикатриса дотичних представляє собою ¾ однократно вкритого кола.



Якщо $1<|c|<2$, то овал Кассіні має чотири точки перегину.

Якщо виколоти точки перегину, то овал Кассіні розпадається на чотири компоненти.

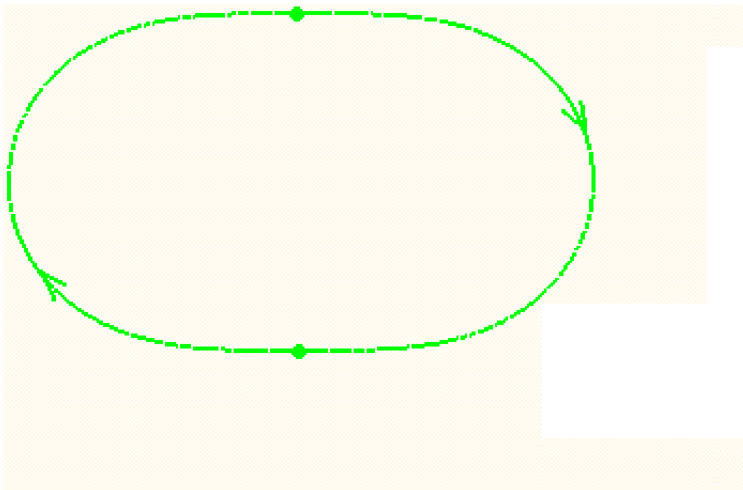
Для кожної з цих компонент овалу Кассіні індикатриса дотичних представляє собою дугу кола, кінці якої визначається напрямками дотичної в граничних точках перегину.

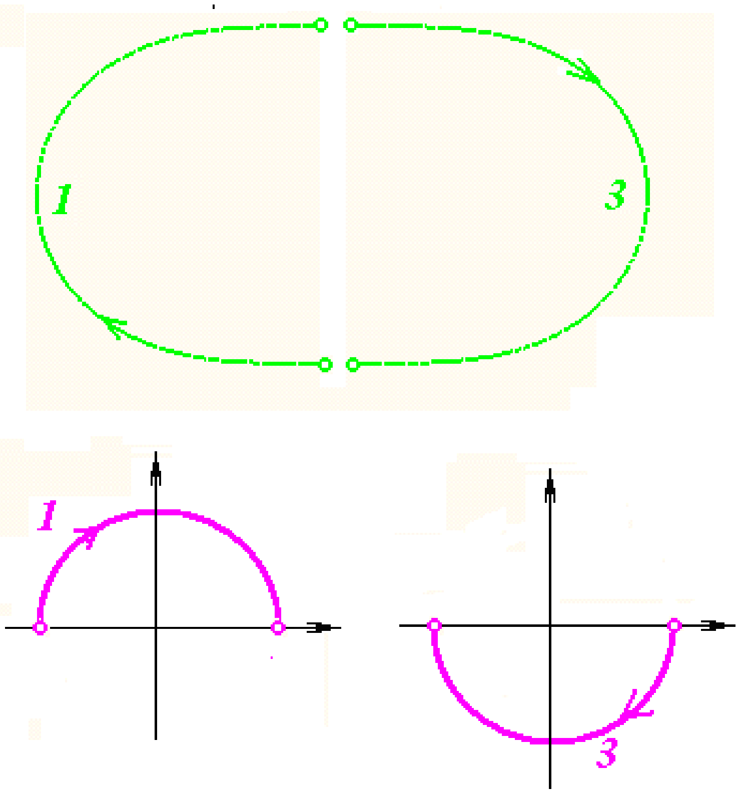


В граничному випадку $|c| = 2$ пари точок перегину овалу Кассіні співпадуть так, що на овалі Кассіні залишаться дві точки перегину.

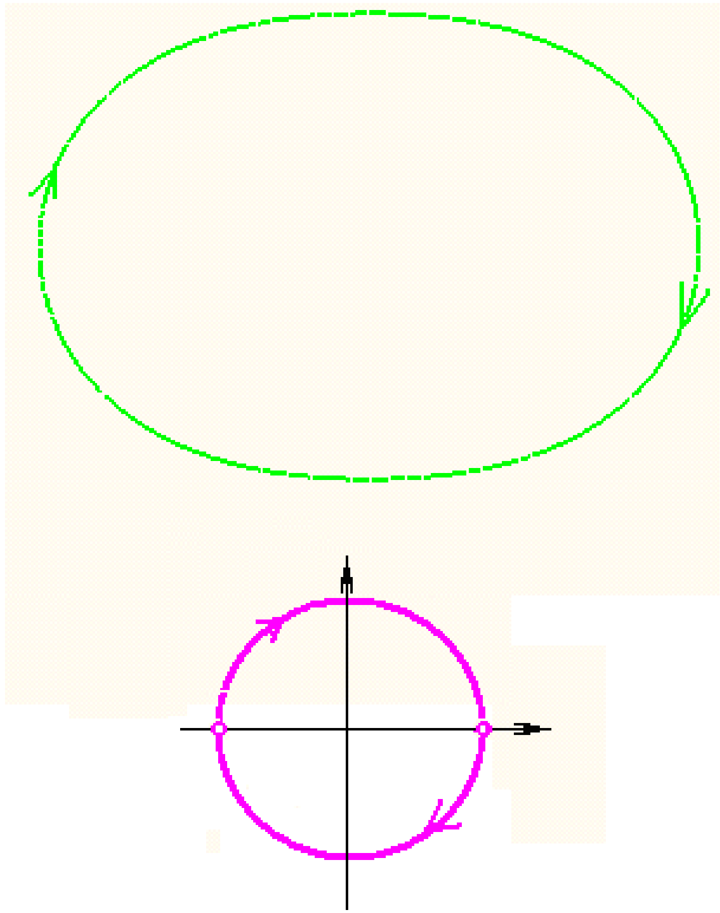
Якщо виколоти точки перегину, то овал Кассіні розпадається на дві компоненти.

Для кожної з цих компонент овалу Кассіні індикатриса дотичних представляє собою півколо.





Якщо $| c |> 2$, то овал Кассіні не містить точок перегину і є замкнутою опуклою кривою. Індикатриса дотичних представляє собою однократно вкрите коло.



Зауваження. Для неявно заданої регулярної кривої

$$F(x,y)=0$$

кривина обчислюється за формулою

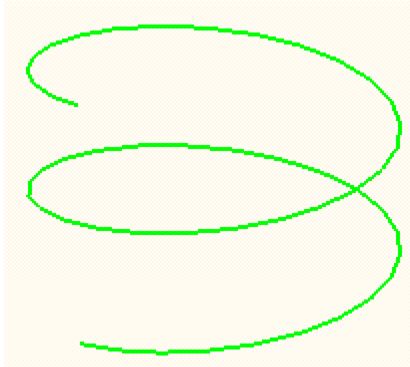
$$k=\frac{F''_{xx}(F'_y)^2-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}(F'_x)^2}{((F'_x)^2+(F'_y)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Як наслідок, точки перегину ($k=0$) неявно задано регулярної кривої знаходяться з наступною системи:

$$\begin{cases} F=0 \\ F''_{xx}(F'_y)^2-2F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}(F'_x)^2=0 \end{cases}$$

Задача 0.3. Побудуйте індикатрису дотичних, індикатрису головних нормалей і індикатрису бінормалей для гвинтової лінії

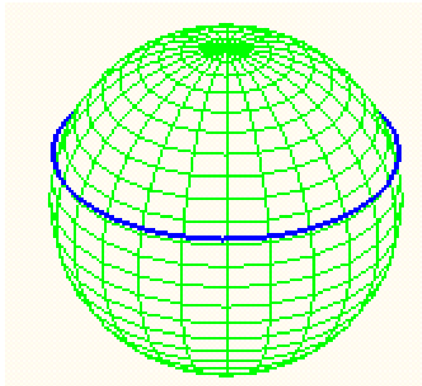
$$\begin{cases} x^1 = r\cos t \\ x^2 = r\sin t \;, \; -\infty < t < \infty \\ x^3 = ht \end{cases}$$



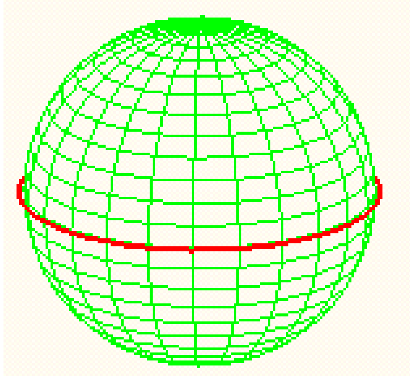
Розв'язання: Згадаємо базис Френе:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}, \vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\begin{pmatrix} h\sin t \\ -h\cos t \\ r \end{pmatrix}$$

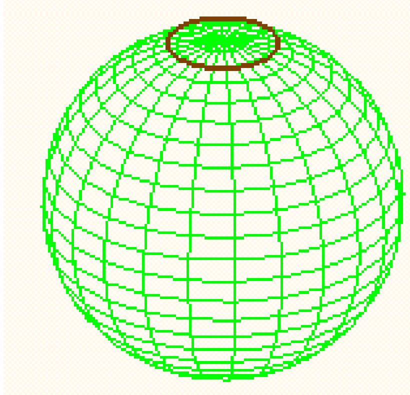
Індикатриса дотичних: $\begin{cases} x^1 = -\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin t \\ x^2 = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos t \\ x^3 = \dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \end{cases}$



Індикатриса головних нормалей: $\begin{cases} x^1 = -\sin t \\ x^2 = -\cos t \\ x^3 = 0 \end{cases}$



Індикатриса бінормалей: $\begin{cases} x^1 = \dfrac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sin t \\ x^2 = \dfrac{-h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cos t \\ x^3 = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \end{cases}$



Задача 0.4. Обчисліть інтегральну кривину зі знаком $\int\limits_{\gamma} k^* ds$ для наступних плоских кривих:

1) $\begin{cases} x^1 = a\sin t + c \\ x^2 = b\cos t + d \end{cases}, \ 0 < t < 2\pi$ $\qquad -2\pi$

2) $\begin{cases} x^1 = a\cosh t + c \\ x^2 = b\sinh t + d \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$ $\qquad \arccos\dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$

3) $\begin{cases} x^1 = at \\ x^2 = bt^3 \end{cases}, \ -\infty < t < \infty$ $\qquad 0$

4) $\begin{cases} x^1 = t - \sin t \\ x^2 = 1 - \cos t \end{cases}, \ 0 < t < 2\pi$ $\qquad -\pi$

5) $\begin{cases} x^1 = e^{at}\sin t \\ x^2 = e^{at}\cos t \end{cases}, \ 0 < t < 2\pi$ $\qquad 2\pi$

Задача 0.5. Обчисліть інтегральну кривину зі знаком $\int\limits_{\gamma} k^{*} ds$ для наступних плоских кривих:

Відповідь: $\int\limits_{\gamma} k^{*} ds = 2\pi m$,

де 1) $m= -1$, 2) $m=1$, 3) $m= -1$, 4) $m= -1$, 5) $m=-5$, 6) $m= -1$,

***Задача 0.6.** Розглянемо регулярну криву γ в $\mathbb{R}^3$, задану натуральними рівняннями

$$k=k(s),\ \kappa=\kappa(s),\ 0 < s < L.$$

Проаналізуйте регулярність та обчисліть довжину індикатриси дотичних, індикатриси головних нормалей і індикатриси бінормалей кривої γ.

Розв'язання:

$\vec{x}=\vec{\tau}(s)$	$\vec{x}=\vec{\nu}(s)$	$\vec{x}=\vec{\beta}(s)$
$\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu}$	$\dfrac{d\vec{\nu}}{ds}=-k\vec{\tau}+\kappa\vec{\beta}$	$\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}=-\kappa\vec{\nu}$
$\left\|\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\right\|=k$	$\left\|\dfrac{d\vec{\nu}}{ds}\right\|=\sqrt{k^2+\kappa^2}$	$\left\|\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}\right\|=\|\kappa\|$
$l_\tau=\int\limits_0^L\left\|\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\right\|ds=\int\limits_0^L k\,ds$	$l_\nu=\int\limits_0^L\left\|\dfrac{d\vec{\nu}}{ds}\right\|ds=\int\limits_0^L\sqrt{k^2+\kappa^2}\,ds$	$l_\beta=\int\limits_0^L\left\|\dfrac{d\vec{\beta}}{ds}\right\|ds=\int\limits_0^L\|\kappa\|\,ds$

Задача 1. Розглянемо вертикальну пряму $x^1 = r > 0$ в площині x^1x^3. Яка поверхня утворюється в $\mathbb{R}^3$ обертанням вказаної прямої навколо осі x^3? Запишіть параметричне задання цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 2. Розглянемо ланцюгову лінію

$$\begin{cases} x^1 = r\cosh t \\ x^3 = t \end{cases}$$

Яка поверхня утворюється в $\mathbb{R}^3$ обертанням цієї лінії навколо осі x^3? Запишіть параметричне задання цієї поверхні і перевірте її регулярність.

Задача 3. Розглянемо поверхню в $\mathbb{R}^3$, утворену обертанням кривої γ

$$\begin{cases} x^1 = r(t) \\ x^3 = h(t) \end{cases}$$

навколо осі x^3. Запишіть параметричне задання цієї поверхні, перевірте її регулярність та зробіть висновок про те, коли на поверхні обертання можуть виникнути особливі точки (де порушується умова регулярності).

Розв'язання. Поверхня обертання задається у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = r(t)\cos\varphi \\ x^2 = r(t)\sin\varphi\ , \quad a < t < b,\ \alpha < \varphi < \beta. \\ \quad x^3 = h(t) \end{cases}$$

Умова регулярності:

$$\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial t} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial t} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial t} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \equiv 2$$

Задача 4. Розглянемо циліндричну поверхню F, твірні прямі якої паралельні вертикальній координатні прямій x^3, а базова крива лежить в площині x^1x^2 і задається параметрично у вигляді

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t) \\ x^2 = f^2(t) \end{cases}$$

Запишіть параметричне задання поверхні F і перевірте її регулярність.

Задача 5. Розглянемо криву γ на одиничній сфері S^2 в $\mathbb{R}^3$, задану радіус-вектором $\vec{x} = \vec{\xi}(t)$. Розглянемо конічну поверхню F, утворену прямими, що проходять через центр сфери і через точки кривої γ.

Запишіть радіус-вектор конічної поверхні F і перевірте її регулярність.